Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2015/2016
Appello di febbraio 2017

Esercizio 1
Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_h(e_1) = 2e_1 + (2-h)e_2 + (2+3h)e_3, \quad f_h(e_2) = -e_1 + (2+h)e_2 - 2h\, e_3, \quad f(e_3) = -e_1 - e_2 - e_3,$$

dove h è un parametro reale.

(i) Calcolare per ogni $h \in \mathbb{R}$ la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine di f_h.

(ii) Determinare per quali valori di $h, k \in \mathbb{R}$ il vettore $(0, 1, k)$ appartiene all'immagine di f_h.

(iii) Determinare equazioni parametriche di $U := f_0^{-1}\big((0, 1, \frac{1}{3})\big)$, $V := f_1^{-1}\big((0, 1, -3)\big)$ e $W := f_{-10}^{-1}\big((0, 1, -3)\big)$ nonché del più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ che contiene U e W.

Esercizio 2
Sia $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y + z - 2t, 2x + 4y + 2z + 4t, 4x + 8y + 4z, -t).$$

(i) Calcolare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(ii) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^4$ generato dai seguenti tre vettori $(-3, 1, 1, 0)$, $(0, 1, -2, 0)$, $(-3, -1, 5, 0)$. Si verifichi che W è contenuto nel nucleo di f e si determini se vale l'uguaglianza tra i due sottospazi.

(iii) Stabilire se f è diagonalizzabile. Se lo è, determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori di f, altrimenti, determinarne la forma canonica di Jordan.

Esercizio 3
Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V = \mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ e delle relative coordinate ortonormali (x, y, z). Si consideri la forma quadratica

$$Q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2 - 4xz + 4yz$$

dove a è un parametro reale.

(i) Si scriva la matrice A che rappresenta Q nelle coordinate (x, y, z). Esiste un vettore $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ per cui $Q(x_0, y_0, z_0) = 4/3$? Si dica per quali valori di a è definita positiva.

(ii) Posto $a = -1$, si scrivano, se esistono, una matrice C ortonormale e una matrice Δ diagonale tali che $C^T AC = \Delta$. In caso negativo dimostrare che non esistono.

Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo reale su V. Posto $a = -1$, si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q} = \{P = (x, y, z) \,|\, Q(x, y, z) - 9 = 0\}.$$

(iii) Si scriva la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ e si dica di che tipo di quadrica si tratta.

Esercizio 4
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo complesso munito delle coordinate proiettive $[x_0, x_1, x_2]$. Sia r_∞ la retta proiettiva di equazione $x_0 = 0$ e si consideri il piano affine complesso $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{r_\infty\}$ munito delle coordinate affini (x, y) con $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$. Si consideri la quartica affine $\mathcal{C}$ descritta dall'equazione

$$f(x, y) = x^4 - y^4 + 4y^2 - 16x^2.$$

(i) Dopo avere individuato i punti singolari di $\mathcal{C}$ e della sua chiusura proiettiva si individui la natura di ciascun punto sigolare e le tangenti principali.

(ii) Per ogni tangente t ricavata, calcolare le intersezioni tra t e $\mathcal{C}$ e, in ogni punto di intersezione P, il valore di $I(T, \mathcal{C}, P)$.

(iii) Si scrivano gli asintoti della quartica $\mathcal{C}$ e se ne studino le intersezioni con la quartica.

Soluzione dell'esercizio 1
Il punto (ii) richiede di discutere la compatibilità di un sistema lineare in due parametri h e k la cui matrice dei coefficienti è la matrice associata a f_h rispetto alla base canonica. Scrivo la matrice completa del sistema lineare e opero per righe come segue:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2-h & 2+h & -1 & 1 \\ 2+3h & -2h & -1 & k \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -h & 3+h & 0 & 1 \\ 3h & 1-2h & 0 & k \end{bmatrix}.$$

ho operato due volte sommando ad una riga un multiplo di un altra, operazione che non modifica il determinante. Quindi il determinante dell'operatore f_h è uguale a quello della matrice dei coefficienti del sistema ottenuto, ossia (sviluppando rispetto alla terza e ultima colonna)

$$\det f_h = -1(-h(1-2h) - 3h(3+h))) = h(h+10).$$

Ne deduco le risposte alle prime domande:

i. Se $h \notin \{0, -10\}$, $\det f_h \neq 0$ per cui f_h ha rango 3, e quindi immagine di dimensione 3 e nucleo di dimensione $3-3=0$. Per $h \in \{0,-10\}$ invece $\det f_h = 0$, e quindi il rango è minore di 3. D'altronde il minore 2×2 in alto a destra della matrice ottenuta per eliminazione è uguale a $3+h$ per cui per $h \in \{0,-10\}$ il rango di f_h è 2, e quindi l'immagine ha dimensione 2 e il nucleo dimensione 1.

ii. Ne segue che la risposta è affermativa se $h \notin \{0,-10\}$ qualunque sia k. Se $h = 0$ risolviamo il sistema e troviamo

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -h & 3+h & 0 & 1 \\ 3h & 1-2h & 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

compatibile solo per $k = \frac{1}{3}$. Similmente se $h = -10$ troviamo

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -h & 3+h & 0 & 1 \\ 3h & 1-2h & 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & -7 & 0 & 1 \\ -30 & 21 & 0 & k \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{bmatrix}$$

da cui si deduce immediatamente che il sistema non è compatibile per $k \neq -3$, mentre la compatibilità $k = -3$ segue considerando che il rango di f_{-10} è 2.

iii. Ne segue che U e W sono rette mentre V è un punto.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow U : \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow W : \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

U e W sono quindi due rette incidenti e il più piccolo sottospazio affine che le contiene entrambe è il piano affine di equazioni parametriche

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Infine

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow V : \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'esercizio 2 *(i)* Riducendo la matrice associata a f rispetto alla base canonica mediante operazioni elementari sulle righe otteniamo

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 4 & 2 & 4\\ 4 & 8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

per cui f ha rango 2, e basi del suo nucleo e della sua immagine sono rispettivamente

$$\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\ 4\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

(ii) Per determinare se W è contenuto nel nucleo di f basta verificare che i tre generatori dati di W sono nel nucleo di f e infatti

$$\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\\ 0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-3\\ -1\\ 5\\ 0\end{bmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + \frac{5}{2}\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

Visto che i primi due vettori non sono tra loro proporzionali, W ha almeno dimensione 2; ne segue che W coincide col nucleo di f.

(iii) Il polinomio caratteristico è

$$\det\begin{bmatrix}1-T & 2 & 1 & -2\\ 2 & 4-T & 2 & 4\\ 4 & 8 & 4-T & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1-T\end{bmatrix} = -(T+1)\det\begin{bmatrix}1-T & 2 & 1\\ 2 & 4-T & 2\\ 4 & 8 & 4-T\end{bmatrix} =$$

$$= -(T+1)\left\{(1-T)[(4-T)^2-16] - 2(8-2T-8) + (16-16+4T)\right\} =$$

$$= -(T+1)\left\{(1-T)[T^2-8T]+8T\right\} = (T+1)\left\{T^3-9T^2\right\} = T^2(T+1)(T-9).$$

Quindi gli autovalori sono 9, -1 e 0 di molteplicità algebrica rispettiva 1, 1 e 2. La molteplicità geometrica di 0 è uguale alla nullità, abbiamo già visto essere 2 e quindi f è diagonalizzabile. Inoltre V_9 e V_{-1} hanno dimensione 1 e quindi si calcolano facilmente trovando un vettore non banale nel nucleo della matrice corrispondente.

$$\begin{bmatrix}-8 & 2 & 1 & -2\\ 2 & -5 & 2 & 4\\ 4 & 8 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & -5 & 2 & 0\\ -8 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 8 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2 & -5 & 2 & 0\\ 0 & -18 & 9 & 0\\ 0 & 18 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{bmatrix} \Rightarrow V_9 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\\ 0\end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 2 & 4\\ 4 & 8 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow V_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \right\rangle$$

Quindi una base di autovettori è

$$\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Soluzione dell'esercizio 3

La matrice che rappresenta Q rispetto alla base scelta è l'unica matrice simmetrica che permette di scrivere Q come $Q(x, y, z) = \underline{x}^T A \underline{x}$ ed è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

Dalla matrice o dall'espressione polinomiale della forma quadratica si vede che $Q(e_1) = 1$. Siccome Q è una forma quadratica e $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ basterà prendere $v = (2/\sqrt{3}) \cdot e_1$ per avere $Q(v) = 4/3$. Per vedere se A è definita positiva possiamo vedere quando i minori principali hanno tutti segno positivo. I minori principali sono

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 1 \qquad m_3 = \det(A) = a - 8$$

quindi la matrice sarà definita positiva se e solo se $a - 8 > 0$ cioè se $a > 8$.

Indipendentemente dal valore di a, siccome A è reale e simmetrica le matrici C e Δ richieste esistono per il teorema spettrale reale. Inoltre, se $\{f_1, f_2, f_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta di autovettori di A allora possiamo porre $C = [f_1|f_2|f_3]$ e Δ la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di A (nell'ordine specificato dalla scelta della base). Ricaviamo gli autovalori di A dopo avere posto $a = -1$.

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = t^3 - t^2 - 9t + 9 = (t - 1)(t + 3)(t - 3)$$

quindi gli autovalori saranno 1 e ± 3. Ricaviamo gli autovettori incominciando da quelli relativi a 1:

$$\begin{cases} x - 2z = x \\ y + 2z = y \\ -2x + 2y - z = z \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi una base l'autospazio V_1 è $(1, 1, 0)^T$. Per gli autovettori relativi a 3 avremo

$$\begin{cases} x - 2z = 3x \\ y + 2z = 3y \\ -2x + 2y - z = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ z = y \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

quindi $V_3 = \langle(-1, 1, 1)\rangle$. Similmente si ottiene $V_{-3} = \langle(1, -1, 2)\rangle$. Essendo 3 autovettori associati a 3 autovalori distinti sappiamo che sono ortogonali quindi ci basterà normalizzarli e inserirli come colonne della matrice C per ottenere una matrice ortogonale:

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}. \end{bmatrix}.$$

La matrice Δ corrispondente sarà quindi la matrice diagonale con diagonale $(1, 3, -3)$.

Il luogo descritto dall'equazione $Q(x, y, z) - 9 = 0$ è una quadrica euclidea. Per quanto abbiamo appena mostrato esiste un'isometria di $\mathbb{E}^3$ che modifica il sistema di coordinate in modo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ diventi

$$X^2 + 3Y^2 - 3Z^2 = 9.$$

Quindi la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ è la quadrica

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{3} - \frac{Z^2}{3} = 1$$

che rappresenta un iperboloide iperbolico.

Soluzione dell'esercizio 4

Partiamo dall'equazione della quartica

$$f(x,y) = x^4 - y^4 + 4y^2 - 16x^2$$

e omogeneizziamo per ottenere l'equazione della chiusura proiettiva:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4 + 4x_0^2x_2^2 - 16x_0^2x_1^2.$$

Cerchiamo i punti singolari della chiusura proiettiva annullando il gradiente:

$$\begin{cases} F_{x_0} = 8x_0(x_2^2 - 4x_1^2) \\ F_{x_1} = 4x_1(x_1^2 - 8x_0^2) \\ F_{x_2} = 4x_2(x_2^2 + 2x_0^2). \end{cases}$$

Si nota subito che se $x_0 = 0$ non abbiamo soluzioni (a parte $(0,0,0)$ che non corrisponde a nessun punto nel proiettivo) quindi possiamo studiare il problema direttamente nell'affine. Cerchiamo prima i punti che annullano il gradiente. Questi soddisfano

$$x(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = y(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) = 0$$

ma si vede facilmente che tra i punti che annullano il gradiente, solo il punto $(0,0)$ annulla anche f. Quindi la quartica affine (e lo stesso vale per la sua chiusura proiettiva) hanno un unico punto singolare (rispettivamente $(0,0)$ e $[1,0,0]$).

Le tangenti principali in $P = (0,0)$ si ottengono dal complesso dei monomi di grado minimo in f. Sono le due rette

$$r_1 : y - 2x = 0 \qquad r_2 : y + 2x = 0$$

quindi P è un punto doppio ordinario. Inoltre, siccome

$$f(\pm 2t, t) = 15t^4$$

avremo $I(\mathcal{C}, r_i, P) = 4$ per entrambe le rette. In particolare le rette non intersecano la quartica in altri punti.

I punti all'infinito della quartica sono dati dalle soluzioni di $x_0 = x_1^4 - x_2^4 = 0$ cioè i punti

$$P_\pm = [0,1,\pm 1] \qquad Q_\pm = [0,1,\pm i].$$

Siccome sono 4 punti distinti per il Teorema di Bezout avremo

$$I(\mathcal{C}, r_\infty, P_\pm) = I(\mathcal{C}, r_\infty, Q_\pm) = 1.$$

Le tangenti in questi punti si ottengono facilmente dal gradiente sapendo che

$$\nabla(F)([0,1,b]) = (0, 4, 4b^3).$$

Abbiamo quindi che le quattro tangenti sono

$$x_1 \pm x_2 = 0 \qquad x_1 \pm ix_2 = 0.$$

Di conseguenza $\mathcal{C}$ ha quattro asintoti e le loro equazioni sono

$$x \pm y = 0 \qquad x \pm iy = 0.$$

Questi intersecano la quartica solo nell'origine con molteplicità 2 (poichè $m_{(0,0)}(\mathcal{C}) = 2$ e sono tutti distinti dalle tangenti principali del nodo) nel relativo punto all'infinito (anche qui con molteplicità 2 poichè sono tangenti).