Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2016/2017

31 maggio 2017 - Prova Intermedia

Il candidato dovrà svolgere l'esercizio 3 e un esercizio a scelta tra l'esercizio 1 e l'esercizio 2. Il tempo per la prova è di 2 ore. Durante la prova non è permesso l'uso di appunti e libri.

Esercizio 1
Sia data in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$Q_k(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 2kxz + y^2 + kz^2.$$

Sia B_k la forma bilineare simmetrica associata a Q_k.

(i) Scrivere la matrice A_k associata a Q_k. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, Q_k è non degenere. Per $k \in \{0, 2, 3\}$ ricavare, se possibile, un sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ non banale e isotropo rispetto a B_k.

(ii) Si indichi con c il più piccolo intero per cui B_c risulta un prodotto scalare (*suggerimento: utilizzare il metodo dei minori principali*). In corrispondenza di tale valore, trovare una base ortogonale e diagonalizzante per A_c.

(iii) Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 0 \right\}$. Considerando il prodotto scalare definito da Q_c, calcolare le equazioni cartesiane e parametriche dello spazio $W^\perp$.

Esercizio 2
Si consideri il piano euclideo $\mathbb{E}^2$ con un sistema di coordiante cartesiane ortogonali (x, y). Si consideri il polinomio

$$f_a(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2axy - 8x + 1$$

dove a è un parametro reale e si indichi con $\mathcal{C}_a$ la conica di equazione $f_a(x, y) = 0$.

(i) Si ricavino, al variare di $a \in \mathbb{R}$, le eventuali intersezioni della conica con l'asse x. Si determini la forma canonica affine della conica distinguendo i casi degeneri da quelli non degeneri e le coniche con punti reali da quelle senza punti reali;

(ii) Si ponga $a = 2$. Si scriva la forma canonica euclidea della conica $\mathcal{C}_2$ e un'isometria diretta che la riduce a forma canonica.

Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo reale con coordinate (x, y, z). Si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q} : F(x, y, z) = \frac{5}{\sqrt{5}}(z - 1)^2 + f_2(x + 2, y) = 0.$$

(iii) Si ricavi la forma canonica euclidea e la tipologia della quadrica e si scriva un'isometria che la riduce a forma canonica.

Esercizio 3
Si considerino, sui numeri complessi, il piano affine $\mathbb{A}^2_2$ con coordinate affini (y_0, y_1) e il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Si identifichi $\mathbb{A}^2_2$ con l'insieme $U_2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ con la scelta $y_0 = x_0/x_2$ e $y_1 = x_1/x_2$ Si consideri, in $\mathbb{A}^2_2$, la curva

$$\mathcal{C} : f(y_0, y_1) = 2y_0^2y_1^2 + y_0^2y_1 + y_0^2 - 2y_0y_1^3 - 2y_0y_1 - 4y_1^4 - y_1^3 + y_1^2 = 0$$

e si indichi con $\overline{\mathcal{C}}$ la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$. Si considerino, in $\mathbb{A}^2_2$, i punti

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (1, -1) \quad \text{e} \quad P_3 = (\sqrt{2} - 1, -1).$$

(i) Per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ si ricavi $m_{\mathcal{C}}(P_i)$, le tangenti principali alla curva in P_1 e la molteplicità di intersezione tra ogni tangente principale ricavata e la curva in P_1.

(ii) Si ricavino i punti all'infinito di $\mathcal{C}$ e si dimostri che esattamente uno di essi è singolare. Di che singolarità di tratta? Si ricavino le tangenti principali a $\overline{\mathcal{C}}$ in questo punto.

(iii) Si consideri l'insieme $U_0 = \{P \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\}$ e si identifichi U_0 con lo spazio affine $\mathbb{A}^2_0$ di coordinate (w_1, w_2) tramite le relazioni $w_1 = x_1/x_0$ e $w_2 = x_2/x_0$. Siano $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{L}_0$ le tracce affini (in $\mathbb{A}^2_0$) delle curve $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{L}} : x_0 - x_1 = 0$. Ricavare le equazioni cartesiane delle curve $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{L}_0$, e le intersezioni $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{C}_0$ e $\overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{C}}$.

Soluzione dell'esercizio 1 (i) La matrice A_k associata a Q_k è la matrice:

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & -1 & k \\ -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix}$$

Questa forma quadratica è non degenere se $\mathrm{Rk}(Q_k) = \mathrm{Rk}(A_k) = 3$, cioè se $\mathrm{Det}(A_k) \neq 0$. Quindi, dato che $\mathrm{Det}(A_k) = k(2-k)$, la forma quadratica Q_k è non degenere se $k \neq 0$ e $k \neq 2$.

Per $k = 0$ e $k = 2$ la forma quadratica è degenere, quindi sappiamo che esiste almeno un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ tale che $Q_k(\mathbf{v}) = 0$, cioè $\mathbf{v}$ isotropo. Per questi casi basta porre $V = \mathrm{Ker}(A_k)$ per avere il sottospazio cercato. Siccome il rango di A_k è sempre almeno 2, avremo inoltre che $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Rk}(Q_k) + \mathrm{Dim}(V)$ da cui $\mathrm{Dim}(V) = 3 - 2 = 1$. Avremo quindi

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nel caso $k = 3$ non possiamo procedere allo stesso modo. Operiamo un completamento dei quadrati in modo da scrivere la forma quadratica in modo più semplice possibile (cioè in modo che sia in forma diagonale). Poichè

$$\begin{aligned} Q_3(x, y, z) &= 3x^2 - 2xy + y^2 + 6xz + 3z^2 = \\ &= 2x^2 + (x^2 - 2xy + y^2) + 3(z^2 + 2xz + x^2 - x^2) = \\ &= -x^2 + (x - y)^2 + 3(x + z)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

ci accorgiamo quindi che la forma quadratica è indefinita quindi esiste un vettore isotropo (non nullo). Per ricavarne uno possiamo, ad esempio, risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} .$$

Per $k = 3$ possiamo quindi porre

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(ii) Per trovare il più piccolo intero tale che A_k è un prodotto scalare, utilizziamo i minori principali della matrice: se tutti i minori principali della matrice sono positivi allora A_k è un prodotto scalare. In questo caso i minori principali sono:

$$3 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & k \\ -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & k \end{vmatrix} = \mathrm{Det}(A_k) = k(2-k) > 0 \Longleftrightarrow 0 < k < 2,$$

allora l'unico intero possibile tra 0 e 2 esclusi è $c = 1$. Dobbiamo quindi diagonalizzare la matrice simmetrica

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Iniziamo, calcolando il polinomio caratteristico di A_1:

$$P(\lambda) = |A_1 - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda + 1.$$

Questo polinomio ha come radici $\{1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$, che sono quindi gli autovalori per la matrice A_1. Inoltre, dato che ogni autospazio ha dimensione 1, gli autovettori corrispondenti sono automaticamente ortogonali rispetto il prodotto scalare standard. Consideriamo ora i singoli autospazi e cerchiamo gli autovettori:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$V_{2+\sqrt{3}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} (1-\sqrt{3})x - y + z \\ -x - (1+\sqrt{3})y = 0 \\ x - (1+\sqrt{3})z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x = (1+\sqrt{3})z \\ y = -z \end{cases} \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$V_{2-\sqrt{3}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} (1+\sqrt{3})x - y + z \\ -x - (1-\sqrt{3})y = 0 \\ x - (1-\sqrt{3})z = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x = (1-\sqrt{3})z \\ y = -z \end{cases} \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Quindi una base diagonalizzante ed ortogonale per A_1 è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iii) Innanzitutto troviamo una base per W:

$$x - 2y + z = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases},$$

allora $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Sappiamo quindi, dato che W è non degenere, che

$$\mathrm{Dim}(W) + \mathrm{Dim}(W^\perp) = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^3),$$

cioè $\mathrm{Dim}(W^\perp) = 1$. Per trovare il vettore che genera $W^\perp$, imponiamo che il prodotto scalare rispetto A_1 sia nullo in entrambi i casi:

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| (2,1,0)A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1,0,1)A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

cioè le sue equazioni cartesiane sono:

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} 5x - y + 2z = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \right\},$$

mentre la sua forma parametrica (imponendo $x = t$) è

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \qquad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = -3t \end{cases} \right\}.$$

Soluzione dell'esercizio 2

Ricaviamo le intersezioni con l'asse x. Poichè

$$f_a(x,0) = x^2 - 8x + 1 = (x - 4 + \sqrt{15})(x - 4 - \sqrt{15})$$

i punti cercati sono, per ogni valore di a, i punti

$$P_\pm = (4 \pm \sqrt{15}, 0).$$

Scriviamo la matrice rappresentativa della conica

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -4 & 0 \\ \hline -4 & 1 & -a \\ 0 & -a & 4 \end{array}\right]$$

e vediamo quando è degenere. Poichè $\mathrm{Det}(A) = -a^2 - 60 = 0$ non ha soluzioni reali concludiamo che la conica è sempre non degenere. Il determinante della matrice A_0 è $4 - a^2$ quindi la conica è una parabola per $a = \pm 2$, un'ellisse per $a \in (-2, 2)$ e un'iperbole nei casi rimanenti. Siccome abbiamo ricavato dei punti di $\mathbb{E}^2$ che appartengono alla conica per ogni valore di a, concludiamo che la conica è sempre a punti reali. Quindi, la forma canonica affine della conica è

$$\mathcal{D} : \begin{cases} a = \pm 2 & y - x^2 = 0 \\ a \in (-2,2) & x^2 + y^2 = 1 \\ |a| > 2 & x^2 - y^2 = 1. \end{cases}$$

Poniamo $a = 2$. Poichè la traccia di A_0 è 5 e il suo determinante è 0, concludiamo che i suoi autovalori sono 0 e 5. Un veloce conto mostra che gli autospazi sono

$$V_0 = \langle (2,1)^T \rangle \qquad \text{e} \qquad V_0 = \langle (-1,2)^T.$$

Di conseguenza la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

identifica una rotazione R che permette di scrivere l'equazione di $\mathcal{C}_a$ senza usare il monomio xy. Infatti, se

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 + 2y_1) \end{cases}$$

si ha

$$
\begin{aligned}
f_a = x^2 + 4y^2 - 4xy - 8x + 1 = \\
&= \frac{1}{5}\left((2x_1 - y_1)^2 + 4(x_1 + 2y_1)^2 - 4(2x_1 - y_1)(x_1 + 2y_1)\right) - \frac{8}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1) + 1 = \\
&= \frac{1}{5}\left((4 + 4 - 8)x_1^2 + y_1^2(1 + 16 + 8) + x_1y_1(-4 + 16 - 12)\right) - \frac{8}{\sqrt{5}}(2x_1 - y_1) + 1 = \\
&= 5y_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 + 1. \quad (2)
\end{aligned}
$$

Completiamo il quadrato in y_1 (ricordandoci che vogliamo fare in modo che la trasformazione finale sia un'isometria)

$$
\begin{aligned}
f_a = x^2 + 4y^2 - 4xy - 8x + 1 = [...] = 5y_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 + 1 = \\
&= 5\left(y_1^2 + 2\frac{4}{5\sqrt{5}}y_1\right) - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1 + 1 = 5\left(y_1^2 + 2\frac{4}{5\sqrt{5}}y_1 + \frac{16}{125} - \frac{16}{125}\right) - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1 + 1 = \\
&= 5\left(y_1 + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{9}{25} = 5\left(y_1 + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}\left(x_1 - \frac{\sqrt{5}}{16}\frac{9}{25}\right) = \\
&= 5\left(y_1 + \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{16\sqrt{5}}{5}\left(x_1 - \frac{9}{16 \cdot 5\sqrt{5}}\right) = 5y_2^2 - \frac{16\sqrt{5}}{5}x_2 \quad (3)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo posto

$$
T : \begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{9}{80\sqrt{5}} \\ y_2 = y_1 + \frac{4}{5\sqrt{5}}. \end{cases}
$$

Avremo quindi che dopo avere effettuato la rotazione R e la traslazione T avremo trasformato la conica in

$$
x_2 - \frac{25}{16\sqrt{5}}y_2^2 = 0,
$$

che è in forma canonica. L'isometria ricavata è quindi data dalla trasformazione

$$
F : \begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{9}{80\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) - \frac{9}{80\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x + y - \frac{9}{80}\right) \\ y_2 = y_1 + \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y) + \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-x + 2y + \frac{4}{5}\right). \end{cases}
$$

Consideriamo la quadrica $\mathcal{Q}$. Si vede chiaramente che tramite la traslazione

$$
T' : \begin{cases} x_0 = x + 2 \\ y_0 = y \\ z_0 = z - 1 \end{cases}
$$

trasformiamo l'equazione di $\mathcal{Q}$ nell'equazione

$$
\frac{5}{\sqrt{5}}z_0^2 + f_2(x_0, y_0) = 0
$$

Dai conti fatti prima sappiamo che la trasformazione

$$
G : \begin{cases} x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x_0 + y_0 - \frac{9}{80}\right) \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-x_0 + 2y_0 + \frac{4}{5}\right) \\ z_2 = z_0 \end{cases}
$$

è un'isometria ed è tale che

$$F=\frac{5}{\sqrt{5}}(z-1)^2+f_2(x+2,y)=\frac{5}{\sqrt{5}}z_0^2+f_2(x_0,y_0)=\frac{5}{\sqrt{5}}z_2^2+5y_2^2-\frac{16\sqrt{5}}{5}x_2.$$

Di consequenza l'isometria

$$G':\begin{cases} x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2(x+2)+y-\frac{9}{80}\right)\\ y_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-(x+2)+2y+\frac{4}{5}\right)\\ z_2=z-1\end{cases}$$

permette di ridurre la quadrica assegnata alla forma canonica

$$\frac{5}{16}z_2^2+\frac{25}{16\sqrt{5}}y_2^2-x_2=0$$

da cui si deduce facilmente che $\mathcal{Q}$ è un paraboloide ellittico (la cui forma canonica affine è $X^2+Y^2-Z=0$).

Soluzione dell'esercizio 3

Il punto P_1 è l'origine quindi possiamo facilmente ricavare la sua molteplicità semplicemente osservando l'equazione della curva. Il complesso dei monomi di grado minimo è

$$y_0^2-2y_0y_1+y_1^2=(y_0-y_1)^2$$

e ha grado 2 quindi $m_{\mathcal{C}}(P_1)=2$ ed esiste un'unica tangente principale alla curva nel punto P_1, la retta di equazione $r: y_0-y_1=0$. Poichè vale $f(t,t)=-4t^4$ concludiamo che $I(\mathcal{C},r;P_1)=4$ (e quindi P_1 è un tacnodo).

Poichè $f(P_2)=4$ si ha $m_{\mathcal{C}}(P_2)=0$. Si ha invece $f(P_3)=0$ quindi la molteplicità in P_3 è almeno 1. Scriviamo il gradiente di f e controlliamo se si annulla per capire se la molteplicità è 1 o più alta. Abbiamo

$$\nabla(f)=(4y_0y_1^2+2y_0y_1+2y_0-2y_1^3-2y_1,4y_0^2y_1+y_0^2-6y_0y_1^2-2y_0-16y_1^3-3y_1^2+2y_1)$$

e si vede facilmente che

$$(f_x)|_{P_3}=(2y_0(2y_1^2+y_1+1)-2y_1(y_1^2+1))|_{P_3}=(2y_0(2-1+1)+2(1+1))|_{P_3}\neq 0$$

quindi P_3 è un punto non degenere: $m_{\mathcal{C}}(P_3)=1$.

Passiamo alla scrittura proiettiva omogeneizzando l'equazione

$$F:=2x_0^2x_1^2-2x_0x_1^3-4x_1^4+x_0^2x_1x_2-x_1^3x_2+x_0^2x_2^2-2x_0x_1x_2^2+x_1^2x_2^2$$

e poi, intersechiamo con la retta all'infinito $x_2=0$. Siccome

$$F(x_0,x_1,0)=2x_0^2x_1^2-2x_0x_1^3-4x_1^4=2x_1^2(x_0^2-x_0x_1-2x_1^2)=-2x_1^2(x_0+x_1)(x_0-2x_1)$$

I punti all'infinito della curva sono

$$Q_0=[1,0,0]\quad Q_1=[-1,1,0]\quad Q_2=[2,1,0].$$

Se due di questi tre punti fossero singolari sarebbe violato il teorema di Bezout in quanto

$$4=\mathcal{I}(\overline{\mathcal{C}},x_2=0;Q_0)+\mathcal{I}(\overline{\mathcal{C}},x_2=0;Q_1)+\mathcal{I}(\overline{\mathcal{C}},x_2=0;Q_2)\geq 2+2+1=5.$$

Dimostriamo che Q_0 è singolare. Deomogeneizziamo rispetto alla variabile x_0 (quindi scrivendo l'equazione f_0 della curva $\mathcal{C}_0$ che ci servirà dopo):

$$f_0=-4w_1^4-w_1^3w_2-2w_1^3+w_1^2w_2^2-2w_1w_2^2+2w_1^2+w_1w_2+w_2^2.$$

Di conseguenza, il punto $(0,0)$ è un punto doppio per $\mathcal{C}_0$ (si poteva anche capire dal fatto che x_0 compare al più con esponente 2 nell'equazione quartica). Il complesso dei monomi di grado minimo di f_0 è $2w_1^2 + w_1w_2 + w_2^2$ e ha disciminante uguale a -7: concludiamo che l'origine è un punto doppio ordinario. Più precisamente, siccome

$$2w_1^2 + w_1w_2 + w_2^2 = 2\left(w_2 + \frac{1+i\sqrt{7}}{4}w_1\right)\left(w_2 + \frac{1-i\sqrt{7}}{4}w_1\right)$$

ricaviamo facilmente le equazioni delle due rette. Omogeneizzandole otteniamo le espressioni delle tangenti principali in Q_1:

$$r_+ : x_2 + \frac{1+i\sqrt{7}}{4}x_1 = 0 \qquad r_- : x_2 + \frac{1-i\sqrt{7}}{4}x_1 = 0.$$

Abbiamo già visto come la retta proiettiva $x_0 - x_1 = 0$ interseca la curva nella carta affine U_2: si tratta infatti proprio della chiusura proiettva della tangente nel punto P_1. Di conseguenza,

$$I(\overline{\mathcal{C}}, x_0 - x_1 = 0; [0,0,1]) = 4,$$

il punto $[0,0,1]$ è l'unico punto di intersezione tra le due chiusure proiettive e le due curve affini non si intersecano in nessun punto. A conferma di ciò, l'equazione di $\mathcal{L}_0$ è $1 - w_1 = 0$ e si vede facilmente che $f_0(1, w_2) = -4$.