La matematica dello spazio
le diverse geometrie

Marco Andreatta

Dipartimento di Matematica, Università di Trento

MUSE, Museo delle Scienze di Trento

le radici...

Platone,
Atene 427-347 a.C.

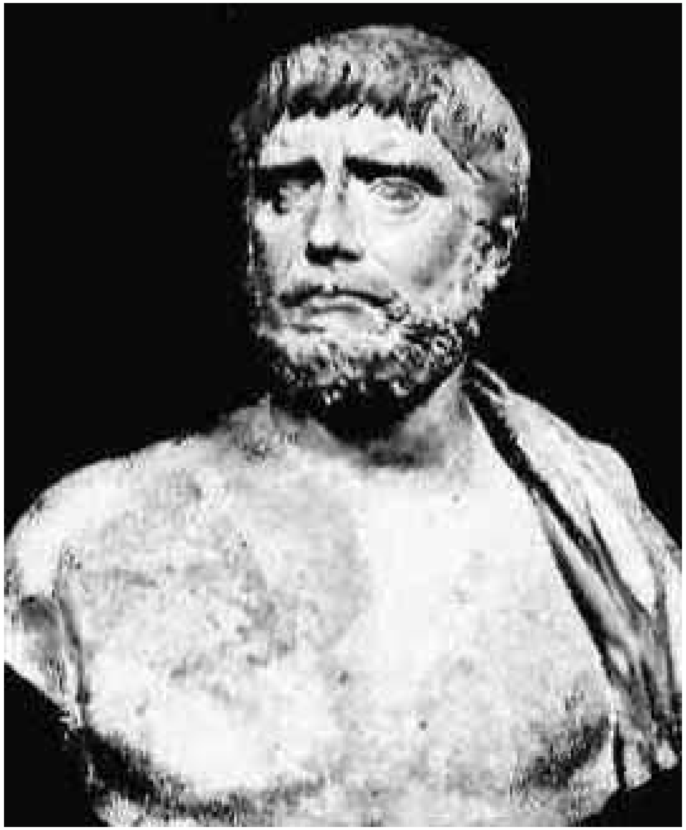
le radici...

...le opinioni vere ... s'incatenino con un ragionamento fondato sulla causalitá, in questo consiste l' anamnesi, quella reminescenza su cui sopra abbiamo convenuto.

Se collegate, esse dapprima divengono scienza e, quindi, cognizioni stabili.
Ecco perché la scienza vale piú della retta opinione: la differenza tra scienza e retta opinione sta, appunto, nel collegamento.

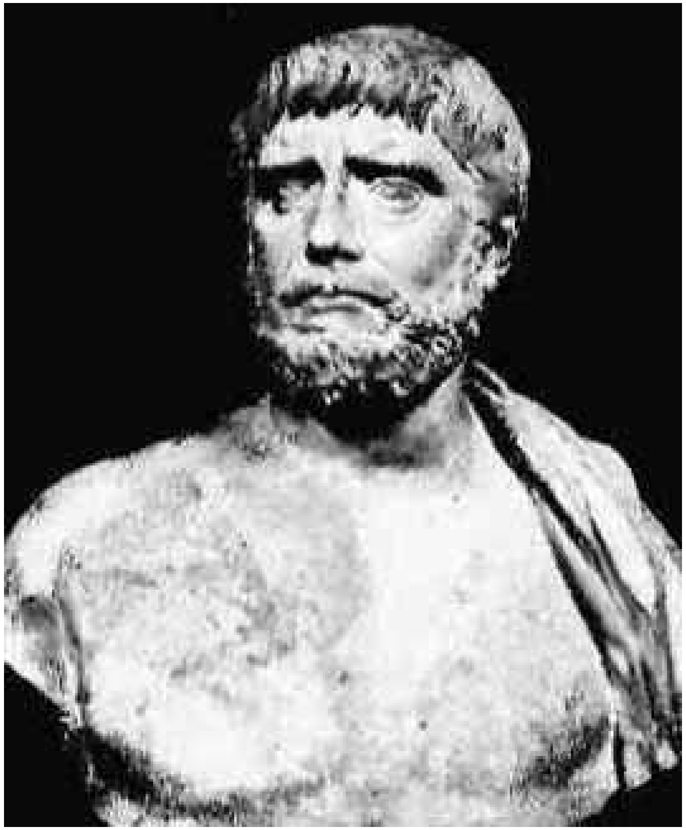
Platone,
Atene 427-347 a.C.

Il primo: filosofo, matematico...



Talete, Mileto 624-547 a.C.

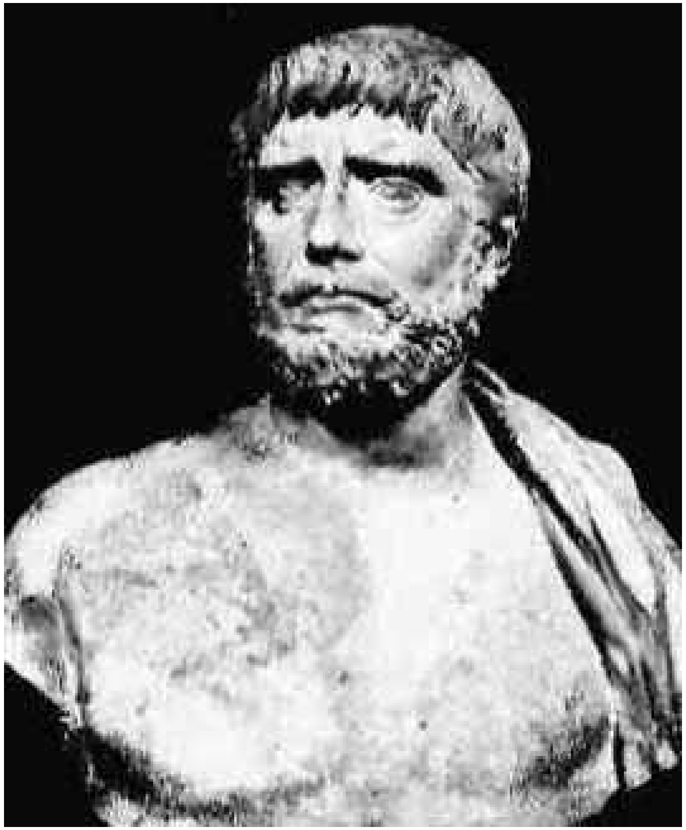
Il primo: filosofo, matematico...



Filosofia: tutto viene dall'acqua

Talete, Mileto 624-547 a.C.

Il primo: filosofo, matematico...



Filosofia: tutto viene dall'acqua

Matematica: la retta,..., teoremi

Talete, Mileto 624-547 a.C.

e poi molti altri.

Prima ancora: egiziani, babilonesi,...

e poi molti altri.

Prima ancora: egiziani, babilonesi,...
discepoli diretti furono Anassimandro e Pitagora

e poi molti altri.

Prima ancora: egiziani, babilonesi,...
discepoli diretti furono Anassimandro e Pitagora
e poi Anassagora, Empedocle, Zenone, Democrito,
Eudosso, Menacmo, Archimede, Apollonio, Diocle,..,

e poi molti altri.

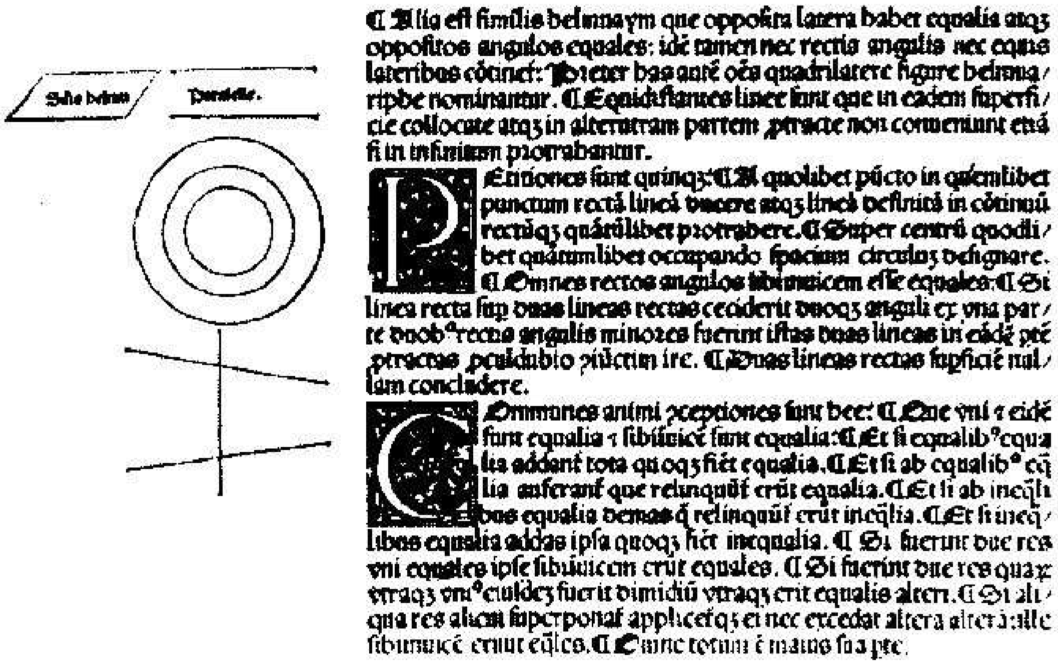
Prima ancora: egiziani, babilonesi,...
discepoli diretti furono Anassimandro e Pitagora
e poi Anassagora, Empedocle, Zenone, Democrito,
Eudosso, Menacmo, Archimede, Apollonio, Diocle,..,
Euclide Alessandria 325-265 a.C.

il libro dei libri

Euclide scrive gli "Elementi": una sorta di enciclopedia formata da tredici libri.

il libro dei libri

Euclide scrive gli ”Elementi”: una sorta di enciclopedia formata da tredici libri.



¶ Alia est similis helmuaym que opposita latera habet equalia atq; oppositos angulos equales: idē tamen nec rectis angulis nec equis lateribus cōtinet: Preter has autē oēs quadrilatere figure helmuaripbe nominantur. ¶ Equidistantes linee sunt que in eadem superficie collocate atq; in alterutram partem protracte non conveniunt etiā si in infinitum protrahantur.

Petitiones sunt quinq;: ¶ A quolibet pūcto in quēlibet punctum rectā lineā ducere atq; lineā definitā in cōtinuū rectāq; quātālibet protrahere. ¶ Super centrū quodlibet quātumlibet occupando spacium circulū designare. ¶ Omnes rectos angulos sibimuicem esse equales. ¶ Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoq; anguli ex una parte duob⁹ rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eādē ptē protractas procul dubio cōiūctum iri. ¶ Duas lineas rectas supficiē nullam concludere.

Communes animi conceptiones sunt hee: ¶ Que uni et eidē sunt equalia et sibiinuicē sunt equalia. ¶ Et si equalib⁹ equalia addant tota quoq; fiēt equalia. ¶ Et si ab equalib⁹ equalia auferant que relinquūt erūt equalia. ¶ Et si ab inequalibus equalia demas q̄ relinquūt erūt inequalia. ¶ Et si inequalibus equalia addas ipsa quoq; fiēt inequalia. ¶ Si fuerint due res uni equales ipse sibiinuicem erūt equales. ¶ Si fuerint due res quarum utraq; uni⁹ eiusdēq; fuerit dimidiū utraq; erit equalis alteri. ¶ Si aliqua res alicui superponat applicetq; ei nec excedat altera alterā ille sibiinuicē erunt equales. ¶ Omne totum ē maius sua pte.

la pagina dell’edizione del 1482 con il quinto postulato

La Geometria

Nei primi sei libri degli Elementi troviamo formalizzata una teoria, la Geometria, costituita da

La Geometria

Nei primi sei libri degli Elementi troviamo formalizzata una teoria, la Geometria, costituita da
Oggetti, definiti a priori, tramite assiomi o postulati, e da un

La Geometria

Nei primi sei libri degli Elementi troviamo formalizzata una teoria, la Geometria, costituita da
Oggetti, definiti a priori, tramite assiomi o postulati, e da un
Metodo, logico deduttivo che si basa su quelle che Euclide chiama nozioni comuni.

La Geometria

Nei primi sei libri degli Elementi troviamo formalizzata una teoria, la Geometria, costituita da
Oggetti, definiti a priori, tramite assiomi o postulati, e da un
Metodo, logico deduttivo che si basa su quelle che Euclide chiama nozioni comuni.

Proviamo dunque a fare i geometri:

La retta

Una retta é un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietá:

La retta

Una retta é un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietá:

i) Si estende all' infinito in due direzioni

La retta

Una retta é un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietá:

i) Si estende all' infinito in due direzioni
ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti

La retta

Una retta é un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietá:

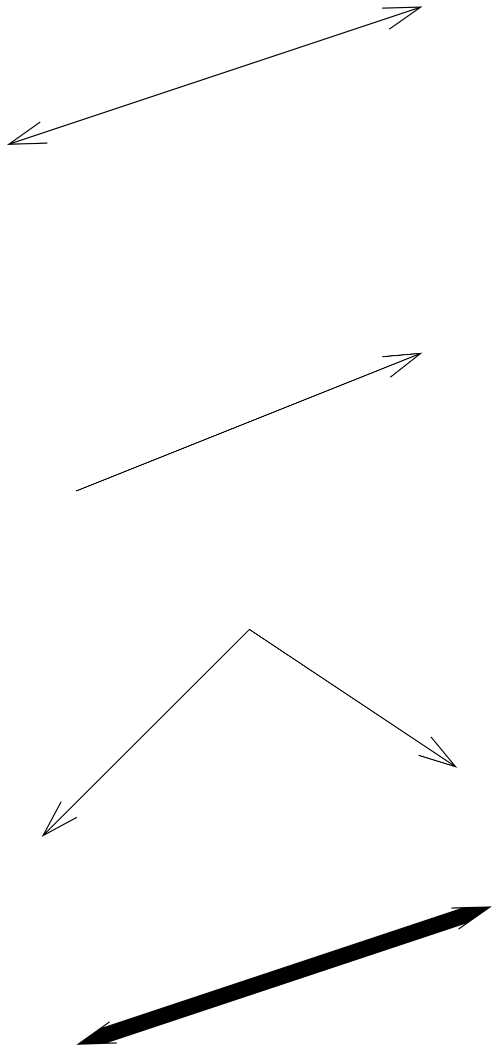
i) Si estende all' infinito in due direzioni
ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
iii) dati due punti su una retta il cammino piú breve per andare da un punto all'altro é dato dalla retta stessa (la retta é una geodetica)

La retta

Una retta é un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietá:

i) Si estende all' infinito in due direzioni
ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
iii) dati due punti su una retta il cammino piú breve per andare da un punto all'altro é dato dalla retta stessa (la retta é una geodetica)
iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.

Esempio



retta

non rette

Altri oggetti

- Si definiscono poi le semirette, i segmenti, i triangoli i poligoni,...

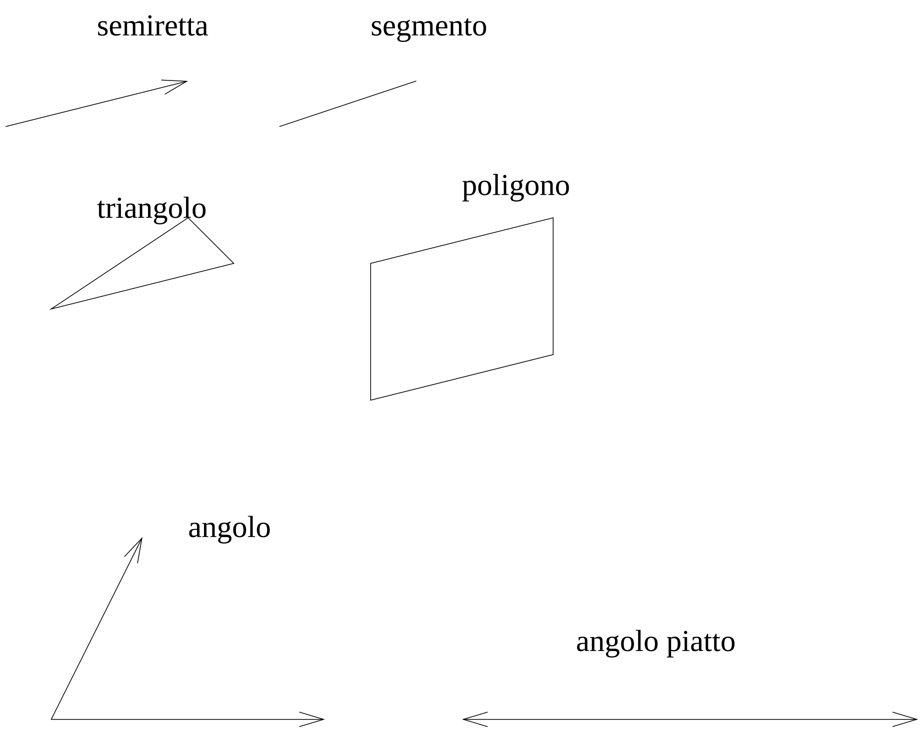
Altri oggetti

- Si definiscono poi le semirette, i segmenti, i triangoli i poligoni,...

-Un angolo é dato da due semirette con vertice comune.

Altri oggetti

- Si definiscono poi le semirette, i segmenti, i triangoli i poligoni,...
-Un angolo é dato da due semirette con vertice comune.

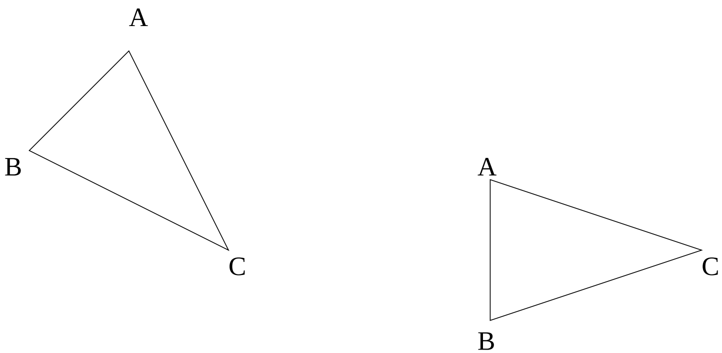


Congruenza e misura

-Due oggetti o figure si diranno uguali (o congruenti) se (con un movimento rigido del piano) si possono sovrapporre uno all'altro.

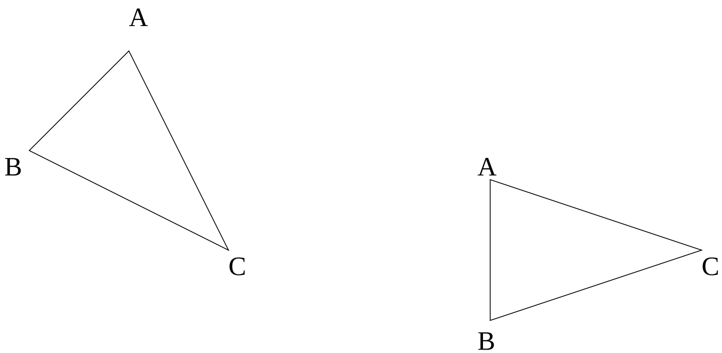
Congruenza e misura

-Due oggetti o figure si diranno uguali (o congruenti) se (con un movimento rigido del piano) si possono sovrapporre uno all'altro.



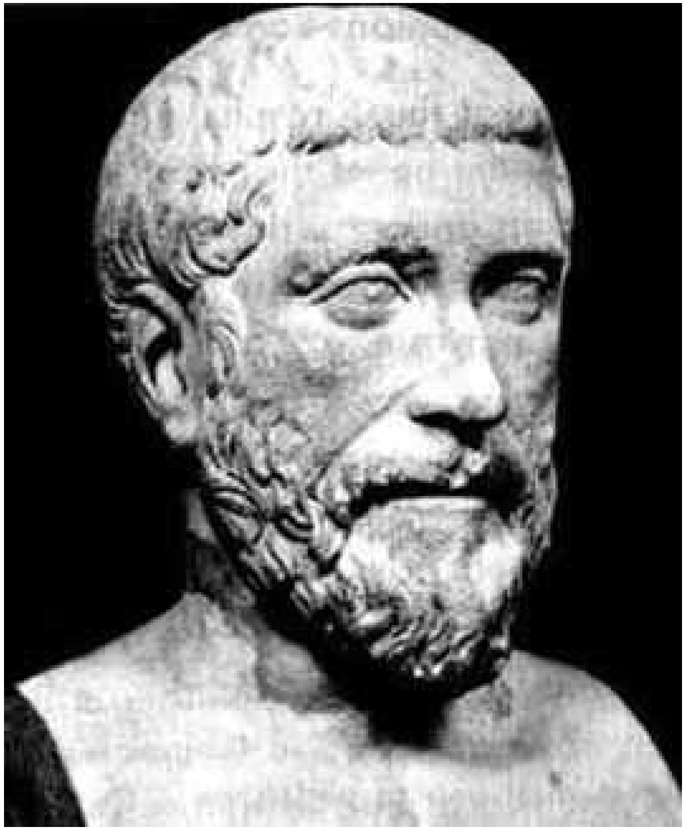
Congruenza e misura

-Due oggetti o figure si diranno uguali (o congruenti) se (con un movimento rigido del piano) si possono sovrapporre uno all'altro.



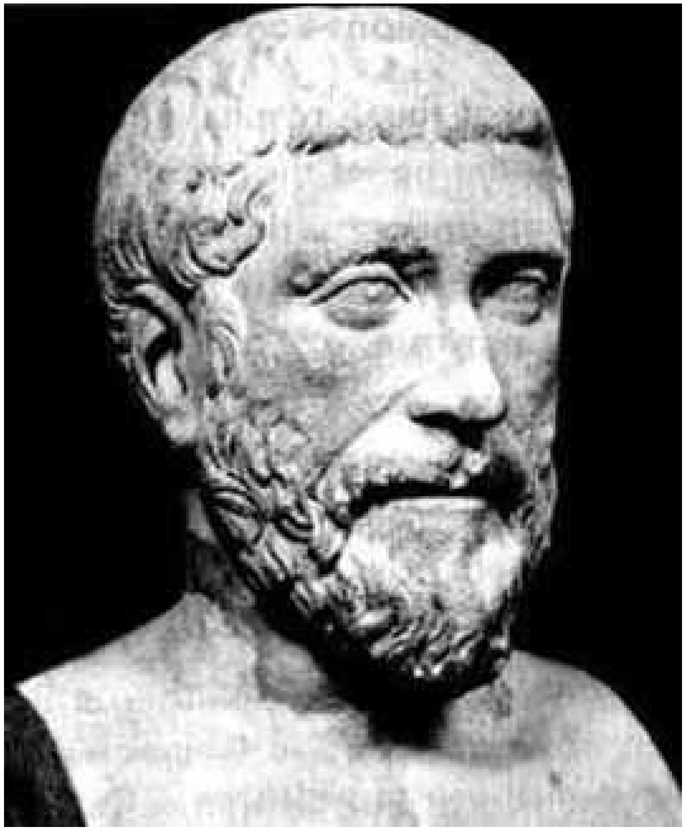
-Si definisce una unitá di misura per segmenti e angoli:
- metro campione di Sevres = quarantamilonesima parte di un meridiano terrestre
- angolo unitario = 180-esima parte dell'angolo piatto

Il teorema di Pitagora



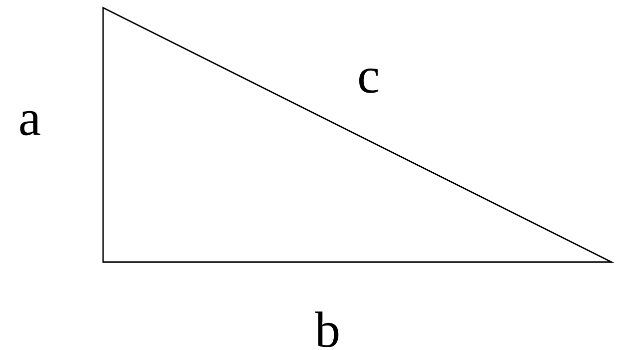
Pitagora,
Mileto-Crotone 580-500 a.C.

Il teorema di Pitagora

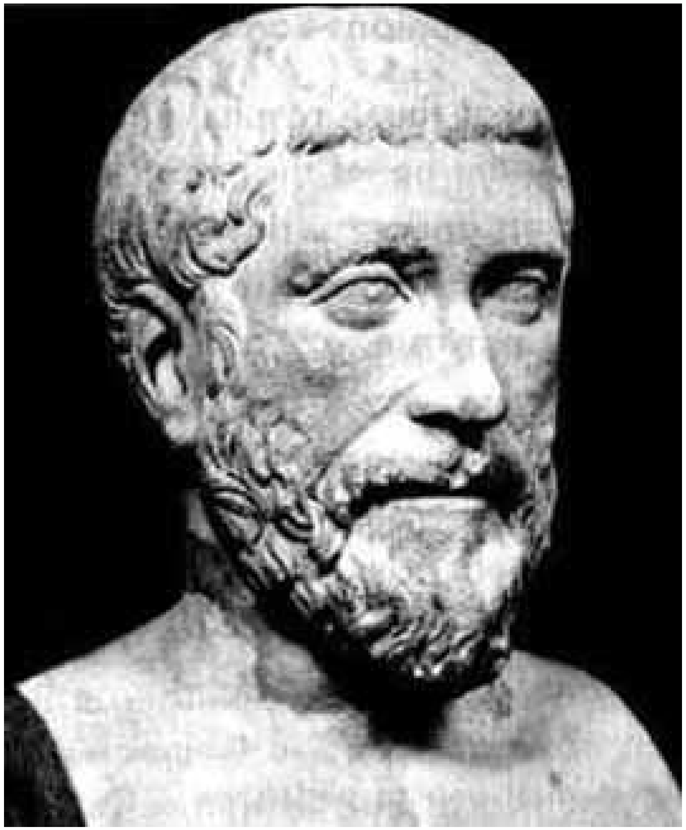


Pitagora,
Mileto-Crotone 580-500 a.C.

Teorema.
Dato un triangolo rettangolo

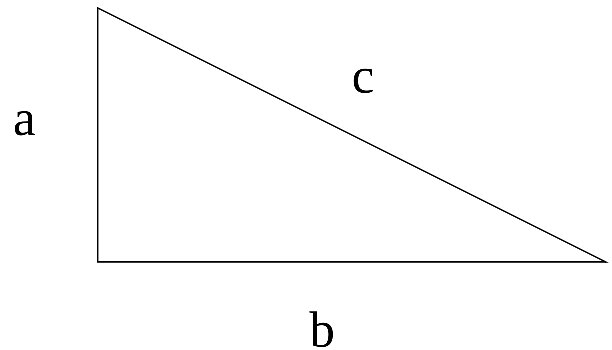


Il teorema di Pitagora



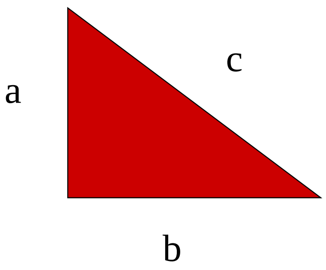
Pitagora,
Mileto-Crotone 580-500 a.C.

Teorema.
Dato un triangolo rettangolo

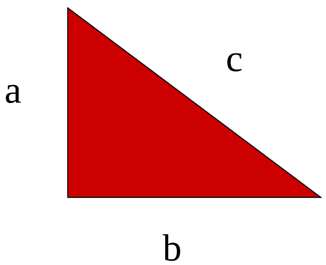


vale l'identitá $a^2 + b^2 = c^2$

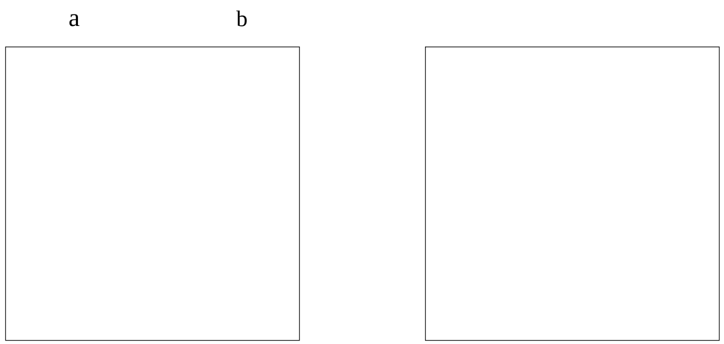
Prova.



Prova.

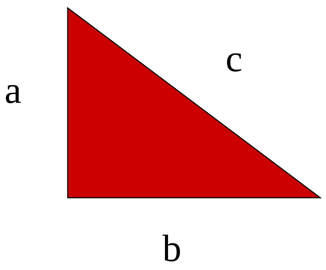


Prendiamo due quadrati di lato $a + b$:

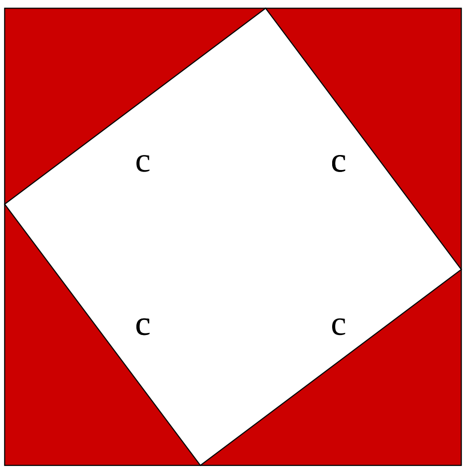


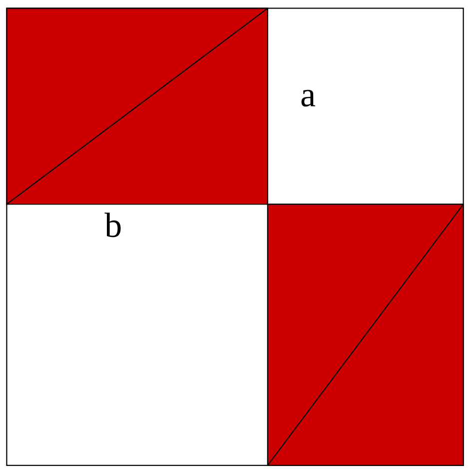
Prova

Prova.



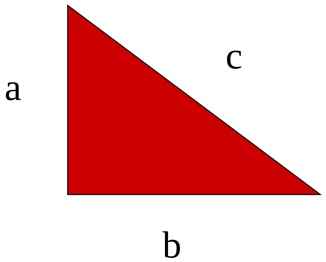
Togliamo ad ognuno 4 volte il triangolo dato



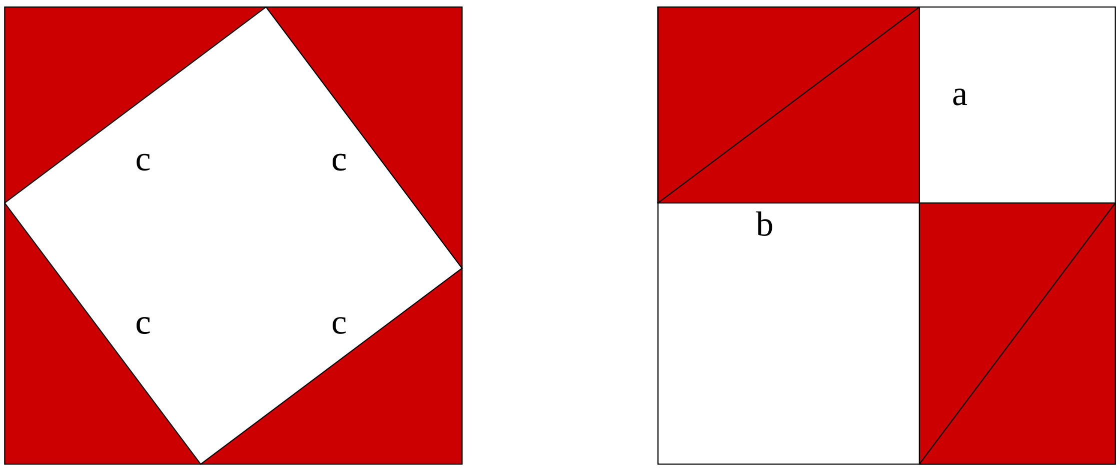


Prova

Prova.



le aree delle parti in bianco sono uguali e dunque
$c^2 = a^2 + b^2$



Un altro teorema

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

Un altro teorema

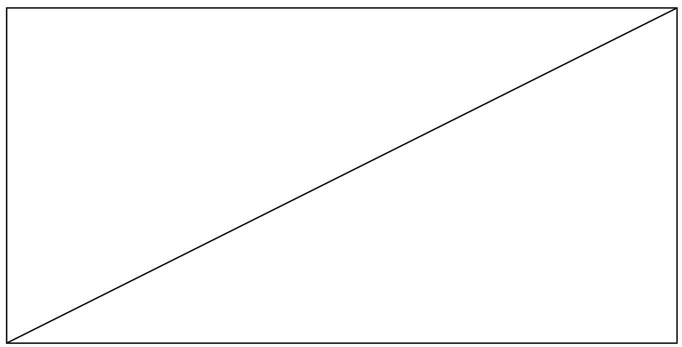
Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

Prova. Prendiamo un rettangolo (un quadrilatero con lati opposti uguali e angoli retti) e consideriamo i due triangoli formati dalla diagonale

Un altro teorema

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

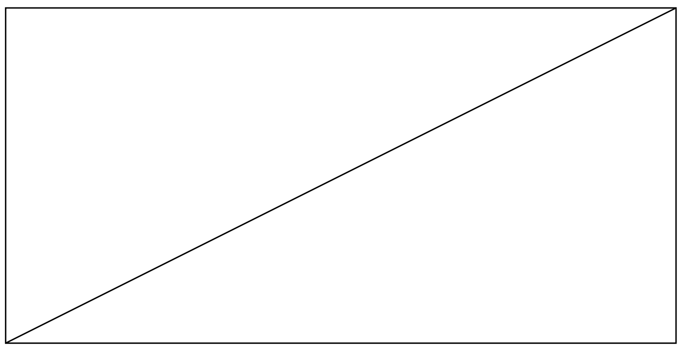
Prova. Prendiamo un rettangolo (un quadrilatero con lati opposti uguali e angoli retti) e consideriamo i due triangoli formati dalla diagonale



Un altro teorema

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

Prova. Prendiamo un rettangolo (un quadrilatero con lati opposti uguali e angoli retti) e consideriamo i due triangoli formati dalla diagonale



I due triangoli hanno i lati uguali e dunque sono congruenti. Pertanto il teorema é vero per triangoli rettangoli.

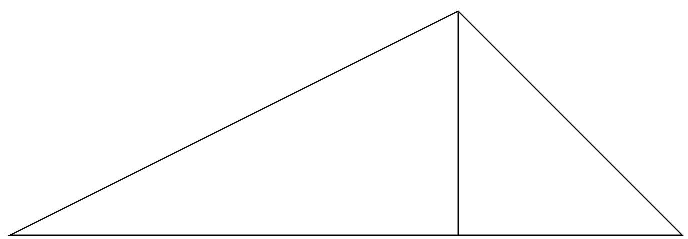
e ancora

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

e ancora

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

Per un trangolo qualunque tracciamo l’altezza e consideriamo i due triangoli rettangoli ottenuti.



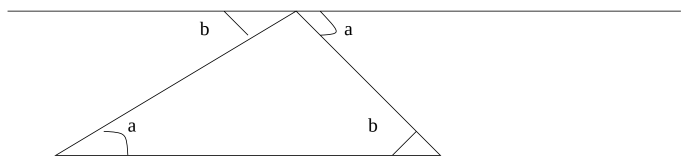
Una prova diversa

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

Una prova diversa

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

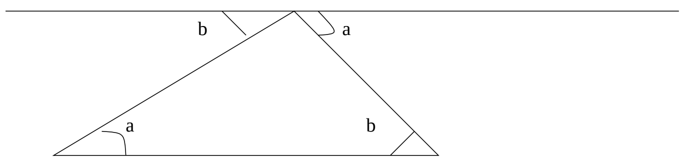
Prova. Consideriamo la parallela ad un lato passante per il vertice opposto



Una prova diversa

Teorema. La somma degli angoli interni ad un triangolo = angolo piatto.

Prova. Consideriamo la parallela ad un lato passante per il vertice opposto



(Proposizione) Gli angoli a e b sono uguali tra loro e dunque il teorema é dimostrato

Il quinto postulato di Euclide

Riconsideriamo i seguenti tre enunciati:

- I) Data una retta da un punto esterna ad essa passa una ed una sola retta parallela

Il quinto postulato di Euclide

Riconsideriamo i seguenti tre enunciati:

- I) Data una retta da un punto esterna ad essa passa una ed una sola retta parallela
- II) Esistono rettangoli (i.e. quadrilateri con angoli interni uguali a 90° gradi e lati opposti uguali)

Il quinto postulato di Euclide

Riconsideriamo i seguenti tre enunciati:

- I) Data una retta da un punto esterna ad essa passa una ed una sola retta parallela
- II) Esistono rettangoli (i.e. quadrilateri con angoli interni uguali a 90° gradi e lati opposti uguali)
- III) La somma degli angoli interni ad un triangolo é uguale a 180° gradi

Il quinto postulato di Euclide

Riconsideriamo i seguenti tre enunciati:

- I) Data una retta da un punto esterna ad essa passa una ed una sola retta parallela
- II) Esistono rettangoli (i.e. quadrilateri con angoli interni uguali a 90° gradi e lati opposti uguali)
- III) La somma degli angoli interni ad un triangolo é uguale a 180° gradi

Abbiamo visto che I) e II) implicano III).

Il quinto postulato di Euclide

Riconsideriamo i seguenti tre enunciati:

- I) Data una retta da un punto esterna ad essa passa una ed una sola retta parallela
- II) Esistono rettangoli (i.e. quadrilateri con angoli interni uguali a 90° gradi e lati opposti uguali)
- III) La somma degli angoli interni ad un triangolo é uguale a 180° gradi

Abbiamo visto che I) e II) implicano III).
In realtá sono tutte formulazioni equivalenti del
quinto postulato di Euclide,

Il quinto postulato di Euclide

Riconsideriamo i seguenti tre enunciati:

- I) Data una retta da un punto esterna ad essa passa una ed una sola retta parallela
- II) Esistono rettangoli (i.e. quadrilateri con angoli interni uguali a 90° gradi e lati opposti uguali)
- III) La somma degli angoli interni ad un triangolo é uguale a 180° gradi

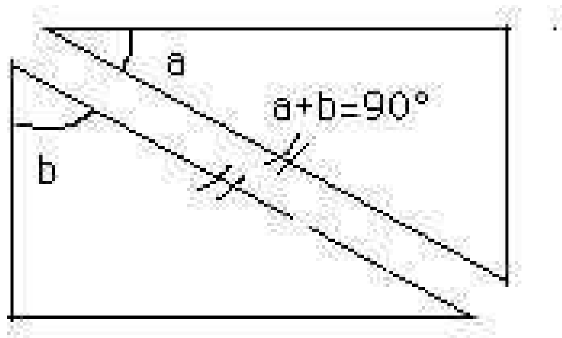
Abbiamo visto che I) e II) implicano III).
In realtá sono tutte formulazioni equivalenti del
quinto postulato di Euclide,
La prova di uno si ottiene solo ricorrendo ad un altro.

Equivalenza degli enunciati

Abbiamo visto che I) e II) implicano III).

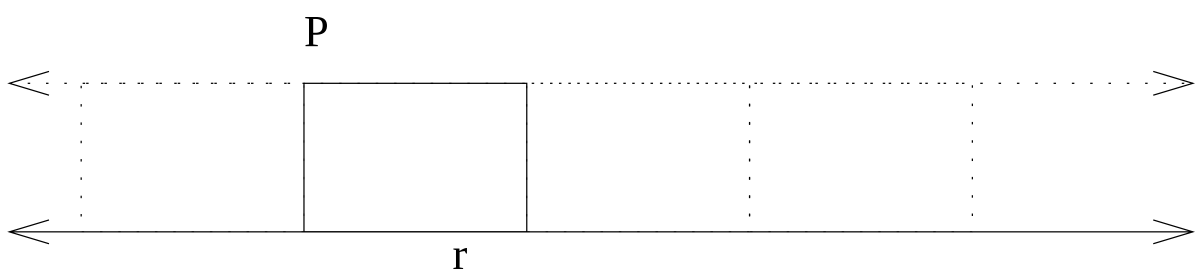
Equivalenza degli enunciati

III) implica II).
Si prendano due copie di un triangolo rettangolo e le si incollano lungo l'ipotenusa come in figura,

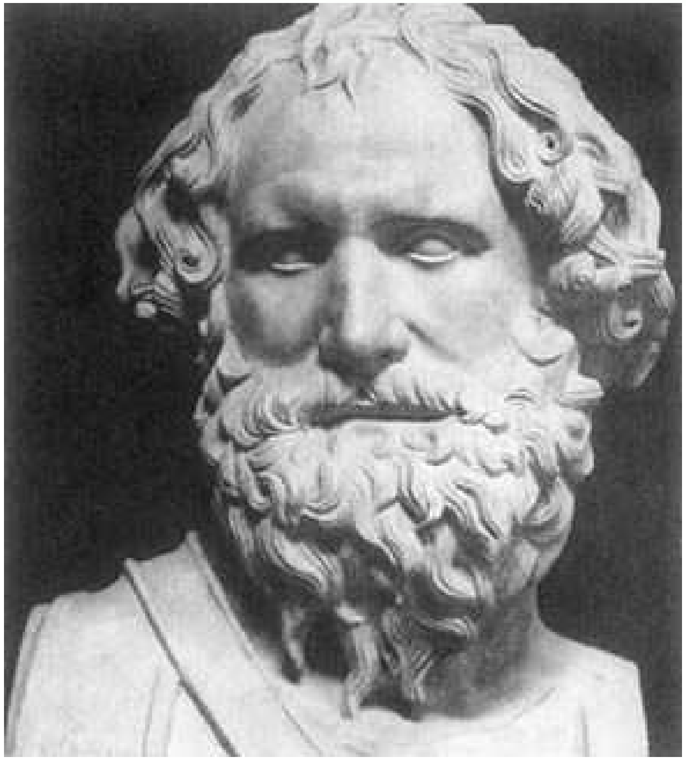


Equivalenza degli enunciati

II) implica I)
Con l’aiuto di un rettangolo con un lato sulla retta ed un vertice sul punto esterno si costruisce, come in figura, la parallela alla retta r per il punto P

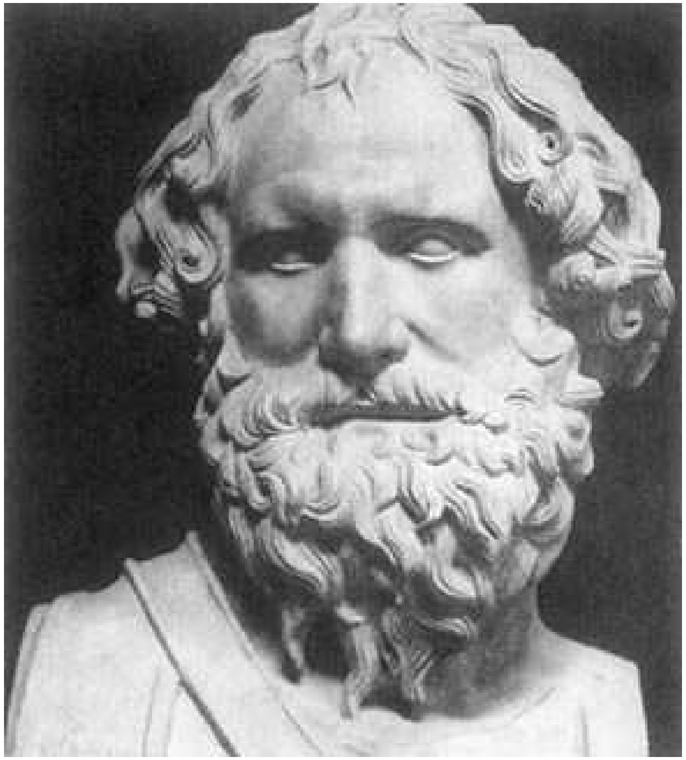


prima di lasciar la (Magna) Grecia



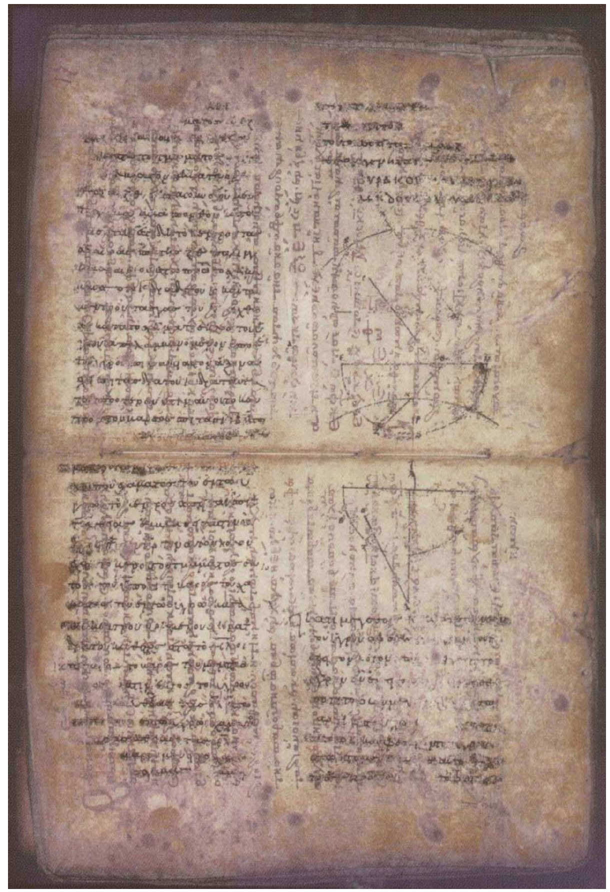
Archimede,
Siracusa 287-212 a.C.

prima di lasciar la (Magna) Grecia



Archimede,
Siracusa 287-212 a.C.

...ed il mistero del palinsesto



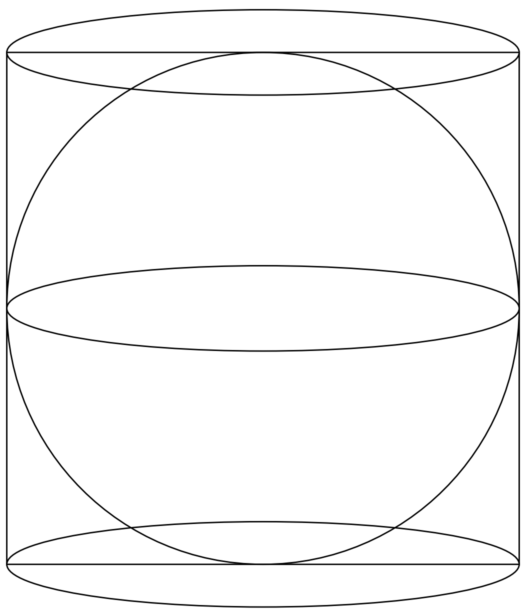
Tra le tante scoperte di Archimede

Determinó con la miglior precisione del tempo il valore dell' area del cerchio di raggio unitario, ovvero del valore del numero trascendente che oggi indichiamo con $\pi(=3,14...)$.

Tra le tante scoperte di Archimede

Determinó con la miglior precisione del tempo il valore dell' area del cerchio di raggio unitario, ovvero del valore del numero trascendente che oggi indichiamo con $\pi(= 3, 14...)$.

Inoltre dimostró il seguente: Teorema. La superfice della sfera di raggio r é uguale alla superficie laterale del cilindro circoscritto ovvero $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

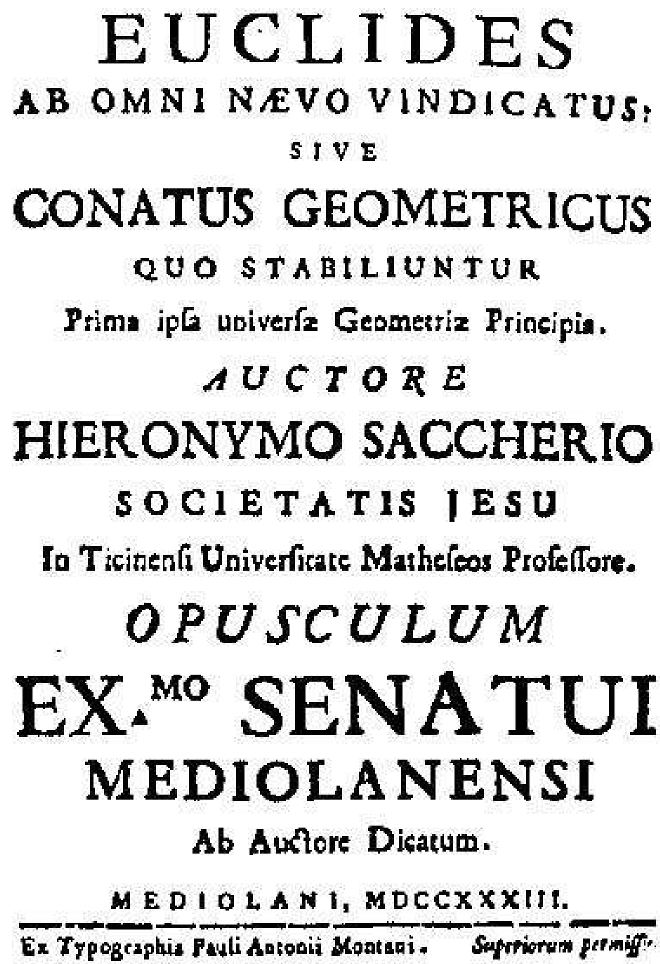


Un gesuita vede, ma non crede

Giovanni Girolamo Saccheri
1667-1733, gesuita
professore di Teologia e
di Matematica a Pavia
Si propose di dimostrare
l'esistenza di un rettangolo
(quadrilatero di Saccheri),
di fatto sviluppó della
geometria non euclidea.

Un gesuita vede, ma non crede

Giovanni Girolamo Saccheri
1667-1733, gesuita
professore di Teologia e
di Matematica a Pavia
Si propose di dimostrare
l'esistenza di un rettangolo
(quadrilatero di Saccheri),
di fatto sviluppó della
geometria non euclidea.


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Il mondo é tondo

Diventa importante fare misure, dividere territori, tracciare rotte, su scala terrestre.

Il mondo é tondo

Diventa importante fare misure, dividere territori, tracciare rotte, su scala terrestre.

Nel 1493 una bolla papale assegna le terre a ovest del ”meridiano che sta 100 leghe ad ovest delle Azzorre” alla Spagna. Nessuno peró sa come determinare questo meridiano. Si bandiscono dei premi in denaro, il primo dalla Spagna nel 1567.

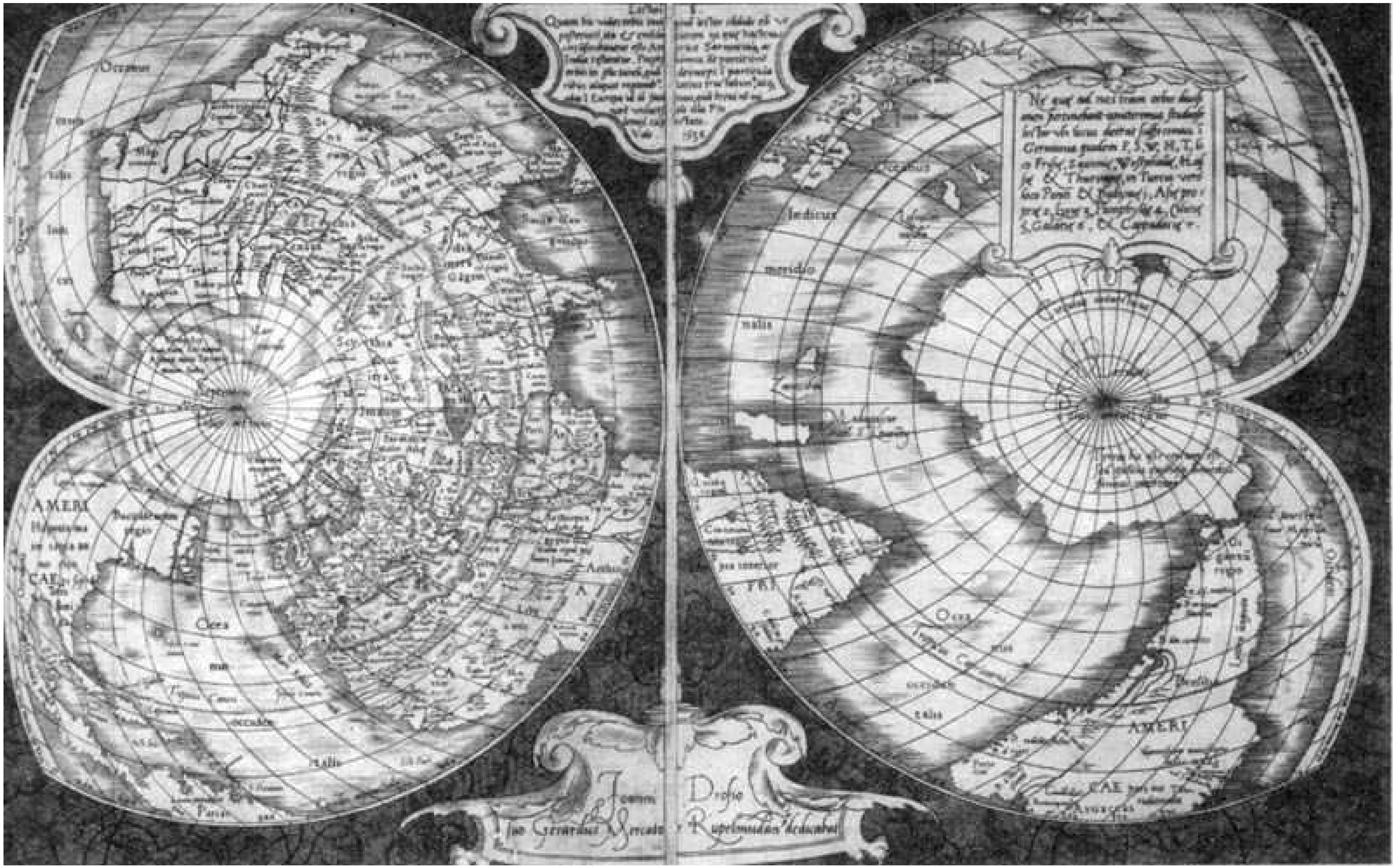
Il mondo é tondo

Diventa importante fare misure, dividere territori, tracciare rotte, su scala terrestre.

Nel 1493 una bolla papale assegna le terre a ovest del ”meridiano che sta 100 leghe ad ovest delle Azzorre” alla Spagna. Nessuno peró sa come determinare questo meridiano. Si bandiscono dei premi in denaro, il primo dalla Spagna nel 1567.

Gerardo Mercatore, 1512-1594,
matematico, astronomo, cartografo, eretico
si sforza di ridurre la geometria del globo terrestre alla geometria piana.

Le proiezioni di Mercatore



Le proiezioni di Mercatore

Gauss, il Teorema Egregium

Gauss,
Gottinga, 1777-1855

Gauss, il Teorema Egregium

Gauss,
Gottinga, 1777-1855

Teorema Egregium.

Non é possibile rappresentare la sfera su un piano in modo tale che la rappresentazione preservi le misure, nemmeno per porzioni limitate!

(Piú precisamente il teorema dice due superfici con curvatura diversa non sono localmente isometriche)

La geometria sferica

Una Sfera é il luogo dei punti nello spazio equidistanti una lungezza r da un punto fisso detto 0. Pensiamo di poter muoverci solo sulla superficie della sfera e che il raggio r sia enormemente grande rispetto alle nostre dimensioni.

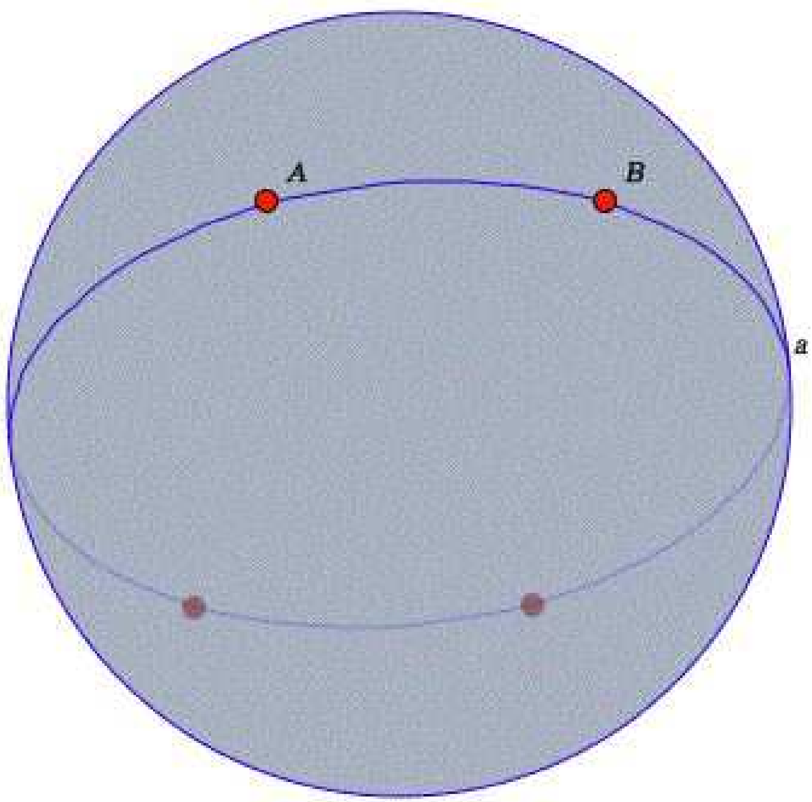
La geometria sferica

Una Sfera é il luogo dei punti nello spazio equidistanti una lungezza r da un punto fisso detto 0. Pensiamo di poter muoverci solo sulla superficie della sfera e che il raggio r sia enormemente grande rispetto alle nostre dimensioni.

Una retta vogliamo sia come prima caratterizzata da:
ii) Si estende all' infinito in due direzioni
ii) Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
iii) dati due punti su una retta il cammino piú breve per andare da un punto all' altro é dato dalla retta stessa (la retta é una geodetica)
iv) se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.

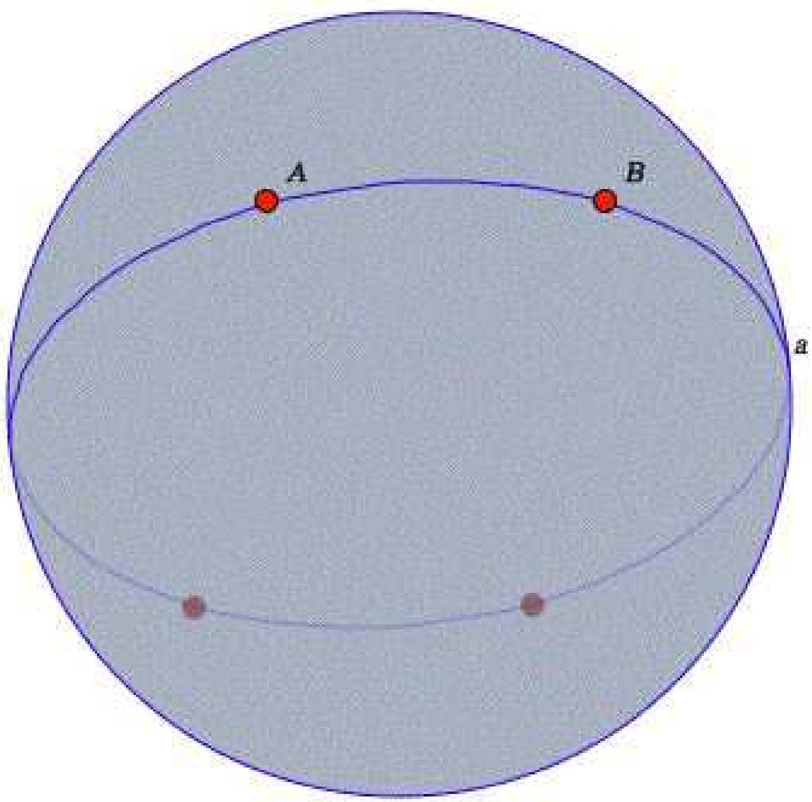
I cerchi massimi

Le rette sulla sfera sono i cerchi massimi, ovvero i cerchi che si ottengono intersecando la sfera con un piano passante per l'origine



I cerchi massimi

Le rette sulla sfera sono i cerchi massimi, ovvero i cerchi che si ottengono intersecando la sfera con un piano passante per l'origine



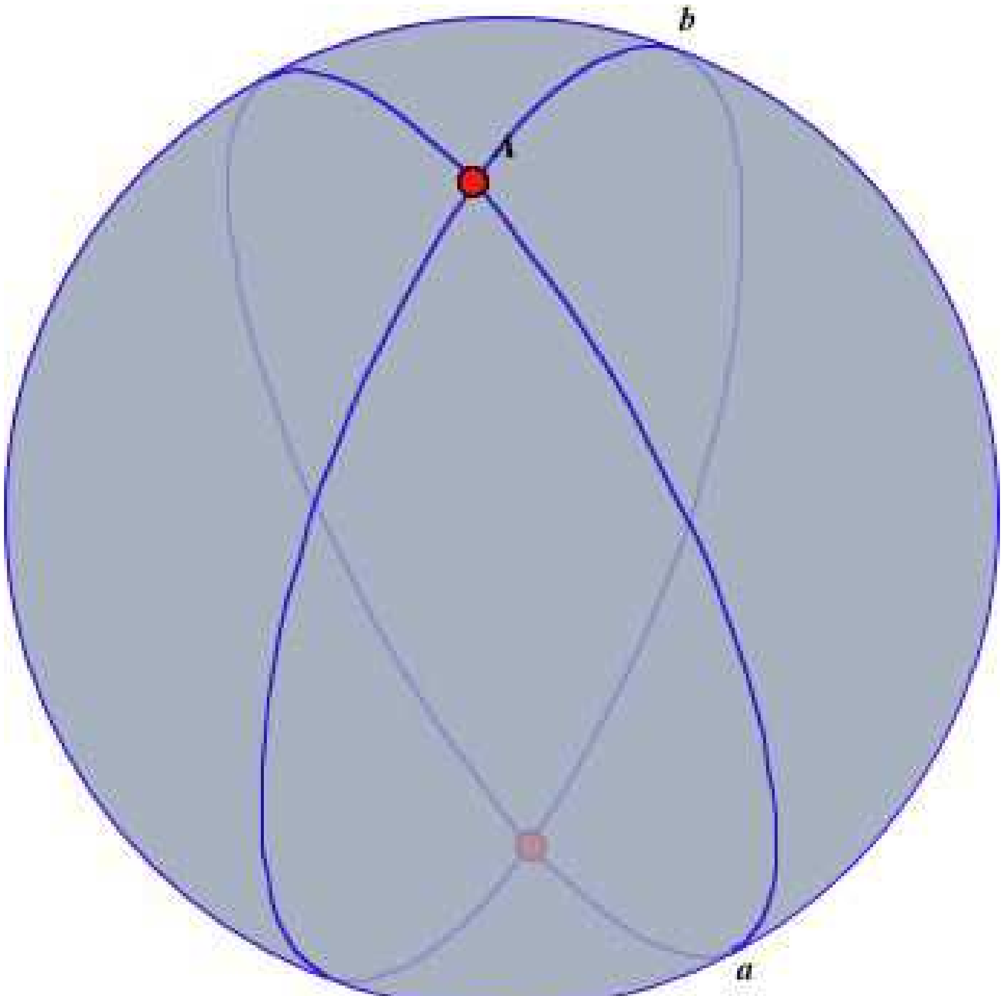
Di questo fatto se ne puó dare una prova matematica. Per convincersene basta provare a tendere un filo tra due punti su un pallone. Oppure considerare la rotta che percorre un aereo da Milano a New-York, ...

altri oggetti

Si definiscono poi le semirette, i segmenti, i triangoli ed i poligoni. Un angolo é dato da due semirette con vertice comune. Due oggetti o figure si diranno uguali (o congruenti) se (con un movimento rigido della sfera) si possono sovrapporre uno all'altro. Infine si definiscono le misure.

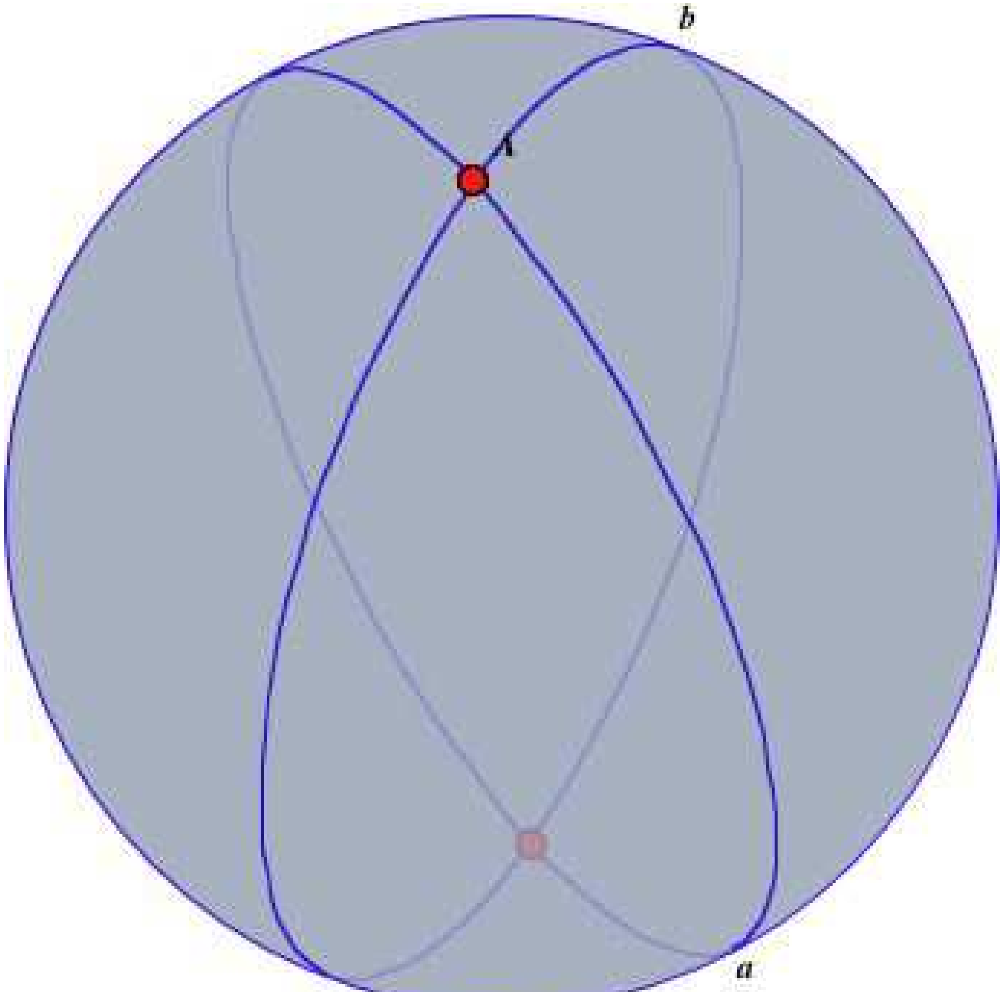
altri oggetti

Un definizione nuova é quella di luna, ovvero la parte di sfera delimitata da due rette che formano un angolo A.



altri oggetti

Un definizione nuova é quella di luna, ovvero la parte di sfera delimitata da due rette che formano un angolo A.

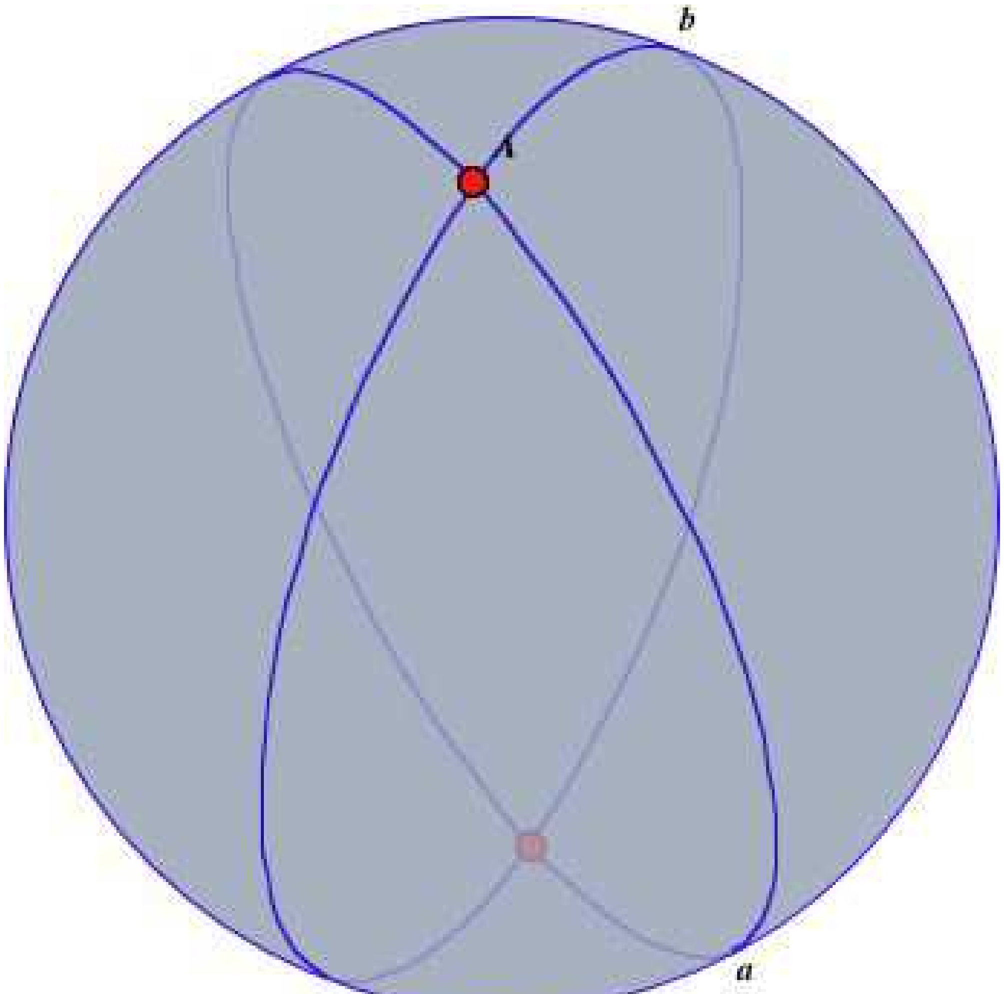


Proposizione.
L'area della luna formata da un angolo A su una sfera di raggio r si ottiene con la proporzione

$$\frac{4\pi r^2}{\pi} = \frac{Area}{A}$$

altri oggetti

Un definizione nuova é quella di luna, ovvero la parte di sfera delimitata da due rette che formano un angolo A.



Proposizione.
L'area della luna formata da un angolo A su una sfera di raggio r si ottiene con la proporzione

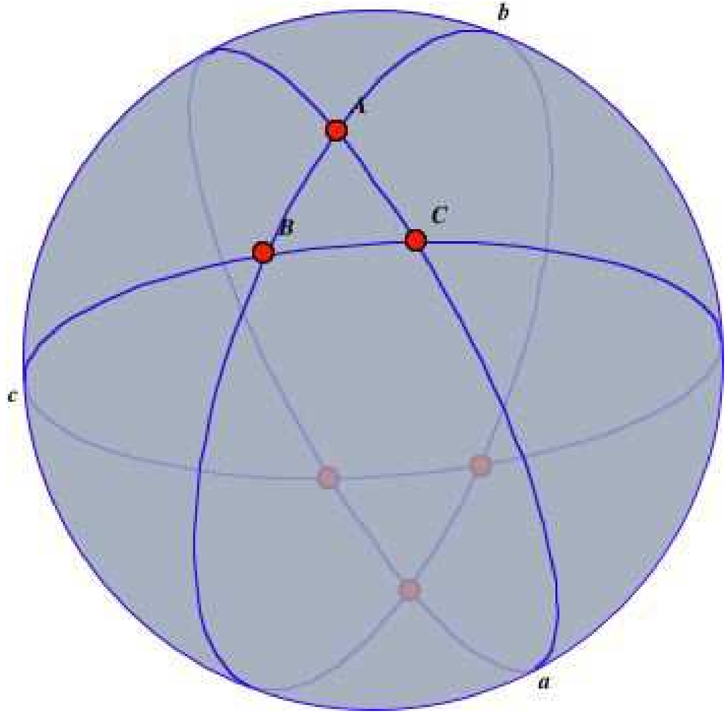
$$\frac{4\pi r^2}{\pi} = \frac{Area}{A}$$

i.e.

Area = $4r^2A$

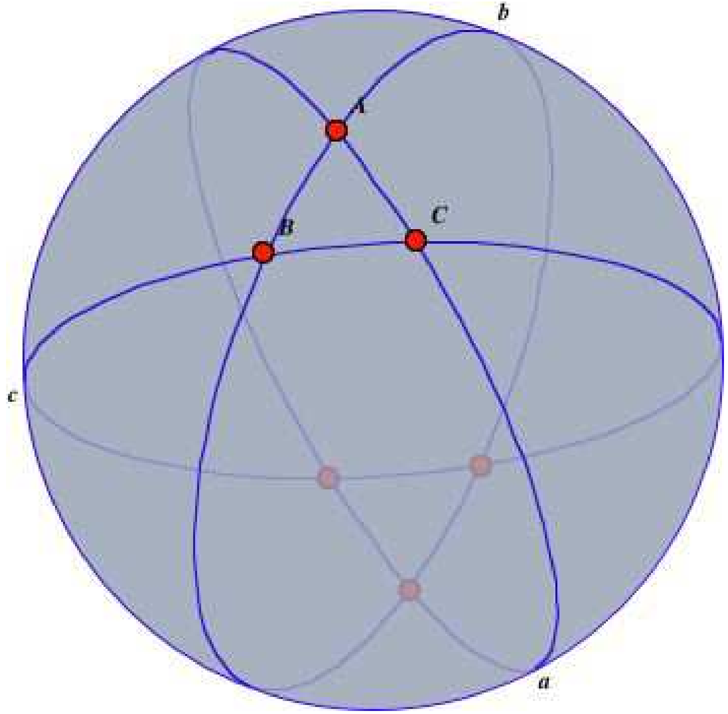
Teorema dell' eccesso- Gauss

Teorema Dato un triangolo sferico con angoli A, B, C



Teorema dell' eccesso- Gauss

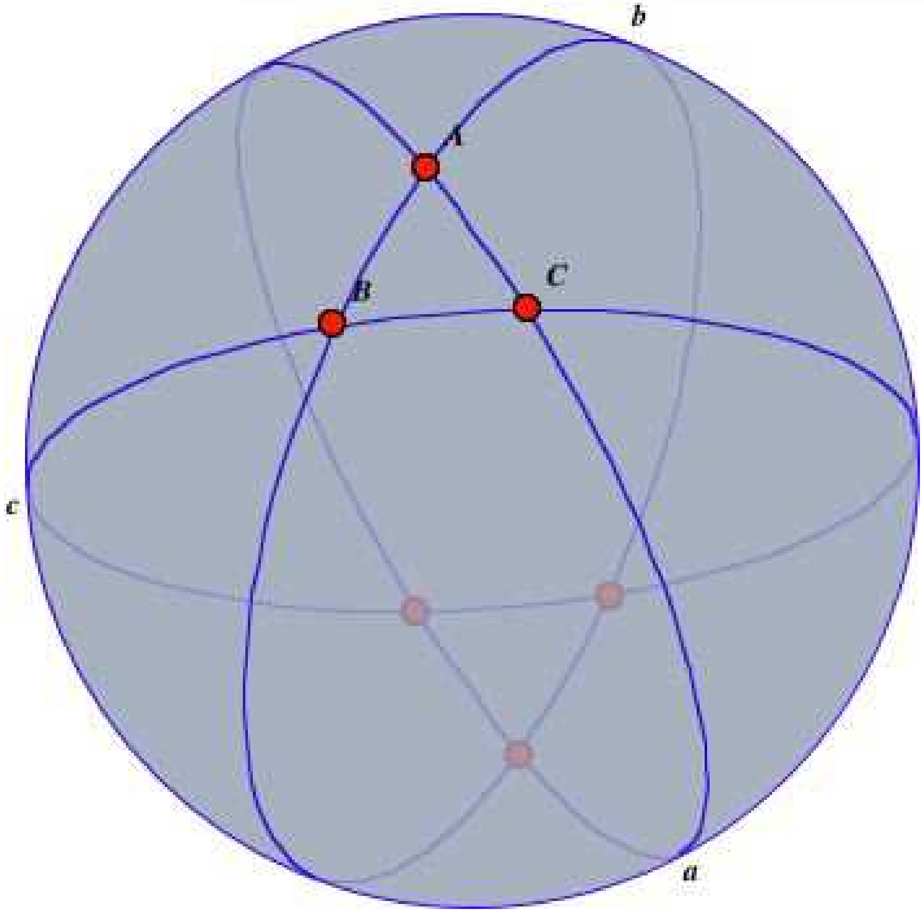
Teorema Dato un triangolo sferico con angoli A, B, C



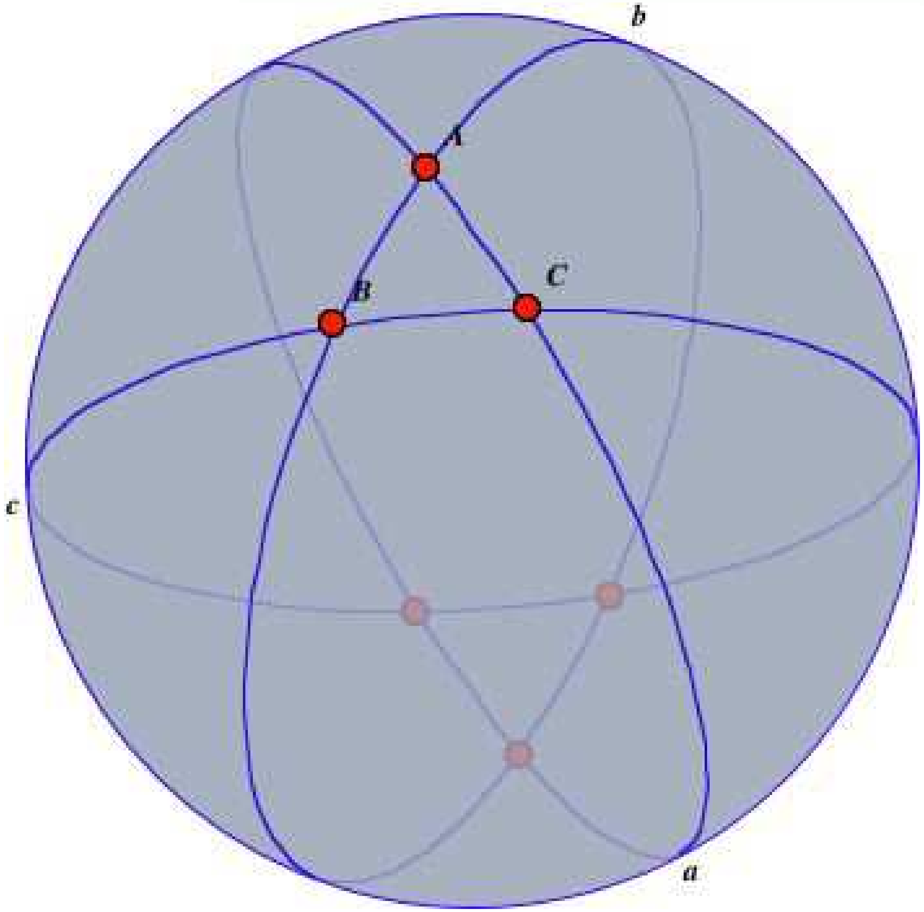
la sua area é data dalla formula

$$\text{Area} = r^2(A + B + C - \pi)$$

Dimostrazione

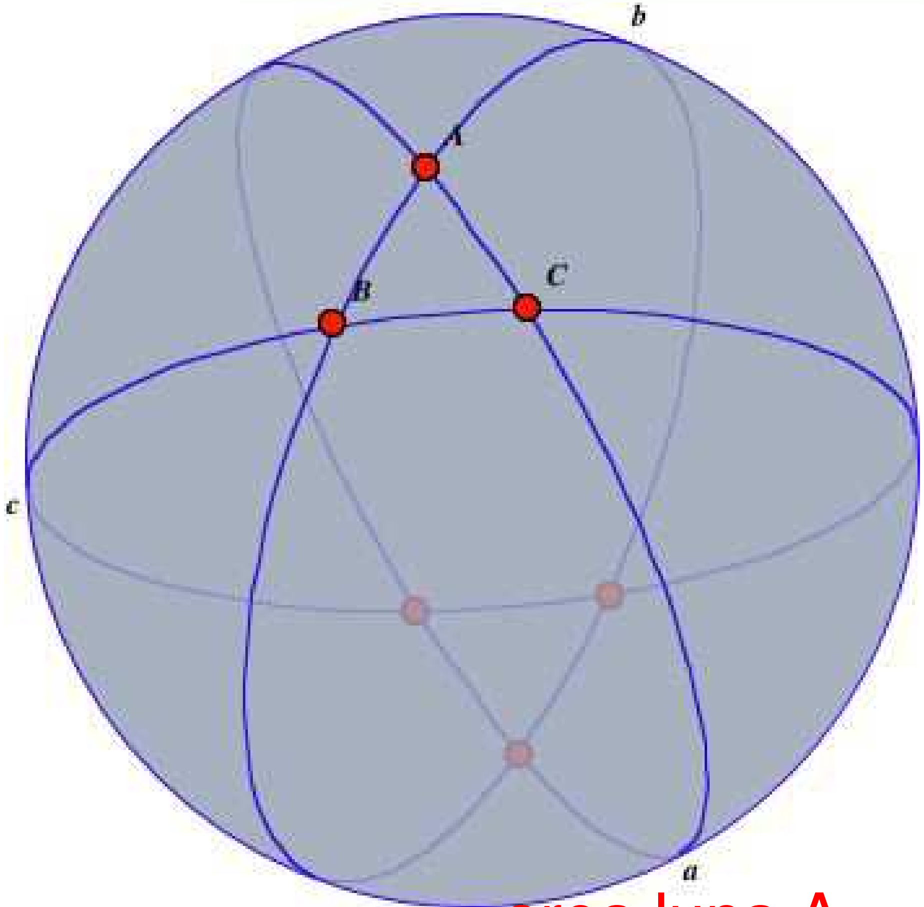


Dimostrazione



osserviamo che le tre lune definite dagli angoli A,B,C coprono tutta la sfera, precisamente ricoprono tre volte il triangolo ed il triangolo antipodale, ogni altro punto sta solo su una luna.

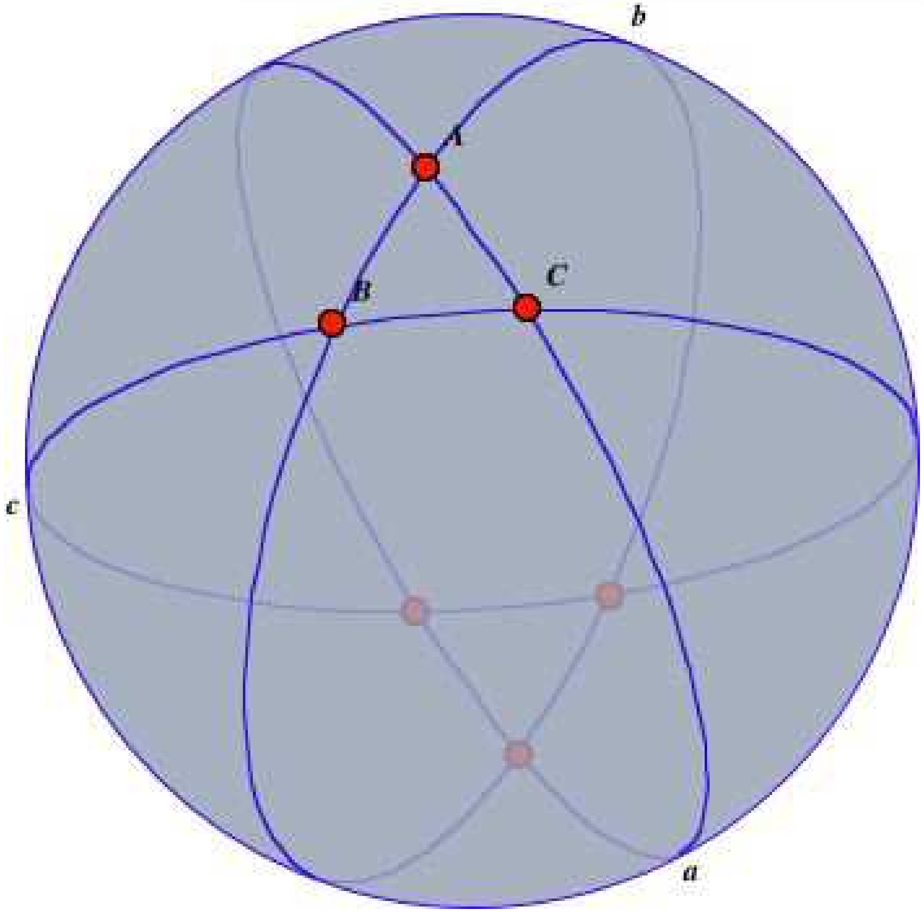
Dimostrazione



osserviamo che le tre lune definite dagli angoli A,B,C coprono tutta la sfera, precisamente ricoprono tre volte il triangolo ed il triangolo antipodale, ogni altro punto sta solo su una luna.

Abbiamo dunque che vale:
area luna A + area luna B + area luna C = area della sfera + 4 volte area del triangolo

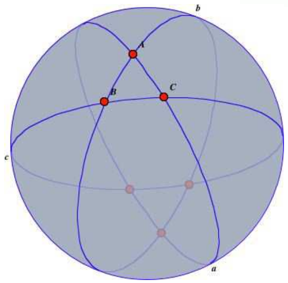
Dimostrazione



osserviamo che le tre lune definite dagli angoli A,B,C coprono tutta la sfera, precisamente ricoprono tre volte il triangolo ed il triangolo antipodale, ogni altro punto sta solo su una luna.

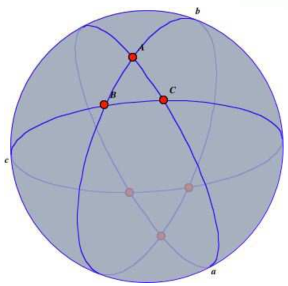
Ovvero:
$4r^2(A+B+C) =$
$4\pi r^2 + 4$ area triangolo

Corollari



$$\text{Area} = r^2(A + B + C - \pi)$$

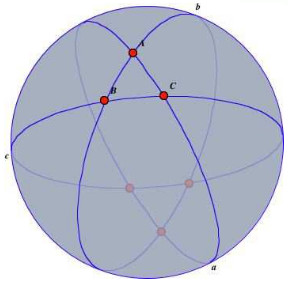
Corollari



$$\text{Area} = r^2(A + B + C - \pi)$$

- non vale il quinto postulato di euclide

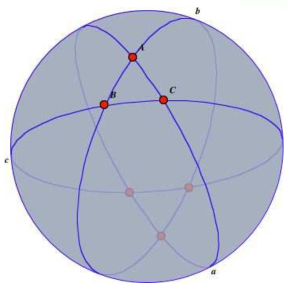
Corollari



$$\text{Area} = r^2(A + B + C - \pi)$$

- non vale il quinto postulato di euclide
- gli angoli determinano il triangolo.(In geometria euclidea due triangoli con gli stessi angoli non sono congruenti, sono simili.)

Corollari



$$\text{Area} = r^2(A + B + C - \pi)$$

- non vale il quinto postulato di euclide
- gli angoli determinano il triangolo.(In geometria euclidea due triangoli con gli stessi angoli non sono congruenti, sono simili.)
- la curvatura dello spazio determina la geometria, fornisce maggiori elementi di conoscenza. Su questo principio si basa anche la teoria della relativitá.

Geometria iperbolica

La geometria iperbolica é una geometria piana nella quale
-la somma degli angoli interni di un triangolo é minore di 180 gradi
- per ogni punto esterno ad una retta passano infinite rette parallele alla retta stessa
- non esistono rettangoli.

Geometria iperbolica

La geometria iperbolica é una geometria piana nella quale
-la somma degli angoli interni di un triangolo é minore di 180 gradi
- per ogni punto esterno ad una retta passano infinite rette parallele alla retta stessa
- non esistono rettangoli.

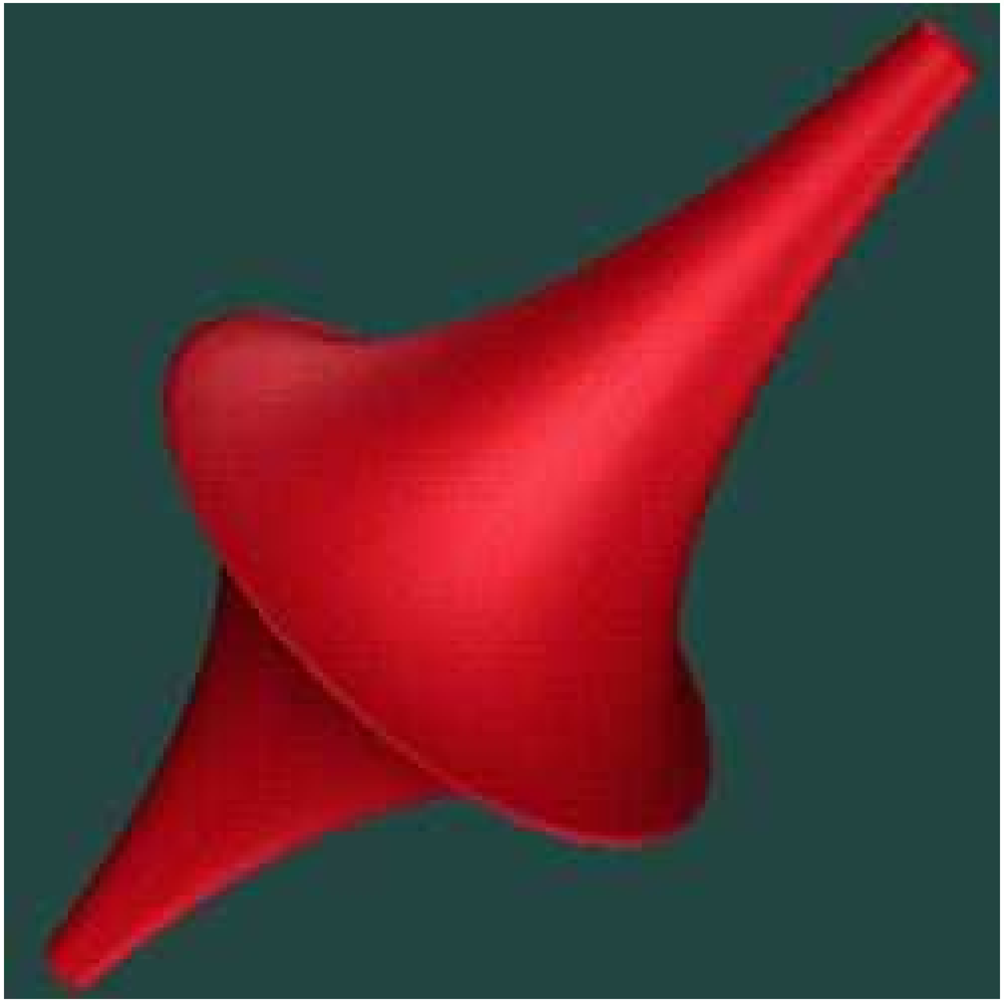
Questa geometria é stata teorizzata da Bolyai e Lobatchewski. Dalla teorizzazione alla costruzione di un modello la strada é lunga (Hilbert dimostró che non puó essere realizzata nello spazio) .

geometri europei della fine 800

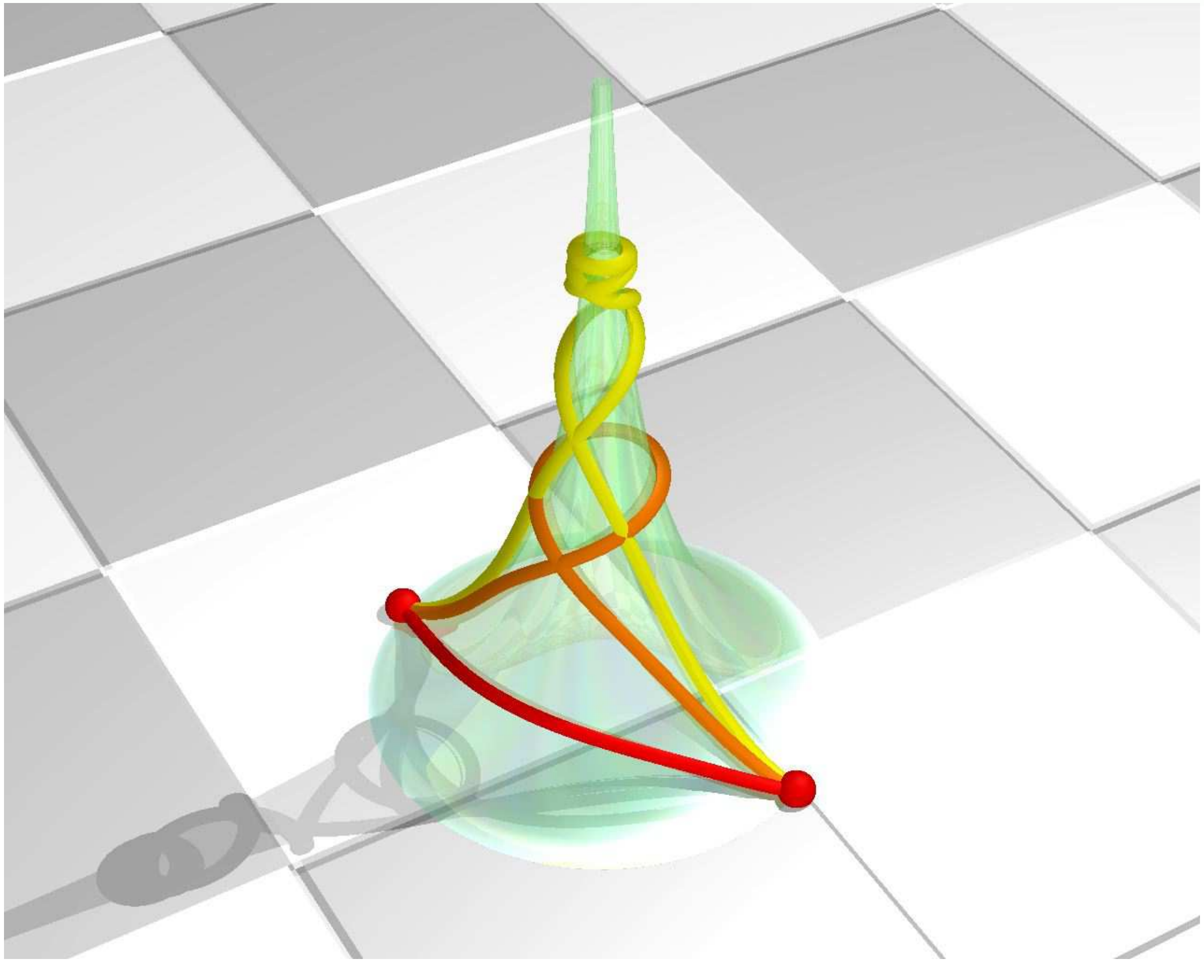


Eugenio Beltrami 1835-1900, Felix Klein 1849-1925, Henry Poincaré 1854-1912

i sogni diventano...modelli



i sogni diventano...modelli

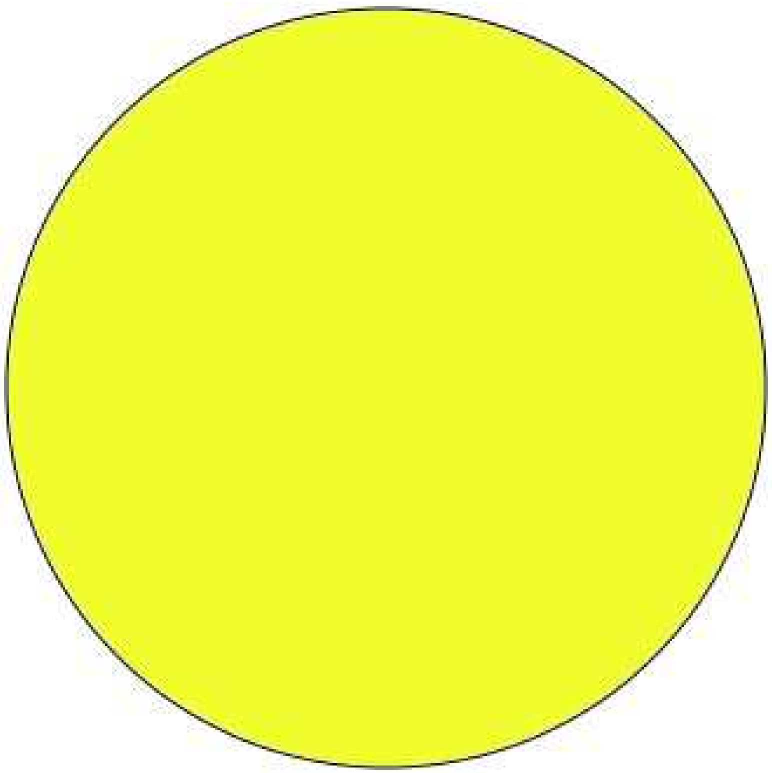


Geometria iperbolica

Il luogo di questa geometria (detto anche l'universo) é dato dai punti di un disco nel piano di raggio r (abbastanza grande rispetto all'osservatore) detto Disco Iperbolico.

Geometria iperbolica

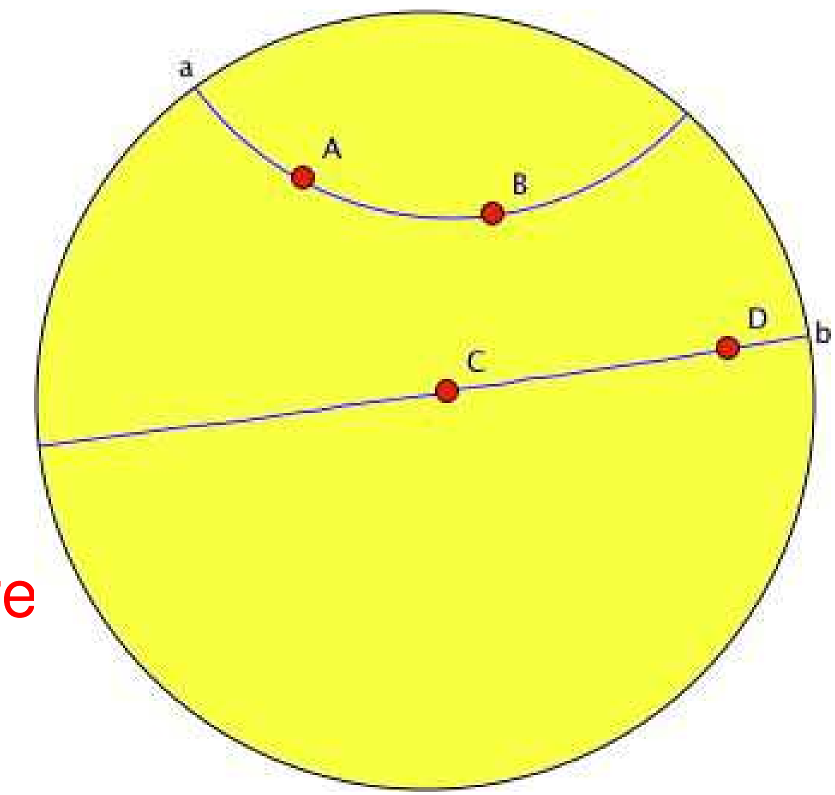
Il luogo di questa geometria (detto anche l’universo) é dato dai punti di un disco nel piano di raggio r (abbastanza grande rispetto all’osservatore) detto Disco Iperbolico.



Geometria iperbolica

Il luogo di questa geometria (detto anche l'universo) é dato dai punti di un disco nel piano di raggio r (abbastanza grande rispetto all'osservatore) detto Disco Iperbolico.

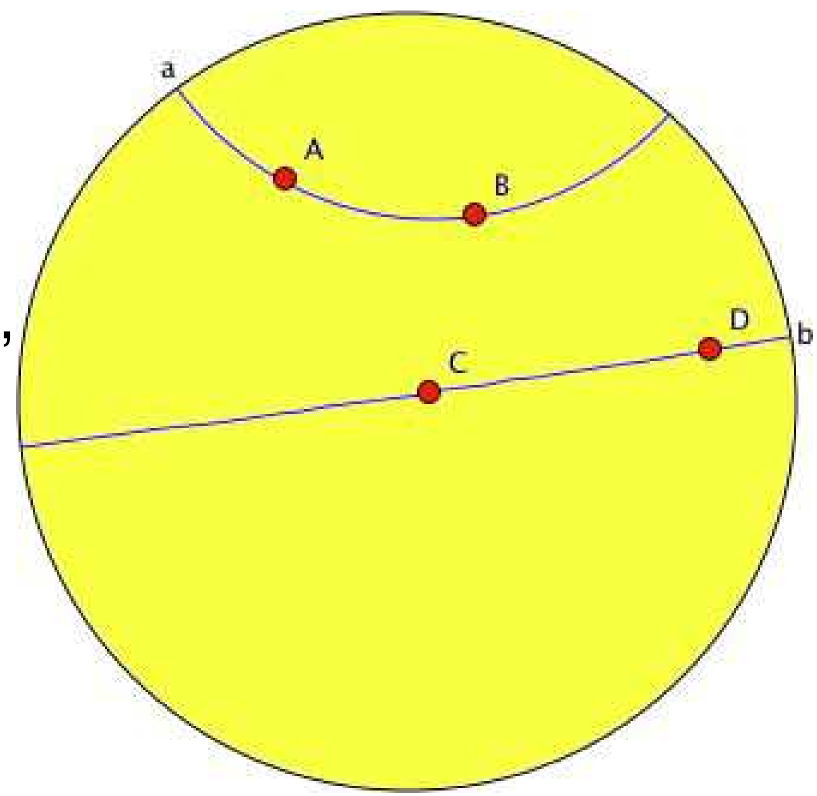
Si definisce una distanza particolare tra due punti A e B nel disco in modo tale che il cammino piú breve, ovvero la retta, per andare da A a B sia quello dato dal cerchio passante per i due punti e perpendicolare al bordo del disco.



Geometria iperbolica

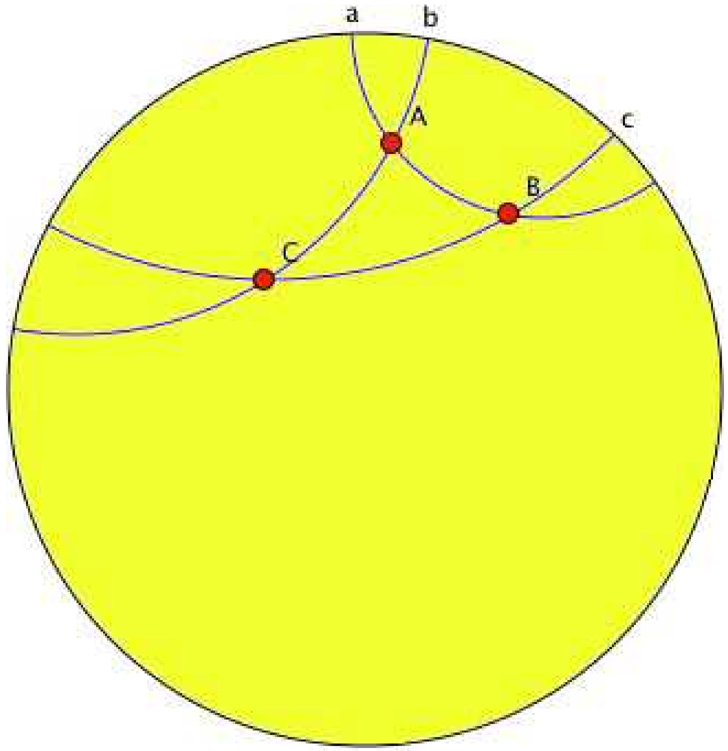
Il luogo di questa geometria (detto anche l'universo) é dato dai punti di un disco nel piano di raggio r (abbastanza grande rispetto all'osservatore) detto Disco Iperbolico.

Piú precisamente la distanza si definisce considerando il cerchio per A e B intersecante ortogonalmente il bordo del disco nei punti A' e B'. Allora $d(A, B) = 1/2|log[(AA'/BA')(BB'/AB')]|$. Si noti che se tengo fisso A e mi muovo con B verso il bordo del disco la distanza $d(A, B)$ tende ad infinito.



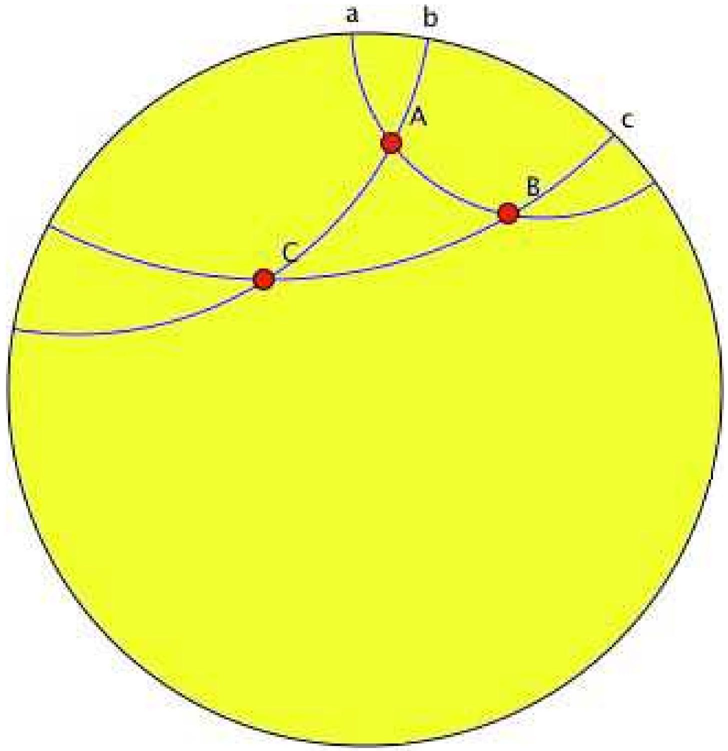
Teorema di geometria iperbolica

Teorema Dato un triangolo iperbolico con angoli A, B, C



Teorema di geometria iperbolica

Teorema Dato un triangolo iperbolico con angoli A, B, C



$$\text{Area} = r^2(\pi - (A + B + C))$$

Conclusione

A concludere enunciamo uno dei teoremi piú belli e difficili del secolo scorso.

Conclusione

A concludere enunciamo uno dei teoremi piú belli e difficili del secolo scorso.
Teorema di uniformizzazione di Riemann-Poincaré.
Ogni geometria piana é riconducibile a una delle tre geometrie sopra descritte (euclidea, sferica, iperbolica).

Conclusione

A concludere enunciamo uno dei teoremi piú belli e difficili del secolo scorso.
Teorema di uniformizzazione di Riemann-Poincaré.
Ogni geometria piana é riconducibile a una delle tre geometrie sopra descritte (euclidea, sferica, iperbolica).

Conclusione

A concludere enunciamo uno dei teoremi piú belli e difficili del secolo scorso.
Teorema di uniformizzazione di Riemann-Poincaré.
Ogni geometria piana é riconducibile a una delle tre geometrie sopra descritte (euclidea, sferica, iperbolica).

Un teorema simile per dimensioni superiori non é stato dimostrato; quel che é certo é che le geometrie di tipo iperbolico sono le piú diffuse e ignote.

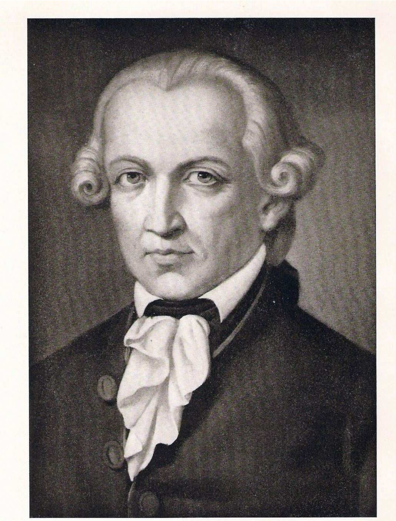
Kant - Riemann

IMMANUEL KANT
From a painting

Lo spazio non é un concetto che si deriva dalla esperienza esterna... la rappresentazione dello spazio deve gia esistere come ”fondamento” (a priori). Di conseguenza la rappresentazione dello spazio non puó essere acquisita dalla relazione con fenomeni esterni attraverso l’esperienza.

Kant 1724-1804 - Critica della Ragion Pura

Kant - Riemann



IMMANUEL KANT
From a painting

Lo spazio non é un concetto che si deriva dalla esperienza esterna... la rappresentazione dello spazio deve gia esistere come "fondamento" (a priori). Di conseguenza la rappresentazione dello spazio non puó essere acquisita dalla relazione con fenomeni esterni attraverso l'esperienza.

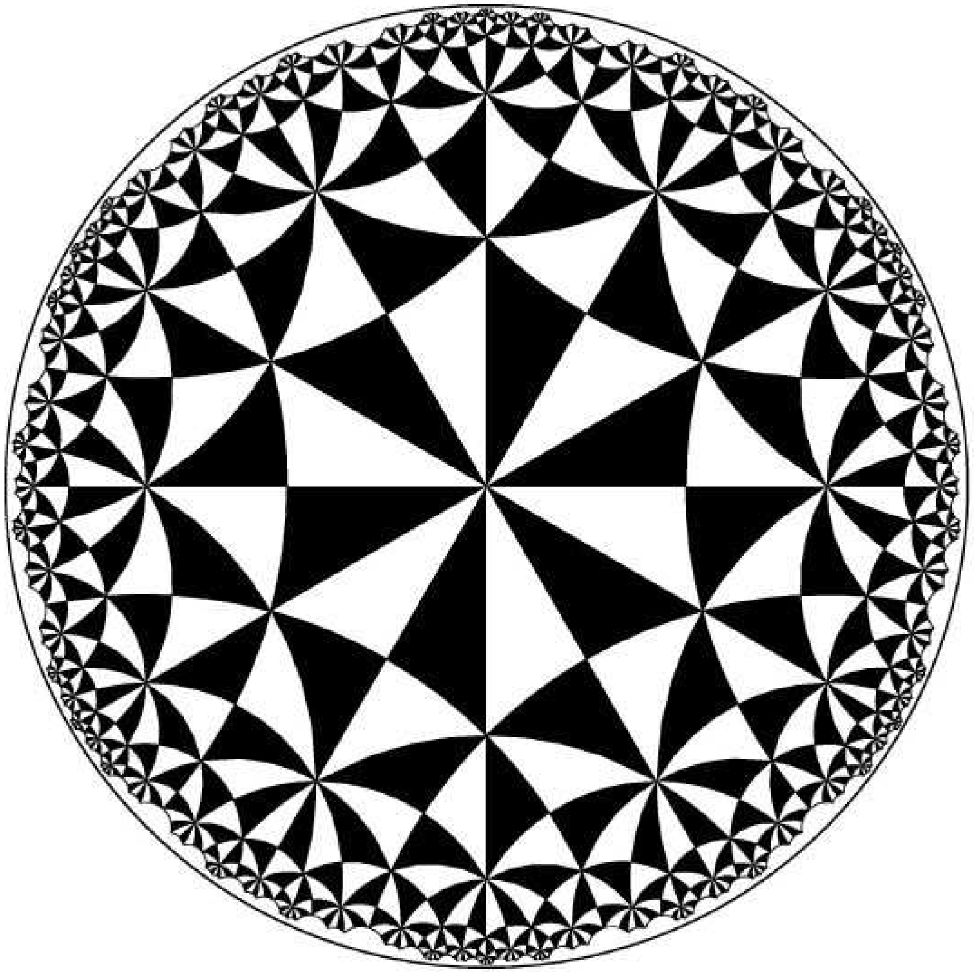
Kant 1724-1804 - Critica della Ragion Pura

Nasce quindi il problema del trovare il dato piú semplice dal quale dedurre le relazioni metriche dello spazio.... il sistema piú importante é quello concepito a fondamenta della geometria da Euclide. Questo dato é, come tutti i dati, non necessario, ma solo di certezza empirica, é una ipotesi...

Riemann 1826-1866 -

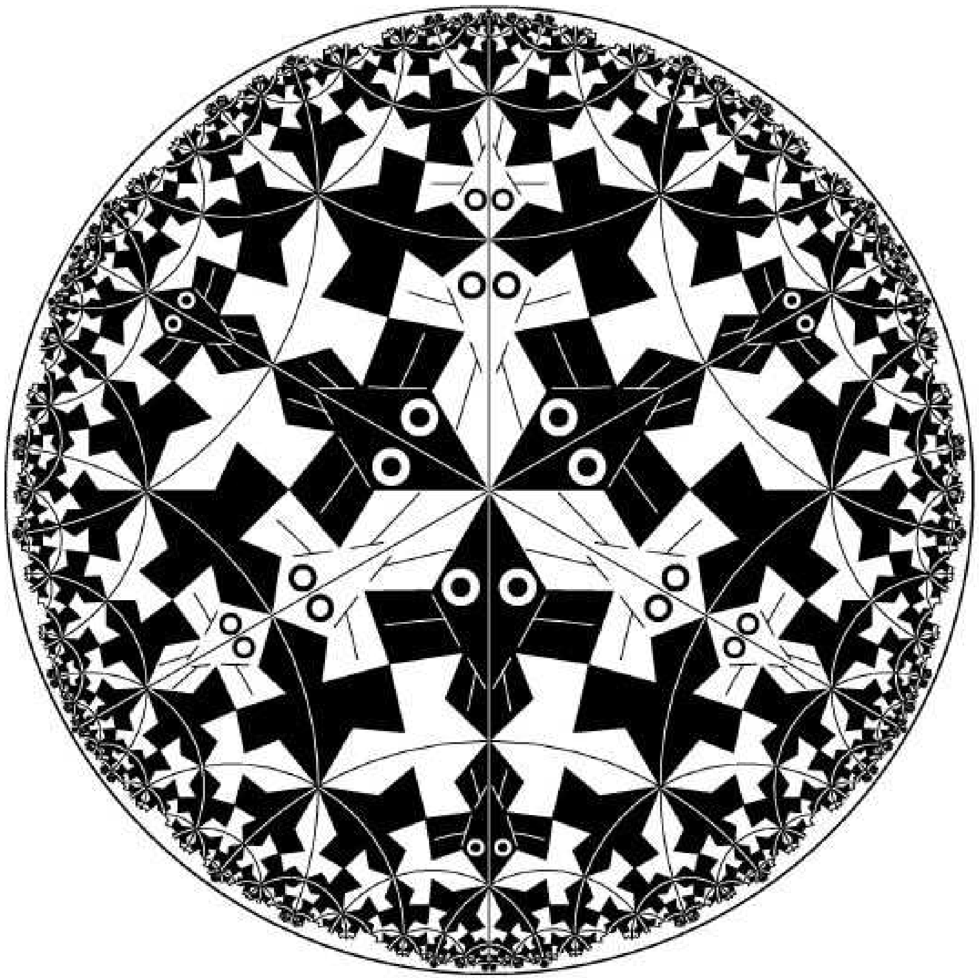
Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria

M.C. Escher



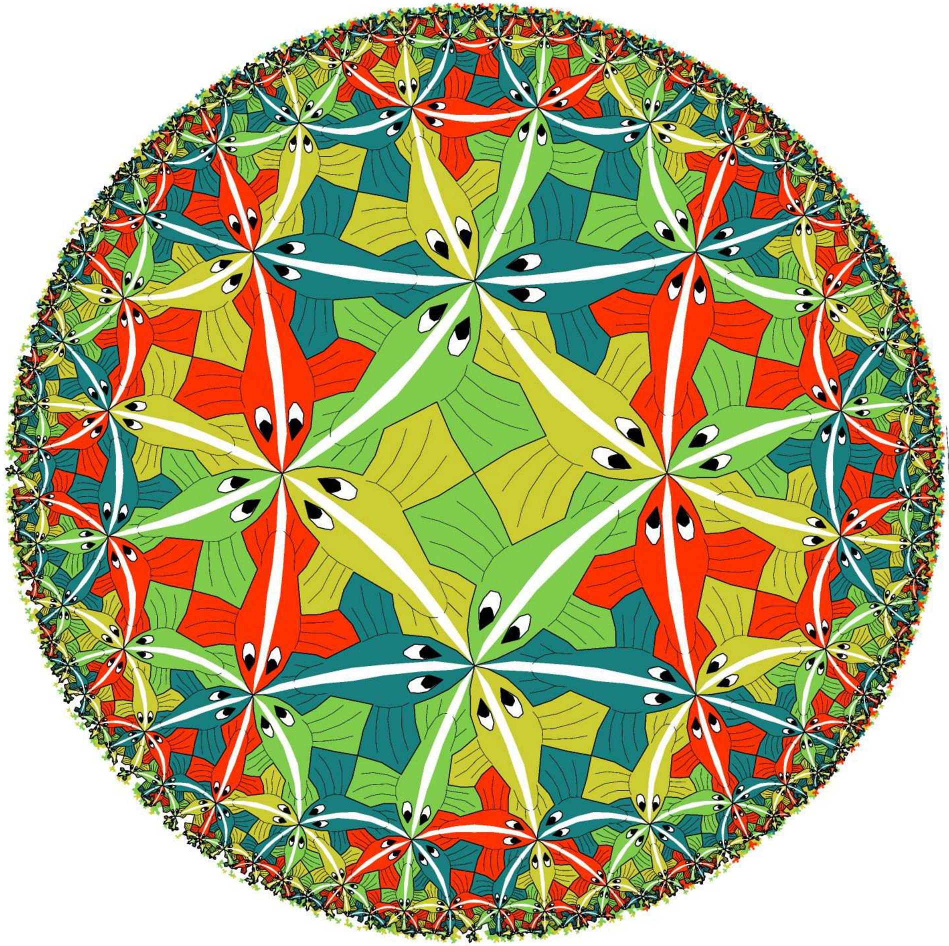
Tassellatura iperbolica di Coxeter

M.C. Escher



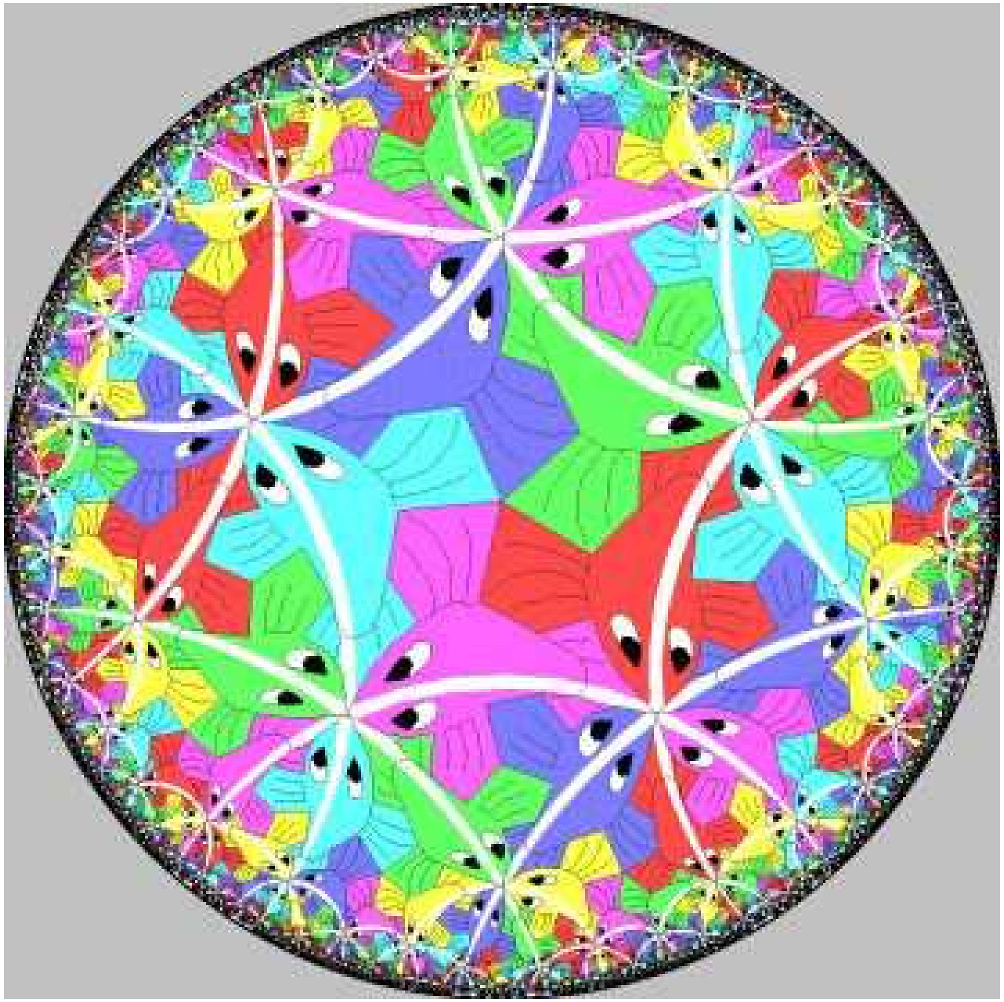
Rielaborazione di Escher

M.C. Escher



Escher: Cerchio limite III

M.C. Escher



Poster premiato con il 2003 Math Awareness