Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016/2017

6 Febbraio 2017 – Prova Intermedia

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $g_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$g_h\big((1,0,0)\big) = (h,0,1), \quad g_h\big((0,1,0)\big) = (0,-3h,-1), \quad g_h\big((0,0,1)\big) = (h^2-h, h^2-h, h-1).$$

(i) Determinare una base del nucleo e dell'immagine di g_h per ogni $h \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare per ogni $h \in \mathbb{R}$, le equazioni parametriche del sottospazio affine U_h definito da

$$g_h\big((x,y,z)\big) = (3, -2h-7, 0)$$

(iii) Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$, il sottospazio affine U_h è contenuto nel piano

$$\alpha : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Determinare le equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine contente U_h e la retta

$$r : \begin{cases} x - z = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri l'endomorfismo $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ descritto dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & k & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & -3 & k^2+3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo f_k e determinare la loro molteplicità algebrica e geometrica per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo è diagonalizzabile e, in questi casi, esibire una base diagonalizzante.

(iii) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dagli autovettori di f_{-1} e sia $V \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dagli autovettori di f_0. Determinare una base di $U + V$ e di $U \cap V$. Se $U + V$ è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$, completare la base di $U + V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione 1. La matrice associata all'applicazione lineare g_h è

$$M_h = \begin{pmatrix} h & 0 & h^2-h \\ 0 & -3h & h^2-h \\ 1 & -1 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il nucleo di g_h determinando le soluzioni del sistema lineare omogeneo definito da M_h:

$$\begin{pmatrix} h & 0 & h^2-h \\ 0 & -3h & h^2-h \\ 1 & -1 & h-1 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & h-1 \\ 0 & -3h & h^2-h \\ h & 0 & h^2-h \end{pmatrix} R_3 \leftrightarrow R_3 - hR_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & h-1 \\ 0 & -3h & h^2-h \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$
$$R_2 \leftrightarrow R_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & h-1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & -3h & h^2-h \end{pmatrix} R_3 \leftrightarrow R_3 + 3R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & h-1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h^2-h \end{pmatrix}.$$

Per $h \neq 0, 1$, il nucleo $N(g_h)$ contiene solo il vettore nullo, quindi $\mathcal{B}_{N(g_h)} = \emptyset$. Per il teorema di nullità più rango, in questo caso l'applicazione lineare è suriettiva, quindi possiamo prendere come base dell'immagine una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$. Passiamo ora ai casi speciali.

($h = 0$) Il rango della matrice M_0 è 1, quindi il nucleo ha dimensione 2, in particolare

$$N(g_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\} = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle.$$

L'immagine di g_0 ha dimensione 1 ed è generata da

$$\mathrm{im}(g_0) = \langle g_0((1, 0, 0)), g_0((0, 1, 0)), g_0((0, 0, 1)) \rangle = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

($h = 1$) Il rango della matrice M_1 è 2, quindi il nucleo ha dimensione 1,

$$N(g_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = y = 0\} = \langle (0, 0, 1) \rangle.$$

L'immagine di g_1 ha dimensione 2 ed ha come base

$$\mathrm{im}(g_1) = \langle g_1((1, 0, 0)), g_1((0, 1, 0)) \rangle = \langle (1, 0, 1), (0, -3, -1) \rangle$$

(è sufficiente considerare una qualsiasi coppia di immagini di vettori della base canonica linearmente indipendenti).

(ii) Dobbiamo risolvere il sistema lineare $M_h(x, y, z)^T = (3, -2h - 7, 0)$. Per $h \neq 0, 1$, il sistema avrà un'unica soluzione quindi U_h sarà un punto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} h & 0 & h^2-h & 3 \\ 0 & -3h & h^2-h & -2h-7 \\ 1 & -1 & h-1 & 0 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h-1 & 0 \\ 0 & -3h & h^2-h & -2h-7 \\ h & 0 & h^2-h & 3 \end{array}\right)$$
$$R_3 \leftrightarrow R_3 - hR_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h-1 & 0 \\ 0 & -3h & h^2-h & -2h-7 \\ 0 & h & 0 & 3 \end{array}\right)$$
$$R_2 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h-1 & 0 \\ 0 & h & 0 & 3 \\ 0 & -3h & h^2-h & -2h-7 \end{array}\right)$$
$$R_3 \leftrightarrow R_3 + 3R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h-1 & 0 \\ 0 & h & 0 & 3 \\ 0 & 0 & h^2-h & -2h+2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2 \leftrightarrow \frac{1}{h}R_2 \\ R_3 \leftrightarrow \frac{1}{h^2-h}R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & h-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{h} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{h} \end{array}\right)$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_2 - (h-1)R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2h+1}{h} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{h} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{h} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{2h+1}{h} \\ y = \frac{3}{h} \\ z = -\frac{2}{h} \end{cases}$$

Per $h = 0$, il sistema è impossibile quindi $U_0 = \emptyset$, mentre per $h = 1$ abbiamo una retta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}.$$

(iii) Determiniamo l'equazione cartesiana che definisce il piano α:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t + s \\ z = t + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ -x + y = -4 + t + s \\ z = t + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x - y + z - 4 = 0.$$

Per $h \neq 0, 1$, U_h è un punto, quindi sostituiamo le sue coordiante nell'equazione:

$$\frac{2h+1}{h} - \frac{3}{h} - \frac{2}{h} - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2h - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = -2.$$

Per $h = 1$, la retta U_1 non giace sul piano, infatti ad esempio il punto $(3, 3, 0) \in U_1$ non è contenuto in α $(3 - 3 - 4 \neq 0)$.

(iv) Nel caso $h \neq 0, 1$, se il punto U_h appartiene alla retta r, la retta è il più piccolo spazio che contiene entrambi (vale anche per $h = 0$ perché $U_0 = \emptyset$), altrimenti il più piccolo spazio contenente U_h e r è un piano. Sostituendo nelle equazioni di r le coordinate di U_h otteniamo

$$\begin{cases} \frac{2h+1}{h} + \frac{2}{h} = 0 \\ 3\frac{2h+1}{h} - \frac{3}{h} - 2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2h+1+2}{h} = 0 \\ \frac{6h+3-3-2h}{h} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2h+3}{h} = 0 \\ \frac{4h}{h} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nexists h \text{ t.c. } U_h \in r.$$

Consideriamo allora il fascio di piani per r

$$\lambda(x - z) + \mu(3x - y - 2) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

e determiniamo l'unico piano del fascio passante per U_h:

$$\lambda\frac{2h+3}{h} + \mu 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{2h+3}{4h}\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{2h+9}{4h}x - \frac{2h+3}{4h}y + z - \frac{2h+3}{2h} = 0.$$

Per $h = 1$, studiamo la posizione reciproca delle rette U_1 e r. Il determinante della matrice del sistema formato dalle equazioni di U_1 e dalle equazioni di r

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

ha rango 4 quindi le rette sono sghembe e il più piccolo spazio affine contenente entrambe è $\mathbb{R}^3$.

Soluzione 2. *(i)* Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda\mathbf{I}) &= \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & k & 0 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & -3-\lambda & k^2+3 \\ -1 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \\
&= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & -3 \\ k-1 & -3-\lambda & k^2+3 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \\
&= (1-\lambda)(-3-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \\
&= (1-\lambda)(-3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3) = (\lambda-1)^2(\lambda+3)^2.
\end{aligned}$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ con molteplicità algebrica $m_a(1) = m_a(-3) = 2$. Per determinare la molteplicità geometrica calcoliamo il rango delle matrici $A-\mathbf{I}$ e $A+3\mathbf{I}$ (ricordando che $m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i} = 4 - r(A-\lambda_i\mathbf{I})$). Riduciamo per righe la matrice $A-\mathbf{I}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & k & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & -4 & k^2+3 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ k-1 & 0 & -4 & k^2+3 \\ -3 & k & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 + (k-1)R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-k & -4 & k^2-k+4 \\ 0 & k+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo che

$$r(A-\mathbf{I}) = \begin{cases} 3, & k+3 \neq 0, \\ 2, & k+3 = 0, \end{cases} \implies m_g(1) = \begin{cases} 1, & k \neq -3, \\ 2, & k = -3. \end{cases}$$

Passiamo alla matrice $A+3\mathbf{I}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 & k^2+3 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftarrow \frac{1}{4}R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - (k-1)R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2+k & 0 & k^2+3k \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \leftarrow R_3 + (k^2-k)R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - (k-1)R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^2+3k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo

$$r(A+3\mathbf{I}) = \begin{cases} 3, & k^2+3k \neq 0, \\ 2, & k^2+3k = 0, \end{cases} \implies m_g(-3) = \begin{cases} 1, & k \neq 0,-3, \\ 2, & k = 0,-3. \end{cases}$$

(ii) Dal punto precedente, deduciamo che $k = -3$ è l'unico caso in cui l'operatore f_k è diagonalizzabile. Calcoliamo una base degli autospazi:

$(\lambda = 1)$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \alpha + 4\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \langle (-1,1,1,0), (-1,0,4,1) \rangle.$$

$(\lambda = -3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_{-3} = \langle (0,0,1,0), (3,0,0,1) \rangle.$$

Quindi, una base diagonalizzante è data da

$$\{(-1,1,1,0), (-1,0,4,1), (0,0,1,0), (3,0,0,1)\}.$$

(iii) Dallo studio fatto al punto *(i)*, sappiamo che $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$. Calcoliamo esplicitamente gli autovettori nei casi $k = -1$ e $k = 0$.

$(k = -1)$ Gli autovettori con autovalore 1 sono

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow -R_1 \\ \frac{1}{2}R_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ \\ R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \frac{3}{2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mentre gli autovettori con autovalore -3 sono

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che $U = \langle (-2,0,3,2), (0,0,1,0) \rangle$.

$(k = 0)$ Gli autovettori con autovalore 1 sono

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow -R_1 \\ R_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ \\ R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quelli con autovalore -3 sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui deduciamo che $V = \langle (-1,0,1,1), (0,0,1,0), (3,0,0,1) \rangle$.

Osserviamo subito che $\langle (0,0,1,0) \rangle \subset U \cap V$. Inoltre, anche il secondo vettore della base di U è contenuto in V:

$$(-2,0,-3,2) = 2(-1,0,1,1) - 5(0,0,1,0)$$

Quindi, $U + V = V$ e $U \cap V = U$ da cui

$$\mathcal{B}_{U+V} = \{(-1,0,1,1), (0,0,1,0), (3,0,0,1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_{U \cap V} = \{(-2,0,-3,2), (0,0,1,0)\}\,.$$

Infine, per completare la base di $U + V$ ad una base di $\mathbb{R}^4$ è sufficiente considerare un qualsiasi vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_2 \neq 0$, ad esempio $(0,1,0,0)$.