

# Esame scritto di Geometria A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2016/2017

Appello di settembre 2017

## Esercizio 1

Si considerino i fasci di rette nello spazio

$$r_1(h) : \begin{cases} x = h - 4 + t \\ y = 2h - 7 - t \\ z = 10 - 3h + 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2(h) : \begin{cases} x + y + (h + 3)z = -20 \\ (h + 5)y + z = 2h - 1 \end{cases} .$$

- (i) Per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , determinare le equazioni cartesiane di  $r_1(h)$ .
- (ii) Per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , determinare se la coppia  $r_1(h), r_2(h)$  è una coppia di rette coincidenti, parallele non coincidenti, incidenti o sghembe.
- (iii) Per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , determinare le equazioni cartesiane del più piccolo spazio affine che contiene  $r_1(h)$  e  $r_2(h)$ .

## Esercizio 2

Si consideri l'endomorfismo  $f_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definito da

$$\begin{aligned} f_k((1, -1, 0, -1)) &= (0, -k - 2, 3, -2), & f_k((1, 0, 0, 0)) &= (k + 1, 0, 5, -1), \\ f_k((0, -1, 2, 0)) &= (2, 1 - k, 2, -1), & f_k((0, 0, -2, 1)) &= (k + 3, 3, 0, 0). \end{aligned}$$

- (i) Determinare la matrice  $M_{\mathcal{B}}(f_k)$ , dove  $\mathcal{B}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .
- (ii) Determinare per quali  $k \in \mathbb{R}$ , l'endomorfismo è iniettivo e, nei casi in cui  $f_k$  non è iniettivo, determinare la dimensione del nucleo.
- (iii) Determinare per quali  $k \in \mathbb{R}$ , l'endomorfismo è diagonalizzabile.

### Esercizio 3

Si consideri  $\mathbb{E}^2$  con coordinate cartesiane ortonormali  $(x, y)$  e centro  $O$ . Si consideri la trasformazione

$$\sigma(x, y) = \left( \frac{1}{13}(5x + 12y + 6), \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) \right).$$

Sia  $\tau$  la traslazione di vettore  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (i) Dimostrare che  $\sigma$  è una riflessione rispetto a una retta  $r$ . Si specifichi un'equazione cartesiana per  $r$  e la giacitura di  $r$ .
- (ii) Si scriva  $\tau$  in forma matriciale e si dica se è vero che  $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ . Verificare che lo spazio vettoriale  $\langle v \rangle$  e la giacitura di  $r$  sono paralleli. Dire che tipo di isometria è  $\tau \circ \sigma$  e determinarne gli eventuali punti fissi.

Sia  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  il piano proiettivo complesso con coordinate proiettive  $[x_0, x_1, x_2]$ .

Sia  $C$  la curva algebrica definita dall'equazione

$$F = x_1^4 + x_0^2 x_1^2 - x_0^2 x_2^2 = 0.$$

- (iii) Si dica se esiste una proiettività che manda  $C$  in una curva algebrica  $D$  con un punto singolare in  $P_1 = [0 : 0 : 1]$  e avente come tangenti principali in  $P_1$  le rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ . In caso affermativo, ricavare una proiettività con queste caratteristiche, dire quanti punti singolari ha  $D$  e qual è la molteplicità di intersezione tra le tangenti principali e  $D$  nei relativi punti singolari. In caso contrario, giustificare adeguatamente la risposta.

### Esercizio 4

Si consideri lo spazio vettoriale euclideo  $V = \mathbb{R}^3$  munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e delle relative coordinate ortonormali  $(x, y, z)$ . Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e sia  $Q$  la forma quadratica rappresentata da  $A$  nella base scelta.

- (i) Si scriva l'espressione polinomiale della forma quadratica  $Q$  in funzione delle variabili  $(x, y, z)$ . Esibire, se esistono, due vettori  $v_+$  e  $v_-$  tali che  $Q(v_+) = 3$  e  $Q(v_-) = -7$ .
- (ii) Si scrivano, se esistono, una matrice  $C \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  e una matrice  $\Delta$  diagonale tali che  $C^T A C = \Delta$  e  $C^T C = I$ .

Sia  $\mathbb{E}^3$  lo spazio euclideo reale su  $V$ . Si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q} = \{P = (x, y, z) \mid Q(x, y, z) + \sqrt{6}(y + z) = 0\}.$$

- (iii) Si scriva un'isometria che riduce  $\mathcal{Q}$  a forma canonica euclidea e la si classifichi.

# Esame scritto di Geometria II

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2014/2015

Appello di settembre 2017

## Esercizio 5

Si consideri lo spazio vettoriale euclideo  $V = \mathbb{R}^3$  munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e delle relative coordinate ortonormali  $(x, y, z)$ . Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e sia  $Q$  la forma quadratica rappresentata da  $A$  nella base scelta.

- (i) Si scriva l'espressione polinomiale della forma quadratica  $Q$  in funzione delle variabili  $(x, y, z)$ . Esibire, se esistono, due vettori  $v_+$  e  $v_-$  tali che  $Q(v_+) = 3$  e  $Q(v_-) = -7$ .
- (ii) Si scrivano, se esistono, una matrice  $C \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  e una matrice  $\Delta$  diagonale tali che  $C^T A C = \Delta$  e  $C^T C = I$ .

Sia  $\mathbb{E}^3$  lo spazio euclideo reale su  $V$ . Si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q} = \{P = (x, y, z) \mid Q(x, y, z) + \sqrt{6}(y + z) = 0\}.$$

- (iii) Si scriva un'isometria che riduce  $\mathcal{Q}$  a forma canonica euclidea e la si classifichi.

## Esercizio 6

Si consideri  $X := [-1, 1]$  e

$$\tau := \{X, \emptyset\} \cup \{A \subseteq X : 0 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : (-1, 1) \subseteq A\}.$$

- Dimostrare che  $(X, \tau)$  è uno spazio topologico la cui topologia non è confrontabile con la topologia euclidea su  $[-1, 1]$ .
- Dimostrare che  $(X, \tau)$  è  $T_0$ .  $(X, \tau)$  è  $T_1$  o  $T_2$ ?
- Determinare l'interno degli insiemi  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $(1/3, 2/3)$  e  $[-1/2, 1/2)$  e la chiusura degli insiemi  $\{0\}$ ,  $\{1/2\}$  e  $\{1\}$ .
- Dire se  $\{1\}$  è una componente connessa di  $X$  e se  $(X, \tau)$  è connesso.

### Soluzione dell'esercizio 1

(i) Esplicitiamo  $t$  dalla prima equazione e sostituiamo nelle altre due

$$t = x - h + 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 2h - 7 - (x - h + 4) \\ z = 10 - 3h + 2(x - h + 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3h - 11 \\ 2x - z = 5h - 18 \end{cases}.$$

(ii) Per rispondere al secondo quesito, consideriamo il sistema formato dall'unione delle equazioni cartesiane delle due rette:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3h-11 \\ 2 & 0 & -1 & 5h-18 \\ 1 & 1 & h+3 & -20 \\ 0 & h+5 & 1 & 2h-1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{array} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3h-11 \\ 0 & -2 & -1 & 4-h \\ 0 & 0 & h+3 & -3h-9 \\ 0 & h+5 & 1 & 2h-1 \end{array} \right) \\ & & R_2 \leftarrow -R_2 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3h-11 \\ 0 & 2 & 1 & h-4 \\ 0 & 0 & h+3 & -3h-9 \\ 0 & 2(h+5) & 2 & 4h-2 \end{array} \right) \\ & & R_4 \leftarrow 2R_4 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3h-11 \\ 0 & 2 & 1 & h-4 \\ 0 & 0 & h+3 & -3h-9 \\ 0 & 2(h+5) & 2 & 4h-2 \end{array} \right) \\ & & R_4 \leftarrow R_4 - (h+5)R_2 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3h-11 \\ 0 & 2 & 1 & h-4 \\ 0 & 0 & h+3 & -3h-9 \\ 0 & 0 & -h-3 & -h^2+3h+18 \end{array} \right) \\ & & R_4 \leftarrow R_4 + R_3 & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3h-11 \\ 0 & 2 & 1 & h-4 \\ 0 & 0 & h+3 & -3h-9 \\ 0 & 0 & 0 & -h^2+9 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Per  $h + 3 \neq 0$  e per  $h^2 - 9 \neq 0$ , la matrice dei coefficienti ha rango 3 e la matrice completa ha rango 4, quindi le rette sono sghembe. Per  $h = -3$ , le ultime due righe della matrice risultano essere nulle, quindi le due rette sono coincidenti. Per  $h = 3$ , invece si annulla solo l'ultima riga, quindi le rette sono incidenti.

(iii) Per quanto calcolato al punto precedente, se  $h \neq \pm 3$ , il più piccolo spazio affine contenente le rette sghembe è tutto lo spazio. Per  $h = -3$ , il più piccolo spazio contenente le due rette (coincidenti) è la retta stessa con equazioni cartesiane  $x + y + 20 = 2x - z + 33 = 0$ . Per  $h = 3$ , le rette incidenti sono contenute in un piano. Per determinarlo, consideriamo il fascio di piani per  $r_2(3)$

$$\lambda(x + y + 6z + 20) + \mu(8y + z - 5) = \lambda x + (\lambda + 8\mu)y + (6\lambda + \mu)z + 20\lambda - 5\mu = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

e imponiamo il passaggio per il punto  $(-1, -1, 1)$  che appartiene a  $r_1(3)$  ma non a  $r_2(3)$ :

$$-\lambda - \lambda - 8\mu + 6\lambda + \mu + 20\lambda - 5\mu = 24\lambda - 12\mu = 0 \Rightarrow \mu = 2\lambda.$$

Il piano cercato ha equazione  $x + 17y + 8z + 10 = 0$ .

### Soluzione dell'esercizio 2

(i) È immediato verificare che  $\mathcal{C} = \{(1, -1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, -1, 2, 0), (0, 0, -2, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ . Dal testo, deduciamo immediatamente le matrici

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f_k) = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 2 & k+3 \\ -k-2 & 0 & -k+1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathbf{Id}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^4, \mathcal{B} & \xrightarrow{M_{\mathcal{B}}(f_k)} & \mathbb{R}^4, \mathcal{B} \\
 \uparrow M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathbf{Id}_4) & \nearrow M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f_k) & \\
 \mathbb{R}^4, \mathcal{C} & & 
 \end{array}$$

deduciamo che

$$M_{\mathcal{B}}(f_k) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f_k) \cdot M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathbf{Id}_4)^{-1}.$$

L'inversa di  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\mathbf{Id}_4)$  è

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$M_{\mathcal{B}}(f_k) = \begin{pmatrix} k+1 & -2 & 0 & k+3 \\ 0 & k-1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Dal momento che un endomorfismo non è iniettivo se, e solo se, 0 è un autovalore (e la dimensione del nucleo è la dimensione dell'autospazio corrispondente), calcoliamo già ora il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}}(f_k) - \lambda \mathbf{Id}_4) = (\lambda - 1)^2(\lambda - k)(\lambda - k + 1).$$

Quindi, se  $k \neq 0$  e  $k - 1 \neq 0$ , l'endomorfismo è iniettivo, mentre per  $k = 0, 1$  l'endomorfismo ha un nucleo di dimensione 1.

(iii) Se  $k$  e  $k - 1$  assumono contemporaneamente valori diversi da 1, l'endomorfismo ha 3 autovalori:

$$\lambda_1 = 1 \text{ con } m_a(1) = 2, \quad \lambda_2 = k \text{ con } m_a(k) = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = k - 1 \text{ con } m_a(k - 1) = 1.$$

Quindi per  $k \neq 1, 2$ , l'endomorfismo  $f_k$  è diagonalizzabile se, e solo se, la molteplicità geometrica di 1 è 2, cioè il rango di  $M_{\mathcal{B}}(f_k) - \mathbf{Id}_4$  è 2. Con la riduzione otteniamo

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{B}}(f_k) - \mathbf{Id}_4 &= \begin{pmatrix} k & -2 & 0 & k+3 \\ 0 & k-2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - kR_4 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 5R_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & k-2 & 0 & 3 \\ 0 & k-2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 R_1 \leftarrow R_1 - R_2 &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

da cui deduciamo che  $f_k$  è diagonalizzabile per  $k = -3$ .

Rimangono da studiare i casi  $k = 1$  e  $k = 2$  nei quali l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3. Il rango dovrebbe scendere a 1, ma è immediato vedere che per  $k = 1$  il rango di

$$M_{\mathcal{B}}(f_1) - \mathbf{Id}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è almeno 2 quindi  $f_1$  non è diagonalizzabile. Con lo stesso ragionamento, si verifica che anche  $f_2$  non è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'esercizio 3** (i) Innanzitutto, possiamo scrivere la funzione  $\sigma$  come un'affinità in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ed indichiamo con  $A$  la matrice

$$A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

e con  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  il vettore

$$w = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Affinché  $\sigma$  rappresenti una riflessione, per il teorema di Chasles, è necessario che sia un'isometria indiretta con una retta di punti fissi (la retta di riflessione). Per verificare che  $\sigma$  è un'isometria indiretta, basta controllare che la matrice  $A$  sia una matrice ortogonale e che abbia determinante  $-1$ , cioè che  $A \in O(2) \setminus SO(2)$ . Calcoliamo quindi:

$${}^t A \cdot A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} \begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = I_2.$$

Allora  $A$  è una matrice ortogonale e si vede facilmente che  $\det(A) = -1$ , allora  $\sigma$  è un'isometria indiretta. Per calcolare la retta di punti fissi basta risolvere le equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix},$$

che corrispondono al sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{13}(5x + 12y + 6) \\ y = \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = 5x + 12y + 6 \\ 13y = 12x - 5y - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 12y - 6 = 0 \\ -12x + 18y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y - 3 = 0 \\ -4x + 6y + 3 = 0. \end{cases}$$

Abbiamo mostrato che vi è una retta  $r$  di punti fissi data dall'equazione cartesiana  $4x - 6y - 3 = 0$ , che ha giacitura  $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ , e pertanto  $\sigma$  è la riflessione rispetto alla retta  $r$ .

(ii) La scrittura matriciale di  $\tau$  è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza  $\tau \circ \sigma$  è descritta da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 6) + 3 \\ \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) + 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 45) \\ \frac{1}{13}(12x - 5y + 17). \end{cases}$$

mentre  $\sigma \circ \tau$  è tale che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{cases} \frac{1}{13} (5(x+3) + 12(y+2) + 6) \\ \frac{1}{13} (12(x+3) - 5(y+2) - 9) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{13} (5x + 15 + 12y + 24 + 6) \\ \frac{1}{13} (12x + 36 - 5y - 10 - 9) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{13} (5x + 12y + 45) \\ \frac{1}{13} (12x - 5y + 17) \end{cases}. \end{aligned}$$

Ciò dimostra che  $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ . La direzione del vettore  $v$  di traslazione è  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , che è la stessa direzione della retta di simmetria, allora i due spazi vettoriali,  $\langle v \rangle$  e la giacitura della retta sono paralleli. Per classificare  $\tau \circ \sigma$ , osserviamo che la matrice dell'affinità associata è sempre la matrice  $A$ . Di conseguenza,  $\tau \circ \sigma$  è un'isometria indiretta. Quindi se abbiamo una retta di punti fissi corrisponderà ad una riflessione, mentre se non ci sono punti fissi avremo una glissoriflessione. I punti fissi sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} 13x = 5x + 12y + 45 \\ 13y = 12x - 5y + 17 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - 12y - 45 = 0 \\ -12x + 18y - 17 = 0, \end{cases}.$$

Si vede facilmente che le due equazioni non sono proporzionali, quindi l'isometria non possiede punti fissi (non ci sono altre alternative) e  $\tau \circ \sigma$  corrisponde ad una glissoriflessione.

- (iii) Consideriamo il piano proiettivo complesso  $\mathbb{P}^2$  con coordinate  $[x_0, x_1, x_2]$  e la curva algebrica rappresentata dal polinomio  $F = x_1^4 + x_0^2 x_1^2 - x_0^2 x_2^2 = 0$ . Il gradiente di  $f$  è

$$\nabla(F) = (2x_0(x_1^2 - x_2^2), 4x_1^3 + 2x_0^2 x_1, -2x_0^2 x_2)$$

e si annulla identicamente solo nei punti

$$P_0 = [1 : 0 : 0] \quad P_2 = [0 : 0 : 1].$$

Deomogeneizziamo rispetto alla variabile  $x_2$  e andiamo a scegliere su  $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$  le coordinate affini  $t_j = x_j/x_2$  con  $j \in \{0, 1\}$  avremo che la traccia affine di  $F$  in  $U_2$  si scrive come

$$f_2 = t_1^4 + t_0^2 t_1^2 - t_0^2 = 0.$$

Questo vuol dire che  $P_2$  è un punto doppio non ordinario: esiste una sola tangente principale alla curva in  $P_2$  che è  $x_0 = 0$ . Inoltre  $I(C, x_0 = 0; P_2) = 4$ .

Se deomogeneizziamo rispetto alla variabile  $x_0$  e scegliamo come coordinate affini per  $U_0 := \{x_0 \neq 0\}$  le variabili  $w_j = x_j/x_0$  con  $j \in \{1, 2\}$  avremo che  $C$  ha per traccia affine la curva

$$f = w_1^4 + w_1^2 - w_2^2 = 0.$$

Da questa scrittura si vede facilmente che  $P_0$  è un nodo semplice con tangenti principali  $x_1 \pm x_2 = 0$ . Entrambe le rette intersecano la curva in  $P_0$  con molteplicità 4.

Questa analisi ci dice che se la proiettività esiste allora deve necessariamente mandare il punto  $P_0$  in  $P_2$  e le rette  $x_1 \pm x_2 = 0$  nelle rette  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ . Una proiettività con queste richieste esiste (ce ne sono infinite!). Vediamo di ricavarne una. Poichè le rette  $x_1 \pm x_2 = 0$  sono identificate da  $P_0$  e da un altro punto su di esse (ad esempio  $P_{\pm} = [0 : 1 : \mp 1] = \mathbb{P}(v_{\pm})$  con  $v_{\pm} = (0, 1, \mp 1)$ ) ci basta scrivere una proiettività  $\psi$  tale che

$$\psi(P_0) = P_2 \quad \psi(P_+) = P_1 \quad \psi(P_-) = P_0$$

(o, in alternativa, tale che  $\psi(P_0) = P_2$   $\psi(P_+) = P_1$   $\psi(P_-) = P_0$ ). Chiamiamo  $A$  la matrice che rappresenta  $\psi$  nelle coordinate assegnate. Se vogliamo che  $P_+$  e  $P_-$  vengano mandati in  $P_1$  possiamo imporre  $Av_+ = e_1$  e  $Av_- = e_0$  (dove  $\{e_0, e_1, e_2\}$  è la base di  $\mathbb{C}^3$  associata alle coordinate  $[x_0, x_1, x_2]$ ). Per linearità avremo

$$2Ae_1 = A(2e_1) = A(v_- + v_+) = e_0 + e_1$$

$$2Ae_2 = A(2e_2) = A(v_- - v_+) = e_0 - e_1.$$

Siccome  $\psi(P_0) = P_2$  possiamo anche chiedere  $Ae_0 = e_2$ . Riassumendo abbiamo scritto la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha determinante diverso da zero e quindi identifica la proiettività

$$\psi([x_0, x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_0]$$

tale che

$$\psi(P_0) = P_2 \quad \psi(P_+) = P_1 \quad \psi(P_-) = P_0.$$

Volendo controllare che la proiettività faccia quello che deve possiamo ricavare l'equazione della conica  $D$  tramite  $\psi$ . Siccome

$$\psi^{-1}([x_0, x_1, x_2]) = [x_2, x_0 + x_1, x_0 - x_1]$$

si avrà

$$D : F' = F(\psi^{-1}([x_0, x_1, x_2])) = (x_0 + x_1)^4 + x_2^2((x_0 + x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2) = (x_0 + x_1)^4 + 4x_0x_1x_2^2 = 0.$$

La traccia affine di  $D$  in  $U_2$  è descritta da  $(t_0 + t_1)^4 + 4t_0t_1 = 0$  che ci permette di verificare facilmente che la proiettività ha fatto quello per cui l'abbiamo costruita.

Non serve fare nessun conto per la descrizione della tipologia dei punti singolari di  $D$  che ci richiede il testo. La conica  $D$  è proiettivamente equivalente a  $C$  quindi la situazione è la stessa di  $C$ :  $D$  avrà esattamente un punto doppio ordinario con tangenti principali che intersecano la curva con molteplicità 4 e esattamente un punto doppio non ordinario con l'unica tangente principale che interseca la curva con molteplicità 4.

#### Soluzione dell'esercizio 4

Se indichiamo con  $(x, y, z)$  le coordinate di  $v$  rispetto alla base canonica avremo

$$Q(v) = Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

Poiché  $A_{11} = 2$  vediamo facilmente che esiste un vettore  $v_+$  tale che  $Q(v_+) = 3$ : basta prendere  $v_+ = \sqrt{3/2}e_1$ . Per le proprietà delle forme quadratiche avremo

$$Q(v_+) = \sqrt{3/2}^2 Q(e_1) = 3.$$

Non è immediato capire se esiste un vettore con  $Q(v_-) = -7$ . Una strada possibile per fugare ogni dubbio è quella di capire la segnatura della forma quadratica. Si vede che il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$p_A(t) = -(t+1)(t-2)(t-3)$$

quindi possiamo concludere che  $A$  è indefinita quindi esiste un vettore  $v_-$  con le caratteristiche richieste. Per esibirne uno ricaviamo l'autospazio  $V_{-1}$ . I vettori nell'autospazio sono quelli che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z = -x \\ -x + 2y - z = -y \\ -x - y = -z \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2y \\ x = y \end{cases} \implies V_{-1} = \langle e_1 + e_2 + 2e_3 \rangle.$$

Si ha

$$Q(e_1 + e_2 + 2e_3) = - \| e_1 + e_2 + 2e_3 \|^2 = -(1 + 1 + 4) = -6,$$

quindi basta porre

$$v_- = \sqrt{7/6}(e_1 + e_2 + 2e_3)$$

per ottenere il vettore che stiamo cercando.

Possiamo ricavare la matrice  $C$  richiesta poichè  $A$  è simmetrica reale e quindi ortodiagonalizzabile per il teorema spettrale reale. Per ricavare  $C$  ricaviamo una base ortonormale (di  $\mathbb{R}^3$ ) composta da autovettori di  $A$ . Procedendo come per  $V_{-1}$  abbiamo

$$V_2 = \langle e_1 + e_2 - e_3 \rangle \quad V_3 = \langle e_1 - e_2 \rangle.$$

Di conseguenza avremo che la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

è ortogonale per costruzione (cioè  $C^T C = I$ ) e soddisfa  $C^T A C = \Delta$  dove  $\Delta$  è diagonale con diagonale formata dagli scalari  $-1, 2$  e  $3$ , in quest'ordine.

Sfruttiamo a nostro vantaggio quanto fatto prima: se definiamo

$$\begin{cases} x_1 = x/\sqrt{6} + y/\sqrt{6} + 2z/\sqrt{6} \\ y_1 = x/\sqrt{3} + y/\sqrt{3} - z/\sqrt{3} \\ z_1 = x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} \end{cases}$$

sappiamo che stiamo considerando un cambio di coordinate ammissibile su  $\mathbb{E}^3$  poichè la matrice associata è un elemento di  $O(3)$ . Questo cambio di coordinate ortogonali (o meglio, il suo inverso), inoltre, ci permette di scrivere in maniera più agevole l'equazione di  $Q$ . L'inversa cercata è

$$\begin{cases} x = x_1/\sqrt{6} + y_1/\sqrt{3} + z_1/\sqrt{2} \\ y = x_1/\sqrt{6} + y_1/\sqrt{3} - z_1/\sqrt{2} \\ z = 2x_1/\sqrt{6} - y_1/\sqrt{3} \end{cases}$$

Sia

$$F(x, y, z) = Q(x, y, z) + \sqrt{6}(y + z)$$

l'equazione della quadrica nelle coordinate  $(x, y, z)$ . Avremo allora

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x(x_1, y_1, z_1), y(x_1, y_1, z_1), z(x_1, y_1, z_1)) = \\ &= -x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 + \sqrt{6} \left( x_1/\sqrt{6} + y_1/\sqrt{3} - z_1/\sqrt{2} + 2x_1/\sqrt{6} - y_1/\sqrt{3} \right) = \\ &= -x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 + 3x_1 - \sqrt{3}z_1. \quad (1) \end{aligned}$$

Nelle coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  si vede quindi facilmente che siamo di fronte a una quadrica a centro con centro di coordinate  $(3/2, 0, \sqrt{3}/6)$ . Se consideriamo i cambi di coordinate

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 3/2 \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = z_1 - \sqrt{3}/6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + 3/2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 + \sqrt{3}/6 \end{cases}$$

avremo

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= [\dots] = -x_2^2 + 2y_2^2 + 3z_2^2 + 3x_2 - \sqrt{3}z_2 = \\ &= -(x_2^2 + 3x_2 + 9/4) + 2y_2^2 + 3(z_2^2 + z_2\sqrt{3}/3 + 1/12) + 3x_2 + 9/2 - \sqrt{3}z_2 - 1/2 = \\ &= -x_2^2 + 2y_2^2 + 3z_2^2 - 9/4 + 1/4 + 9/2 - 1/2 = -x_2^2 + 2y_2^2 + 3z_2^2 + 2 \quad (2) \end{aligned}$$

che quindi ci da un'equazione canonica per la quadrica, cioè

$$\frac{1}{2}x_2^2 - y_2^2 - \frac{3}{2}z_2^2 = 1.$$

Quindi  $\mathcal{Q}$  è non degenera e abbiamo un iperboloide ellittico, cioè un iperboloide a due falde (quello non rigato). Un'isometria che riduce a forma canonica la quadrica è quindi

$$\begin{cases} x_2 = x/\sqrt{6} + y/\sqrt{6} + 2z/\sqrt{6} - 3/2 \\ y_2 = x/\sqrt{3} + y/\sqrt{3} - z/\sqrt{3} \\ z_2 = x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - \sqrt{3}/6 \end{cases}$$

### Soluzione dell'esercizio 5

Si veda la soluzione dell'esercizio 4.

### Soluzione dell'esercizio 6

Siano  $A$  e  $B$  due elementi di  $\tau$  diversi da  $X$  e dal vuoto. Se entrambi contengono  $0$  allora entrambi contengono l'intervallo  $(-1, 1)$  quindi  $(-1, 1) \subset A \cap B$  e l'intersezione apparterrà a  $\tau$ . Se uno dei due non contiene  $0$  allora nemmeno l'intersezione lo contiene. Di conseguenza  $\tau$  è chiuso per intersezioni finite. Sia ora  $\{A_i\}_{i \in I}$  una collezione di elementi di  $\tau$ . Se nessun elemento contiene  $0$  allora l'unione non lo conterrà e apparterrà a  $\tau$ . Se invece esiste  $i$  per cui  $0 \in A_i$  allora

$$(-1, 1) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

che quindi appartiene a  $\tau$ . Questo basta per mostrare che  $\tau$  è una topologia.  $\tau$  non è confrontabile con la topologia euclidea su  $[-1, 1]$  infatti  $[-1, 1)$  è un aperto di  $(X, \tau)$  che non è aperto per la topologia euclidea e  $(-1/2, 1/2)$  è un aperto per la topologia euclidea che non è un elemento di  $\tau$ .

Siccome appartengono a  $\tau$  tutti i sottoinsiemi di  $X$  che non contengono  $0$ , per ogni  $x, y \neq 0$  abbiamo che  $\{x\}$  e  $\{y\}$  sono due aperti disgiunti che contengono rispettivamente  $x$  e  $y$ . Se  $x \neq 0$  e se definiamo  $U := (-1, 1)$  e  $V := \{x\}$  abbiamo che  $U$  e  $V$  sono due aperti che contengono rispettivamente  $0$  e  $x$  e tali che  $0 \notin V$ . Questo mostra che  $(X, \tau)$  è  $T_0$ . Se  $x \neq 0, \pm 1$  si vede anche che non è possibile scegliere  $U$  e  $V$  in modo che di abbia anche  $0 \notin U$ : questo mostra che  $(X, \tau)$  non è  $T_1$  (e quindi nemmeno  $T_2$ ).

Siccome  $\{1\}$  e  $(1/3, 2/3)$  non contengono  $0$ , questi sono aperti e coincidono con il loro interno.  $\{0\}$  non è aperto e, essendo un punto, non può che avere interno vuoto. L'insieme  $[-1/2, 1/2)$  non è aperto perchè contiene  $0$  ma non l'intervallo  $(-1, 1)$ . Il sottoinsieme ottenuto rimuovendo  $0$  è un aperto e coincide con l'interno (per ragioni di massimalità):  $[-1/2, 1/2)^o = [-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$ .

Sia  $C$  un chiuso contenente  $0$  (e diverso da  $X$ ). Allora  $C^c$  è un aperto che non contiene  $0$  e questi sono tutti i sottoinsiemi di  $X$  che non contengono  $0$ . La famiglia dei chiusi che contengono  $0$  coincide quindi con

$$\{A \subseteq X : 0 \in A\}.$$

Se  $C$  è un chiuso che non contiene  $0$  allora il suo complementare è un aperto che contiene  $0$  e quindi, necessariamente, tutto l'intervallo  $(-1, 1)$ . La famiglia dei chiusi che non contengono  $0$  è quindi

$$\{\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \{-1, 1\}\}.$$

In particolare abbiamo mostrato che  $\{0\}$  e  $\{1\}$  sono chiusi (e quindi coincidono con la loro chiusura) mentre  $\{1/2\}$  non lo è.  $\{1/2, 0\}$  è un chiuso e, per ragioni di minimalità, è la chiusura di  $\{1/2\}$ .

Per concludere basta osservare che, come già visto,  $\{1\}$  è sia aperto che chiuso in  $X$ . Da questo concludiamo che è una componente connessa di  $X$  e che  $X$  non è connesso.