

Capitolo2 - Le curve

In principio era il punto

L'origine di tutto è il punto; così la pensa anche Euclide che inizia gli *Elementi* proprio con la seguente definizione.

Definizione 1. Un punto è ciò che non ha parti.

Il punto, l'oggetto geometrico più semplice, è posto all'inizio della trattazione come monade iniziale, ciò da cui partire per costruire tutta la geometria.

La specifica *ciò che non ha parti*, ovvero che non è ulteriormente suddivisibile, diventa però anche un'ipotesi fondazionale per il metodo logico deduttivo. In base a questo metodo siamo abituati, da Euclide in poi, a prendere oggetti complessi e studiarli scomponendoli in componenti più semplici; è procedimento tipico e probabilmente caratteristico della nostra specie umana.

Nella definizione si postula che oltre il punto non si può scendere, non è ulteriormente semplificabile.

Ciò non toglie, come vedremo nel seguito, che nel processo di riduzione al punto ci possiamo portare appresso delle specifiche dell'oggetto più complesso, che arricchiranno il punto di proprietà fondamentali per la teoria che stiamo considerando.

Questo "accordo logico" di partenza è presente in quasi ogni teoria conoscitiva umana. Si pensi ad esempio alla moderna teoria del Big Bang con la quale la fisica cerca di spiegare la nascita e lo sviluppo del nostro universo. In essa si postula un inizio in cui tutto è concentrato in un punto; in frazioni infinitesime di secondi questo punto esplose e da origine al *Tutto*. Anche in questa teoria, del punto iniziale e dei primi infinitesimi di secondo nulla si può dire.

Qualcosa di più riescono a dire, con il linguaggio dell'arte, poeti e scrittori, come ad esempio Italo Calvino nel pezzo *Tutto in un punto* della *Quarta Cosmologica*.

"In principio Qfwfq stava concentrato in un punto insieme a tutte le altre persone esistenti. Non proprio insieme, bensì sovrapposti: ogni punto di una persona coincideva con gli altri punti di tutte le altre persone. Questa situazione non favoriva la socializzazione: alla fine ci si riduceva solo al "buongiorno" e "buonasera" e si avevano amicizie solo con un numero ristretto di persone. Tra le persone si poteva individuare la signora Ph(i)Nko, ricordata molto bene da Qfwfq per la sua bellezza e la sua simpatia. Un giorno la bella signora Ph(i)Nko disse: "Ragazzi, avessi un po' di spazio, come mi piacerebbe farvi le tagliatelle!". Tutti notarono il movimento delle sue braccia e allo spazio che occupavano. In quel momento il punto, contenente tutti, si espanse, catapultò tutti ai quattro angoli dell'universo e dissolse la signora in luce e calore. Proprio lei che in un impeto d'amore generale aveva dato il via al tempo, allo spazio, all'universo e alla gravitazione universale".

In questo bel brano Calvino fa capire che, pur non essendo ulteriormente riducibile, il punto contiene informazioni che sono frutto di una storia futura, di concetti che si svilupperanno successivamente, e che, nel processo di conoscenza, dovremo considerare.

Nel punto Calvino mette parole come socializzazione, movimento, luce, calore, ... e pure le tagliatelle!

Tanta geometria moderna si occupa di punti, o meglio di *punti grassi* (fat points) o *schemi zero-dimensionali*. Con questo si intende punti che incorporano caratteristiche e qualità di oggetti più

complessi. Per ora consideriamo il punto come nella definizione di Euclide, qualcosa da cui partire ma di cui non dire altro. Nel seguito, studiando oggetti geometrici più sofisticati, potrà venir utile parlare della natura dei loro punti, in particolare di alcuni più significativi.

In Grecia, l'origine delle cose

Le curve sono argomento di studio geometrico molto antico e centrale in tutta la storia del pensiero. Nell'uso comune curva significa linea non retta; nell'evoluzione del linguaggio matematico, che tende sempre ad eliminare le eccezioni affermando una veduta di continuità, la parola curva è divenuta sinonimo di linea, e la retta è un caso particolare di linea.

Nell'antica Grecia, in particolare nella scuola di Pitagora (fondata nel 540 a.C.) a Metaponto, la curva si pensava costituita di punti-monadi, corpiccioli elementari di piccola estensione; a quel tempo la conoscenza era di tipo empirico, non ancora "razionalizzata" o resa astratta.

In parallelo, nella vicina scuola di Elea, ora in provincia di Napoli, Parmenide e Zenone studiavano concetti geometrici da un punto di vista sempre più ideale, sostenendo che il punto è senza estensione, la linea non si ottiene sommando dei punti ed è pura lunghezza senza larghezza, la superficie non ha spessore, e così via.

Come ci raccontano i manuali di filosofia la direzione razionalista e astratta viene criticata e osteggiata dai Sofisti, come Protagora d'Abdera. Questi sosteneva, ad esempio, che le vere linee hanno una certa larghezza e differiscono dal concetto dei matematici. Il cerchio deve avere non un punto, ma un piccolo tratto a comune con la tangente, come si evince empiricamente osservando una ruota che insiste per un piccolo tratto sul fondo stradale.

Aristotele fa spesso sue le osservazioni critiche dei sofisti; e si arriva in seguito a prese di posizione estreme come quella di Sesto Empirico, della corrente degli Scettici, che scrive addirittura un libro dal titolo *Adversus Geometras*.

Nel frattempo i filosofi razionalisti, come Democrito e Platone, si ispirano sempre più alla Matematica e alla Geometria, sostenendo la realtà degli Intelleggibili o delle Idee; la parola greca idea (= ἰδέα) significa originariamente schema o figura matematica.

Lo svilupparsi, a fianco della visione empirica, di una visione più razionale o ideale avviene in contemporanea ad un altro grande mutamento culturale. Il sapere, discusso e tramandato per via orale (epos), comincia a essere scritto (logos) e a poter essere quindi conservato e scambiato attraverso papiri. L'affiancarsi del logos all'epos, simbolicamente fatto iniziare con Omero, trova in Platone, Archimede, Euclide ed altri una perfetta realizzazione.

Gli Elementi di Euclide, assieme al Metodo di Archimede o al Trattato sulle Coniche di Apollonio, sono i primi esempi di formalizzazione scritta di un metodo che consiste nel prendere alcuni concetti fondamentali, insiti in qualche modo, magari attraverso l'esperienza, nella mente umana, e di formalizzarli in maniera astratta e *a priori* attraverso poche definizioni e postulati, chiari e non contraddittori. La seconda definizione degli Elementi è quella di curva, o linea.

Definizione 2. Una linea è lunghezza senza larghezza

Poco oltre troviamo un'altra definizione di linea, che deve però essere preceduta da quella di superficie.

Definizione 5. Una superficie è ciò che ha lunghezza e larghezza

Definizione 6. Gli estremi di una superficie sono linee

Notiamo qui una dicotomia spesso presente in geometria: la linea può essere descritta in sé o come parte di un altro oggetto. Bisognerebbe verificare che le due definizioni non sono in contraddizione tra loro; riprenderemo più in dettaglio l'idea di superficie nel prossimo capitolo.

Tra le curve Euclide approfondisce subito il concetto di (linea) retta, con una definizione e due postulati.

Definizione 4. Una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti

Postulato 1. Tracciare una retta da un punto a un altro punto.

Postulato 2. Prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in una retta

Le definizioni 2 e 4 assieme ai postulati 1 e 2 definiscono in maniera precisa la retta. Il punto di vista di Euclide, che è poi ancora quello della Geometria contemporanea, può essere così riassunto: ognuno di noi ha una idea di cosa sia una linea retta, ma per discutere e sviluppare una conoscenza comune formalizziamo quattro caratteristiche che questa retta deve avere e su queste tutti concordiamo senza ambiguità.

A distanza di oltre 2000 anni, l'approccio alla geometria è identico: un libro di testo per le scuole primarie scritto dal collega H. Clemens, assieme al figlio per la Springer, vedi [Geometry for a Classroom], inizia con la definizione di retta come oggetto caratterizzato dalle seguenti proprietà:

[i] Si estende all'infinito in due direzioni (postulato 1)

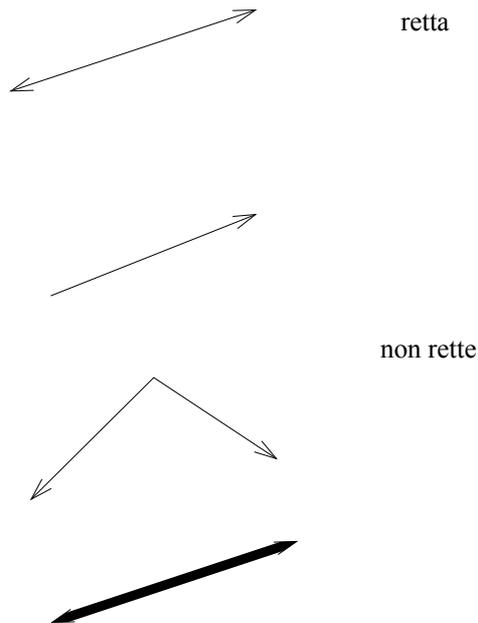
[ii] Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti (postulato 2)

[iii] Dati due punti su una retta il cammino più breve per andare da un punto all'altro è dato dalla retta stessa (la retta è una geodetica) (definizione 4)

[iv] Se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati (definizione 2)

Dunque, con una scelta leggermente diversa delle parole, troviamo gli stessi concetti di Euclide.

Grazie a queste quattro proprietà tutti riescono a distinguere una retta senza ambiguità: lo vediamo con l'aiuto della figura seguente. La prima immagine rappresenta una retta (il simbolo di freccia sta a dire che la linea prosegue all'infinito). Ma le altre tre no: la prima di queste ha un inizio, è una semiretta. Nella terza è evidente come tra alcuni punti il cammino più breve non sia quello disegnato dalla curva. Nella quarta se si toglie un punto non rimangono due pezzi separati (la curva disegnata ha spessore).



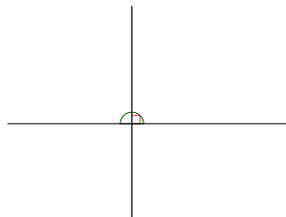
Alle quattro caratteristiche della retta, Euclide ne aggiunge una quinta, il famoso quinto postulato sulle rette parallele. Per formularlo sono necessarie alcune definizioni che prendiamo, non proprio letteralmente, dagli Elementi.

Definizione 8. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due rette incidenti in un punto detto vertice.

Definizione 9. Se le due rette che comprendono l'angolo vengono a coincidere l'angolo si dice piatto e la sua misura è π (misura in radianti; si può anche scegliere la misura in gradi, ovvero 180 gradi).

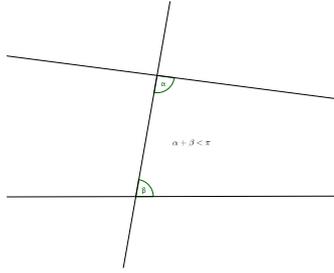
Angoli più piccoli hanno misure in proporzione; ad esempio abbiamo la seguente definizione.

Definizione 10. Quando una retta innalzata su un'altra retta forma angoli adiacenti uguali fra loro ciascun angolo formato si dirà retto con misura $\pi/2$ (in gradi 90°).



Con la definizione di angolo retto possiamo quindi scrivere:

Postulato 5. E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti.



Che è equivalente a dire: data una retta e un punto esterno ad essa, esiste una sola retta passante per questo punto e parallela alla retta di partenza.

Per quasi duemila anni molti matematici e filosofi hanno cercato di provare che questo postulato fosse in qualche modo deducibile, con la logica, dai precedenti. Alla fine dell'800 ci si rese conto che il quinto postulato è indipendente e non derivabile, la sua assunzione è parte integrante della geometria euclidea. La sua negazione, o meglio una sua diversa formulazione, porta alla creazione delle geometrie non euclidee, che tratteremo in un capitolo successivo.

Definizioni e Postulati sono il tentativo di mettere su carta, in maniera semplice e non contraddittoria, le idee, le forme geometriche di Platone, presenti in qualche modo a priori nella mente umana (o all'esterno della caverna). Descrivere queste forme fondamentali, anche solo attraverso poche proprietà, garantisce ad esse una esistenza ideale e permette a noi di costruire una scienza universalmente accettata, che modella la realtà e la interpreta.

Teorema di Pitagora, l'astrazione crea innovazione

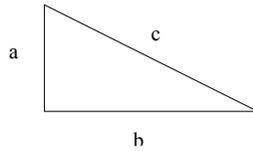
A partire dal concetto di retta, o meglio ancora dalle sue quattro proprietà caratteristiche, con deduzioni logiche possiamo ora cominciare a fare della geometria; a formulare e provare proposizioni e teoremi. Prendiamo ad esempio il più famoso dei teoremi della geometria, il Teorema di Pitagora.

Per introdurlo abbiamo ancora bisogno di qualche preliminare che deriviamo dal concetto di retta. Una *semiretta* è data da un punto su una retta, detto *vertice*, e da una delle due parti in cui la retta viene divisa dal punto; un *segmento* è il luogo dei punti di una retta compresi tra due punti, detti *vertici*; un *triangolo* è dato da tre segmenti tali che ogni vertice di un segmento è vertice di uno e uno solo degli altri.

I segmenti possono essere confrontati sovrapponendoli; in particolare, attraverso la scelta di un pezzo predeterminato come unità di misura, si giunge ad una misura degli stessi. Ad esempio un segmento ha lunghezza tre metri se il segmento unità di misura del metro, determinato dall'*Ufficio Internazionale dei Pesi e delle Misure* di Sévres, può essere sovrapposto tre volte, senza intersezioni e senza scarti, sul segmento di partenza.

La possibilità di misurare la lunghezza di segmenti e la definizione di angolo retto ci permettono di formulare il teorema.

Teorema di Pitagora. Dato un triangolo con un angolo retto, siano a e b le lunghezze dei segmenti che generano l'angolo retto (cateti) e c la lunghezza del segmento opposto ad esso (ipotenusa).



Vale la seguente identità

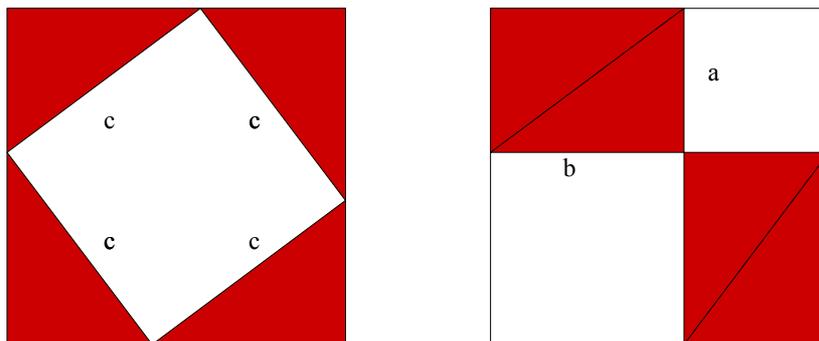
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

In altre parole, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti del triangolo è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

E' sicuramente il teorema più famoso della storia della geometria; un risultato che gli ingegneri usano frequentemente, dal tempo dei babilonesi e degli egizi. Conosciuto da tutti sin dalle scuole medie, stupisce comunque sempre per la originalità e direi anche per la stravaganza dell'enunciato; a chi mai è venuta in mente una tale relazione? Probabilmente è stato notato per caso che la relazione valeva per qualche triangolo particolare, ad esempio sulla tavoletta babilonese rappresentata nel capitolo uno. La fantasia, combinata ad una buona audacia, ha permesso a Pitagora di razionalizzare l'esperienza e di dimostrare l'enunciato per ogni triangolo rettangolo.

Così facendo però ci si avventura pericolosamente verso cose che l'uomo del tempo non riesce a gestire. Tra queste il fatto che la diagonale di un quadrato di lato unitario ha lunghezza radice quadrata di due: questo è un numero non razionale, ovvero non esprimibile come multipli o frazioni dell'unità di misura, che i pitagorici dicevano *non commensurabile*.

Esistono oggi decine di prove di questo teorema, le prime probabilmente ottenute con semplice manipolazione sulle aree, forse arrangiando piastrelle su un pavimento. La figura seguente ne fornisce, in quest'ottica, una abbastanza semplice che andiamo a spiegare.



Si prendono due quadrati uguali di lato $a + b$ e ad entrambi si tolgono quattro triangoli rettangoli uguali con cateti a e b , evidenziandoli col colore, ma in due modi diversi. I quadrati iniziali hanno la stessa area, ad entrambi vengono tolti gli stessi quattro triangoli, la parte bianca restante deve quindi avere la stessa area a sinistra e a destra.

L'area del quadrato bianco della figura sulla sinistra, che è il quadrato costruito sull'ipotenusa, ha dunque la stessa area che la somma dei due quadrati bianche della figura a destra, che sono i due quadrati costruiti sui cateti.

Credo sia bene fare un'osservazione: la prova si poggia su alcune assunzioni geometriche, in particolare sulla definizione di quadrato e sulla possibilità di costruirlo. Un quadrato è un quadrilatero con i lati uguali e con quattro angoli interni retti. L'esistenza e la costruibilità del

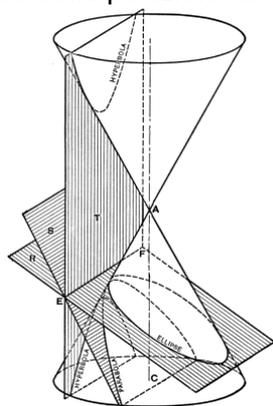
quadrato non sono assolutamente ovvie, anzi si può dimostrare che sono equivalenti al quinto postulato di Euclide sulle parallele. Questo fatto fu notato e utilizzato dal matematico italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1677-1733). In altre parole il Teorema di Pitagora è un risultato che possiamo dimostrare se valgono i quattro assiomi di retta e il quinto postulato, ovvero in quella che oggi chiamiamo geometria euclidea. Noteremo più avanti che il teorema è falso nelle geometrie non euclidee.

Altre curve note ai greci

Negli Elementi troviamo la descrizione di tante altre curve, a cominciare dalla circonferenza, così definita:

Definizione 15. Cerchio è una figura piana compresa da una sola linea, tutte le rette che incidono sulla quale, condotte da un solo punto tra quelli che sono posti all'interno della figura, sono uguali tra loro.

Apollonio di Perga dedica un intero trattato alle curve che si ottengono come intersezione di un cono con un piano. Le chiama per questo (sezioni) coniche e le distingue con i nomi di ellisse, parabola o iperbole, a seconda della posizione del piano che taglia il cono, come in figura.

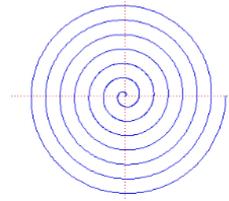
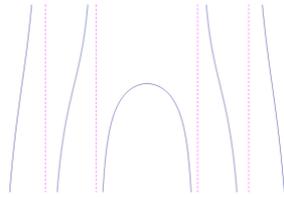


Sezioni coniche

Nell'antica Grecia si studiavano curve speciali utili per risolvere problemi matematici. Le coniche sono state studiate da Menecmo (380-320 a.C.) per risolvere il problema della duplicazione del cubo, ovvero individuare il lato di un cubo avente volume doppio di un cubo dato. Egli diede una semplice soluzione come intersezione di una parabola con un'iperbole. Con l'uso della geometria analitica, che introdurremo tra poco, si vede facilmente che $\sqrt[3]{2}$ si ottiene come intersezione tra la parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ e l'iperbole $xy = 1$.

Si racconta che Menecmo, alla richiesta da Alessandro Magno di fornirgli un metodo facile per capire la geometria, abbia risposto: *per viaggiare da un luogo all'altro ci sono strade per il Re e strade per il popolo, ma in geometria c'è un'unica strada per tutti.*

La duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo sono due dei famosi problemi di Delo per la cui soluzione il matematico Diocle (240 -180 a.C.) costruisce la curva cissoide e Nicomede la concoide. Per la quadratura del cerchio, Ippia (443-393 a.C.) e Dinostrato (390-320 a.C.) studiano la quadratrice, ed Archimede (287-212 a.C.) la spirale. Le figure seguenti rappresentano le due curve, sono state prese dal sito web dell'Università di St Andrew, la cui visita suggerisco al lettore: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html>



Il problema della costruzione di una curva

La definizione e lo studio di oggetti geometrici astratti pone la questione della loro reale esistenza; abbiamo già accennato alla posizione critica al riguardo della scuola dei sofisti.

Approfondiamo questo problema chiedendoci, ad esempio, se esiste davvero un cerchio e come possiamo eventualmente costruirlo. Una ruota, il profilo della luna piena e tanto altro si avvicinano all'idea di cerchio, ma lo sono davvero? Per quanto riguarda la sua costruzione Euclide dribbla il problema postulandola:

Postulato 3. Descrivere un cerchio con dati centro e raggio.

Raffaello, nel dipinto **La scuola di Atene**, raffigura Euclide nell'atto di disegnare un cerchio con l'aiuto di un compasso, ovvero uno strumento articolato che tiene fissa la distanza tra due punti.



Raffaello, particolare della Scuola di Atene

In verità gli storici della scienza sostengono che il vero compasso sia una invenzione araba successiva ad Euclide; un meccanismo più rudimentale, con un filo inestensibile o una sbarra di metallo, fissati ad un estremo e facendo muovere l'altro, era sicuramente noto ai greci.

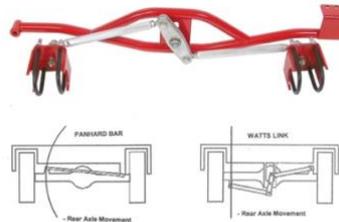
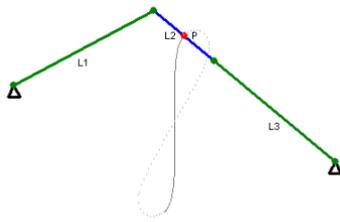
Si dice che Giotto avesse stupito il suo maestro Cimabue disegnando cerchi perfetti a mano libera; un suggerimento su come potrebbe averlo fatto lo troviamo su un divertente video di YouTube:

<https://www.youtube.com/watch?v=zR3wbEudD1I> .

L'esistenza di una linea retta per due punti veniva anche ipotizzata da Euclide nel primo postulato. In questo caso, il problema della costruzione è per molti versi più delicato. Molti suggeriranno di usare una riga, ovvero un pezzo di materiale tagliato lungo una linea retta: ma come faccio a costruire una riga? Ci si chiede quindi se è possibile costruire un compasso per rette, ovvero un meccanismo articolato fatto di barre rigide incernierate tra loro alle estremità e eventualmente al piano, dove una estremità si muova liberamente lungo una linea retta.

Un primo tentativo in questa direzione vien compiuto addirittura da James Watt (1736-1819), l'inventore della macchina a vapore. Egli inserisce nel brevetto anche la descrizione di un meccanismo articolato a tre barre, noto ora come Parallelogramma di Watt, nel quale il punto mobile centrale è vincolato a muoversi approssimativamente in linea retta. L'immagine sulla sinistra della figura seguente illustra il meccanismo di Watt. Sulla destra una applicazione che, nelle

sospensioni automobilistiche, esclude movimenti laterali indesiderati durante le oscillazioni verticali dell'assale del veicolo.

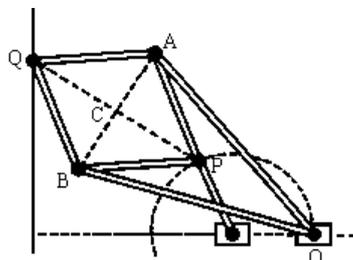


Meccanismo di Watt

Scrive Watt al riguardo: *Ho intravisto il modo di far muovere un pistone su e giù perpendicolarmente solo fissandolo a un pezzo di ferro sulla trave, senza catene o guide perpendicolari [...], è uno dei più geniali e semplici congegni meccanici che io abbia inventato*

Questo meccanismo non genera un vero movimento rettilineo e, in verità, nemmeno Watt ha mai sostenuto che lo facesse; esso genera una curva speciale, detta "lemniscata di Watt".

Il primo vero meccanismo che disegna una retta fu creato da un ufficiale francese, C.N. Peaucellier (1832-1913). Si tratta di un parallelogramma articolato con sette barre, raffigurato nella figura sottostante. Le barre del quadrilatero AQBP sono tutte uguali tra loro e così anche le barre OA e OB. Il punto O è fissato al piano mentre il punto P è vincolato a muoversi lungo una circonferenza (incernierandolo su una barra fissata all'altra estremità).



Meccanismo di Peaucellier.

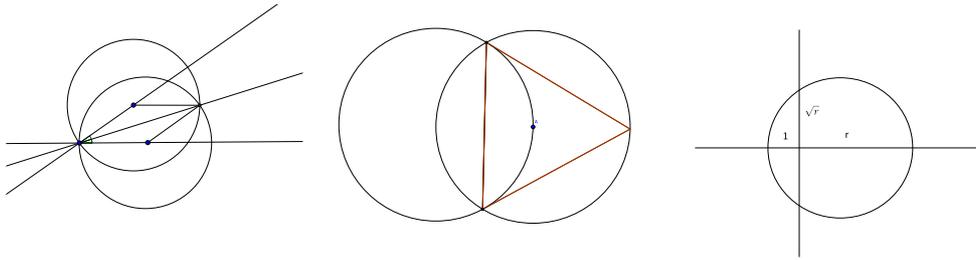
La costruzione si basa su una trasformazione del piano che inverte i punti rispetto a un cerchio, e che manda tutti i cerchi passanti per il centro del cerchio inversore in rette.

Cartesio si pone il problema generale di trovare un compasso meccanico, formato da più barre articolate tra loro, per disegnare una qualunque curva piana. Il problema è stato risolto positivamente nel 1876 da Kempe nell'articolo "On a General Method of describing Plane Curves of the n-th degree by Linkwork". Egli dimostra, in maniera abbastanza semplice, che ogni curva **algebrica** piana può essere disegnata con un meccanismo articolato (linkwork in inglese); la definizione di curva algebrica è di Cartesio e la discuteremo tra poco.

Questo risultato ha numerose applicazioni che sono temi di ricerca centrale oggi in ingegneria meccanica. Consideriamo come esempio il seguente problema: dati nove punti nel piano si può provare che esiste un meccanismo a quattro barre che disegna una curva passante per questi punti; se i punti sono più di nove il problema potrebbe non ammettere soluzioni. Per decenni molti ingegneri hanno studiato come, dati i nove punti, si possa trovare la curva (o le curve) passanti per essi e il meccanismo che la genera. Alla fine del secolo scorso la General Motor finanziava queste

ricerche per produrre dei tergitristalli ottimali; nel 1992 A. Sommese e altri dimostrarono che dati 9 punti (in posizione generica) ci sono al più 1442 possibilità; più recentemente, nel 2010, una nuova ricerca ha ridotto le possibilità a 64!

Possiamo dunque convenire sul fatto che sia possibile costruire una retta per due punti e un cerchio di dato raggio e centro con una riga e un compasso. I matematici dell'antica Grecia cercavano di utilizzare questi due strumenti per risolvere altri problemi; più precisamente cercavano di **costruire con riga e compasso** punti e figure nel piano che fossero soluzioni di problemi geometrici. Con questo metodo bisecavano un angolo (ovvero trovavano un angolo di ampiezza la metà di un angolo dato), costruivano triangoli equilateri, trovavano la radice quadrata di una lunghezza e tanto altro. Sono esercizi che impariamo a fare nelle scuole, la figura seguente rappresenta tre esempi.



Inspiegabilmente per l'epoca, la costruzione con riga e compasso non riusciva a risolvere alcuni problemi leggermente più generali, i famosi problemi di Delo. Tra questi la trisezione di un angolo, la costruzione della radice cubica di un numero, la costruzione di un poligono regolare con sette lati ed anche la quadratura del cerchio (ovvero costruire un poligono di area π). Il problema della costruzione della radice cubica del numero due si racconta sia nato dalla richiesta dell'oracolo di Apollo, nel tempio di Delo, di costruire un altare di forma cubica doppio rispetto a quello esistente.

Questi problemi non possono infatti venir risolti con riga e compasso; questo fatto segue da una teoria algebrica molto profonda, creata due millenni dopo, da Evariste Galois (1811-1832, che lega la ricerca di radici di polinomi alla Teoria dei Gruppi.

Poco prima di Galois il matematico italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), nel libro *Geometria del Compasso* provò che tutte le costruzioni con riga e compasso si possono ottenere con il solo compasso. Mascheroni, collega all'Università di Pavia di Spallanzani e di Volta, fu un fervente ammiratore di Napoleone. Il teorema che afferma che "i baricentri dei triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di un triangolo qualunque formano un triangolo equilatero" è attribuito a Napoleone, sebbene molti storici propendano per il fatto che sia stato effettivamente dimostrato da Mascheroni o dal matematico franco-torinese Giuseppe Lodovico Lagrangia (Lagrange).

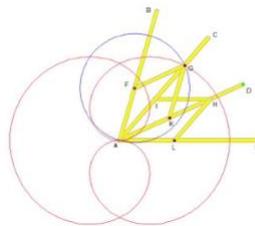
Cartesio e la Géométrie

Nel '600 due grandi matematici francesi, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), rivoluzionano la teoria dello studio delle curve e, di conseguenza, quello della geometria. Non è facile attribuire la paternità delle tante scoperte e dei nuovi metodi all'uno o all'altro; su questo furono essi stessi protagonisti di una disputa feroce, descritta in tanti libri di storia della matematica. In una nota lettera del 1619 al collega fisico, filosofo e medico olandese Beeckman, Cartesio scrive: *così, io spero di dimostrare che, nella quantità continua, alcuni problemi possono venire risolti con le sole linee rette o circolari; che altri non possono essere risolti se non con altre linee curve, ma che nascono da un movimento unico e, quindi, possono essere tracciate per mezzo di nuovi compassi, che ritengo non meno certi e geometrici del compasso ordinario con cui si tracciano i cerchi; che altri,*

infine, non possono essere risolti se non per mezzo di linee curve generate da movimenti differenti non subordinati reciprocamente fra di loro; linee che, come la quadratrice, assai nota, sono soltanto immaginarie. Ritengo che non possa essere immaginato nulla che non possa venire risolto mediante curve di questo tipo; spero, però, di dimostrare quali problemi possano venire risolti in questo o in quel modo e non in un altro: così, in geometria quasi nulla rimarrà da scoprire. Si tratta, certo, di un'opera infinita, e non di una sola persona; un'opera tanto incredibile quanto ambiziosa. Nell'oscuro caos di questa scienza ho scorto però un non so quale lume, grazie al quale ritengo si possano dissipare le tenebre più dense.

Cartesio dunque, nel solco della tradizione greca, vuole risolvere problemi matematici con l'uso delle curve, dividendoli in tre classi. La prima è quella dei problemi risolvibili con riga e compasso. La seconda, la più interessante, raccoglie tutti i problemi che possono essere risolti da curve tracciabili con un singolo moto, o alternativamente con l'uso di *nuovi compassi*; chiama queste *curve ammissibili o geometriche*. Nella terza classe mette i problemi che non stanno nelle prime due e chiama queste *curve immaginarie o meccaniche*, tra queste la quadratrice e la spirale.

Cartesio inizia a studiare le curve con un approccio costruttivo e dedica molto tempo alla costruzione effettiva di nuovi compassi; tra questi il *trisetttore*, che disegna una curva che triseca un angolo (vedi figura)



L'idea di partenza di Cartesio fu quella di introdurre quello che chiamiamo un **sistema di riferimento (o di assi) cartesiano** e le **coordinate cartesiane**. Preso un piano egli considera su di esso una copia di rette r e r' intersecantesi perpendicolarmente in un punto O . Associa quindi ad ogni punto P del piano una coppia di numeri (x, y) , le coordinate cartesiane del punto in questo sistema di riferimento. (Specificatamente la x corrisponde alla distanza del punto di intersezione di r con la retta per P perpendicolare a r da O . La y corrisponde alla distanza del punto di intersezione di r' con la retta per P perpendicolare a r' da O .)

Successivamente decide di pensare una curva nel piano attraverso un'equazione; questa è la grande rivoluzione che da origine a quella che oggi viene definita **Geometria Analitica** o **Geometria Algebrica**. Leggiamo il pezzo di *La Géométrie* (Livre secon, p.19), il libro che ha come prefazione "Il discorso sul Metodo", in cui introduce questo concetto.

Potrei ora dare diversi modi per tracciare o concepire delle linee curve, ogni curva più complessa che le precedenti, ma penso che il modo migliore per raggrupparle e classificarle in ordine tutte assieme sia riconoscendo il fatto che tutti i punti di queste curve che noi chiamiamo geometriche, ..., devono avere una relazione con tutti i punti di una retta, che deve essere espressa per mezzo di una singola equazione.

Nelle righe successive, più precisamente, Cartesio propone che una curva nel piano sia determinata, fissato un sistema di riferimento, dai punti le cui coordinate cartesiane (x, y) soddisfano una equazione $f(x, y) = 0$, dove $f(x, y)$ è una funzione nelle variabili x e y .

Ad esempio l'equazione $3x - 2y + 6 = 0$ descrive una retta, mentre l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ descrive un cerchio.

La funzione $f(x, y)$ si dice *equazione cartesiana* della curva. Se la funzione è un polinomio la curva viene detta *algebraica* e il grado del polinomio viene detto *grado o ordine della curva*.

Si osservi che quando Cartesio parla di funzioni intende sicuramente funzioni esprimibili come polinomi; inoltre le curve che chiamava in una prima fase geometriche, ovvero costruibili con i nuovi compassi, sono di fatto curve algebriche, come provato da Kempe nel teorema enunciato precedentemente.

Non tutte le funzioni sono polinomiali, si pensi ad esempio alla funzione esponenziale o alle funzioni trigonometriche; queste funzioni, dette anche trascendenti, nascono pochi anni dopo Cartesio nei lavori di Leibniz, Newton e tanti altri che creano il calcolo differenziale e integrale.

In questa sezione e in quella successiva considereremo curve definite da equazioni polinomiali.

In alcuni casi, attraverso opportuni passaggi algebrici, è possibile ricavare dall'equazione $f(x, y) = 0$ una delle due variabili come funzione rispetto all'altra. Ad esempio da $3x - 2y + 6 = 0$ si ricava facilmente che $x = x(y) = 2/3y - 2$; e anche $y = y(x) = 3/2x + 3$. In questo caso si dirà che la curva è descritta come *grafico* (della variabile dipendente in funzione di quella che varia liberamente). La descrizione di una curva come *grafico* è molto utile, ma è possibile solo sotto certe condizioni di regolarità, studiate in un celebre risultato dal matematico italiano Ulisse Dini (1845-1918): la curva è un *grafico* in un intorno dei suoi punti non singolari, che definiremo tra un attimo.

La definizione di curva come luogo degli zeri di una funzione può essere ricondotta a quella greca di termine o bordo di una superficie.

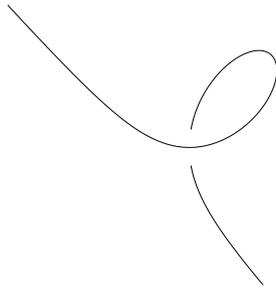
Se invece si pensa ad una curva come ad un insieme di punti o monadi, equivalentemente ad un punto in movimento, si descrive la curva come i punti del piano cartesiano le cui coordinate $(x(t), y(t))$ sono descritte da funzioni $x(t)$ e $y(t)$, al variare di un parametro continuo t . Queste equazioni si dicono *equazioni parametriche* della curva.

Le equazioni $x(t) = 2t + 2$, $y(t) = 3t$, ad esempio, sono le equazioni parametriche della retta data precedentemente in forma cartesiana $f(x, y) = 3x - 2y + 6$. Le equazioni $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$ descrivono, al variare del parametro t , la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$; si noti che queste funzioni, dette trigonometriche, non sono polinomiali. E' anche possibile trovare delle equazioni parametriche della circonferenza esprimibili come (quozienti) di polinomi, lo vedremo in una sezione successiva.

Nella Geometria Cartesio dimostra, tra tanti altri risultati, il fatto abbastanza stupefacente che le curve di grado due sono tutte e sole le coniche (con l'avvertenza di chiamare coniche (degeneri) anche le unioni di due rette). La geometria greca delle coniche si ingloba dunque in questa teoria più generale, lo studio delle coniche si riduce semplicemente allo studio dei polinomi in due variabili di grado due.

Cartesio si avventura quindi nello studio delle curve di ordine superiore, riconsiderando con la sua definizione molti esempi classici e creandone di nuovi. Tra questi il *Folium* (foglia), la cui equazione cartesiana è $x^3 + y^3 = 3axy$, mentre quella parametrica è $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

Cartesio sbagliò a disegnare questa foglia, convinto che si ripetesse uguale nei quattro quadranti; probabilmente anche per la poca dimestichezza con i numeri negativi. Il primo a disegnare correttamente il Folium, come in figura, fu Christiaan Huygens, di cui parleremo tra breve.



Folium di Cartesio

Il Folium di Cartesio è una curva di grado tre, una cubica, che presenta una novità rispetto alle curve di grado uno (rette) e di grado due (coniche): ha un *punto singolare*. Vi sono tanti modi, ovviamente equivalenti, per definire cosa è una singolarità; per rimanere con gli strumenti e il metodo di Cartesio lo faremo utilizzando il concetto di retta tangente ad una curva. Si noti che la curva non può essere descritta come grafico in un intorno dell'origine delle coordinate.

(Per una maggiori descrizione del folium ed altre curve introdotte da Cartesio e Fermat rimando ancora il lettore al sito web dell'Università di St Andrew: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html>.)

Pensare alle curve come luogo di zeri di una equazione introduce l'uso dell'algebra nello studio della geometria, chiarendo e risolvendo in maniera estremamente efficace e rigorosa molti problemi; tra questi la questione delle rette tangenti e dei punti singolari che vedremo nel prossimo capitolo.

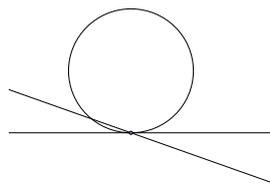
Questo rivoluzionario modo di affrontare la Geometria si impone rapidamente e ha raggiunto oggi livelli di raffinatezza e astrazione sorprendenti che discuteremo nel quarto capitolo.

Le novità introdotte da Cartesio sono naturali conseguenze delle nuove tecniche algebriche per la ricerca delle radici di un polinomio, condotte con successo nel '500 da italiani quali Cardano, Tartaglia, Scipione del Ferro e Ferrari.

Retta tangente e punti singolari

Il concetto di retta tangente ad una curva in un suo punto è molto delicato e ricco di implicazioni matematiche. Cartesio a riguardo scriveva: [trovare la tangente ad una curva è] *il problema più utile e generale, non solo tra quelli che conosco, ma anche tra quelli che ho mai desiderato di conoscere in Geometria*.

Negli Elementi di Euclide troviamo la definizione di retta tangente ad un cerchio, più precisamente la Definizione 2 del Libro 3 recita: *si dice che è tangente ad un cerchio una retta, la quale raggiunge il cerchio e, prolungata, non lo taglia*.



Si intende una retta che partendo da un punto esterno raggiunge, ovvero giunge a, un punto comune con il cerchio, e poi proseguendo non lo taglia ulteriormente, ovvero non giunge ad un secondo punto comune. Si potrebbe anche dire che non esiste nessuna altra retta tra la tangente così definita e la circonferenza.

La definizione di Euclide per il cerchio può essere estesa ad una curva algebrica nel piano, che non sia una retta: preso un suo punto sulla curva si considerano tutte le rette passanti per questo punto; la tangente, se esiste, è quella retta che ha solo quel punto in comune con la curva (almeno in un piccolo intorno). Cartesio in verità usa un metodo leggermente diverso, ovvero cerca una circonferenza che abbia in comune con la curva solo un punto e quindi definisce la retta tangente come la retta per il punto tangente alla circonferenza, riconducendosi dunque a Euclide.

Pensare alle curve in termini algebrici permette di porre il problema in un quadro generale e di trovare soluzioni molto precise. L'intuizione geometrica viene sostituita dal calcolo algebrico astratto che, se condotto con accuratezza, restituisce in maniera meccanica e precisa la soluzione. L'idea di fondo è quella che se una retta non incontra ulteriormente la curva la deve incontrare nel punto con maggiore **molteplicità**.

Il concetto di molteplicità algebro-geometrica è delicato e molto studiato, nel seguito cerchiamo di darne una prima idea. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano che abbia l'origine nel punto della curva che vogliamo studiare, dunque $P = (0,0)$. La curva algebrica è definita come i punti le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione $f(x, y) = 0$; supponiamo che f non sia lineare, ovvero che la curva non sia una retta. Le rette passanti per P sono le curve di equazione $sy - tx = 0$, per opportune costanti t, s .

I punti in comune tra la curva e la retta si ottengono come le soluzioni di entrambe le equazioni: $f(x, y) = 0$ e $sy - tx = 0$. Dalla seconda equazione ricaviamo la y (o la x) in funzione di x (o di y) e sostituiamo nell'equazione $f(x, y) = 0$. Nel primo caso otteniamo un polinomio in x , che denoteremo con $p(x)$, che dipenderà anche da t, s ; nel secondo un polinomio in y , che denotiamo con $q(y)$. Il polinomio $p(x)$ (e $q(y)$) si annulla in 0 per ogni t, s , dato che sia la curva che le rette passano per $P = (0,0)$. Dunque $p(x)$ e $q(y)$ si possono scrivere nella forma $p(x) = x \cdot g(x)$ e $q(y) = y \cdot h(y)$, con $g(x)$ e $h(y)$ polinomi, che anche dipendono da t, s , ovvero dalla retta.

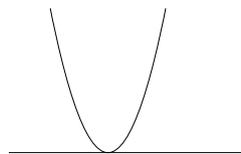
La cosa interessante è che per opportune rette uno o entrambi i polinomi g e h si annullano in 0. Se la retta per cui si annullano è unica allora il punto P si dice *non singolare o liscio o di molteplicità uno* e la retta individuata è *la tangente alla curva in P* .

Se la retta non è unica il punto si dice *singolare o di molteplicità maggiore a uno o multiplo*; in questo caso si può far vedere che 0 è una radice di $g(x)$ e $h(y)$ per ogni retta e dunque che ogni retta interseca la curva con molteplicità maggiore di due.

Anche nei punti singolari si può definire un concetto di retta tangente; intuitivamente sono le rette che incontrano la curva nel punto con molteplicità minima.

Consideriamo tre esempi, il primo di un punto liscio, i secondi di punti singolari.

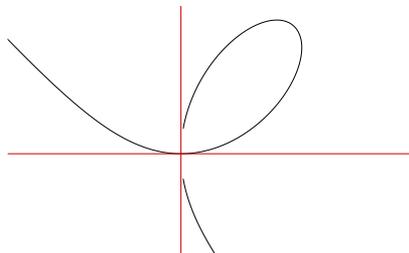
La parabola data dalla equazione $y - x^2 = 0$ passa per il punto $P = (0,0)$, che è un punto liscio con tangente $y = 0$.



Per provarlo cerchiamo i punti comuni tra le rette $y - tx = 0$ e la parabola: sostituendo nell'equazione della parabola il valore $y = tx$; otteniamo il polinomio $p_t(x) = x(t - x)$. Ma $g_t(x) = (t - x)$ si annulla in 0 se e solo se $t = 0$; dunque tutte le rette, eccetto la retta $y = 0$,

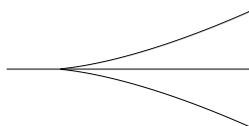
intersecano la curva con molteplicità uno. Si noti che anche l'intersezione con la retta $x = 0$ ha molteplicità uno. Quindi il punto è liscio e la sua tangente è data dalla retta $y = 0$.

Il Folium di Cartesio, di equazione $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, ha in $P = (0,0)$ un punto singolare.



Sostituendo il valore $y = tx$ al posto della y nell'equazione cartesiana otteniamo il polinomio $p(x) = -3tax^2 + (1 + t^3)x^3 = x(3tax + (1 + t^3)x^2)$. Si osserva che 0 è una radice del polinomio $(3tax + (1 + t^3)x^2)$ per ogni valore di t . Quindi tutte le rette intersecano con molteplicità due: il punto $P = (0,0)$ è singolare. Il lettore interessato può dimostrare che le rette $y = 0$ e $x = 0$ sono le uniche due rette che incontrano il Folium con molteplicità tre e si possono quindi considerare come tangenti; questo tipo di singolarità viene chiamata *nodo*.

Un altro esempio di punto singolare è dato dalla curva di equazione $y^2 - x^3 = 0$.



Sostituendo il valore $y = tx$ nell'equazione otteniamo il polinomio $p(x) = t^2x^2 - x^3$. Ogni retta interseca la curva con molteplicità maggiore di due e quindi il punto $P = (0,0)$ è singolare. Per $t = 0$ il polinomio si annulla con molteplicità tre, dunque la retta $y = 0$ può essere considerata come retta tangente nel punto cuspidale. La retta $x = 0$ non è invece una retta tangente alla cuspide. Questo tipo di singolarità viene denominata *cuspidale*.

Il Folium è un esempio cruciale nella storia del pensiero matematico sotto molti aspetti: Cartesio sfidò il suo avversario Pierre Fermat nello studio delle sue tangenti. Fermat, che stava sviluppando un suo metodo per la costruzione delle tangenti, accettò e vinse la sfida.

Il calcolo di Fermat si poggiava su una sorte di gioco di prestigio, usato più tardi da Newton e altri: l'introduzione al principio di un elemento E molto piccolo, *infinitesimo*, la divisione per E , necessaria per semplificare, e quindi la cancellazione di E alla fine del processo, come fosse zero.

Prendiamo ad esempio ancora la parabola $y = x^2$. Per calcolare la pendenza della retta tangente in un qualunque suo punto (x, x^2) consideriamo la corda tra i due punti della parabola (x, x^2) e $(x + E, (x + E)^2)$. La pendenza della corda è data da $\frac{((x+E)^2 - x^2)}{(x+E) - x} = \frac{2xE + E^2}{E} = 2x + E$. Cancellando E otteniamo che la pendenza della tangente in ogni punto (x, x^2) è data da $2x$; che conferma il nostro calcolo precedente in zero.

Il metodo si applica facilmente a tutte le curve di equazione $y = p(x)$, con $p(x)$ un polinomio: in questo caso il termine di grado più alto in x nel polinomio $p(x + E)$ viene cancellato da quello nel

polinomio $p(x)$, gli altri termini possono quindi essere divisi per E . La cancellazione di tutti i termini con E , o meglio il mandare E al limite zero, fornisce la pendenza della tangente alla curva o, come si dirà in seguito, **la derivata di $p(x)$ in x** , denotata con $\dot{p}(x)$.

Questa procedura fece infuriare i filosofi dell'epoca, in particolare Thomas Hobbes, che pensavano si stesse affermando che $2x + E = 2x$, sebbene $E \neq 0$. In termini moderni oggi diciamo che $\lim_{E \rightarrow 0} (2x + E) = 2x$, ma il concetto di limite di una funzione nasce molto più tardi. L'efficacia del metodo di Fermat portò a non dar troppo conto delle critiche, anche perché le speculazioni matematiche di Thomas Hobbes erano in generale sbagliate.

Sollecitato dalla sfida posta da Cartesio, Fermat nel 1638 estende il metodo anche a curve date da una equazione generica $f(x, y) = 0$; per la generalità di questi suoi calcoli può essere senz'altro indicato tra i fondatori del calcolo differenziale.

Abbiamo dunque definito i punti singolari di una curva algebrica piana. I matematici estendono questo concetto anche a oggetti geometrici più generali, come le curve nello spazio, oppure le superfici e le varietà di dimensione più alta, che vedremo nel seguito. Si scopre ben presto quanto sia affascinante e complesso studiare questa nuova idea geometrica, e quanto sia utile sia per lo sviluppo della matematica che per innumerevoli applicazioni in altri settori. Gradualmente prende vita una teoria denominata *teoria delle singolarità*, detta anche *teoria delle catastrofi*; nella metà del secolo scorso due grandi scuole si confrontano su questi temi, quella francese, diretta da René Thom, e quella russa, diretta da Vladimir Arnold.

Il primo obiettivo di queste teorie è quello di capire bene le singolarità, ovvero di classificarle. Classificare gli oggetti di studio è un'attività che piace molto a specialisti di diverse discipline scientifiche e i matematici non sono da meno.

Ma cosa si intende per classificazione in questo caso? Significa attribuire caratteristiche numeriche ad ogni punto singolare e dividere le singolarità in classi definite da assegnati valori numerici a queste caratteristiche. Una classificazione è completa se si riesce a far entrare ogni singolarità all'interno di una classe e se è possibile descrivere in maniera esauriente ogni classe.

Prendiamo le singolarità delle curve algebriche piane che abbiamo appena definito. Potremmo dividere queste singolarità in classi a seconda della loro molteplicità, un numero che abbiamo definito per ogni punto della curva. I punti con molteplicità uno sono i punti lisci, non singolari. Si dimostra senza troppa difficoltà che un punto di molteplicità due può essere solo un nodo o una cuspide, in un opportuno sistema di coordinate.

Per proseguire si costruiscono esempi di singolarità di molteplicità tre e oltre, fin quando ci sembrano sufficienti per descrivere tutte le possibilità delle classi. La creazione di esempi è uno degli aspetti più creativi e innovativi della matematica; ed è anche piuttosto difficile, non come pensare ad un asino che vola o a un angelo con ali e aureola. La fantasia deve rimanere dentro le regole del gioco, soddisfare alcune richieste e vincoli (in questo caso ad esempio avere una molteplicità fissata) e potersi esprimere in maniera chiara nel linguaggio universale e operativo della matematica.

V. Arnold, R. Thom ed altri hanno classificato i punti singolari delle curve e delle superfici. La classificazione (di particolari classi) di singolarità in dimensioni superiori sono tra i risultati più importanti della geometria contemporanea.

La teoria delle catastrofi si pone un secondo obiettivo molto ambizioso: studiare quando un punto singolare, di una curva o di un oggetto di dimensioni maggiori, determina, parte o interamente, tutta la curva o l'oggetto che la contiene.

Siamo di fronte ad un rovesciamento di prospettiva, non partiamo più dalla curva ma da un suo punto (speciale) e ci chiediamo se contiene in sé abbastanza informazioni per ricostruire la curva. Qui si manifesta la straordinaria capacità della matematica di "invertire" il ragionamento logico.

Il seguente esempio può dare un'idea di quanto detto. Supponiamo che una curva algebrica piana di grado n , con n intero positivo, abbia un punto singolare di molteplicità n ; allora la curva è formata dall'unione di n rette per quel punto. Il lettore interessato può trovare la dimostrazione di questo nel libro [Sernesi; Geometria 1, capitolo 34].

L'idea che una singolarità, una catastrofe, possa determinare l'oggetto o il fenomeno che la contiene è ingegnosa e ricca di applicazioni in molti campi della scienza moderna. Si pensi ai cambi di stato nella chimica, alle estinzioni o alle mutazioni nei processi della vita, ai buchi neri nella fisica. Verso la metà del secolo scorso molti pensavano che tutto fosse riconducibile a "eventi" eccezionali o singolari; nasce in questo contesto la Teoria del Caos, riassunta efficacemente da Edward Norton Lorenz (1917-2008), matematico e meteorologo, nel famoso titolo di una conferenza: *Può, il batter d'ali di una farfalla in Brasile, provocare un tornado in Texas?*

Galileo Galilei, un nuovo modo di porsi i problemi

Un altro protagonista d'eccezione del diciassettesimo secolo, secolo d'oro per la teoria delle curve e più in generale per lo sviluppo della matematica, è senza dubbio Galileo Galilei (1564-1642). Assieme ai suoi allievi applica la teoria delle curve a problemi di meccanica e più in generale di fisica. Il suo metodo rappresenta una continuità con Platone e con gli esploratori del mondo delle idee, ma ben più forte ora è l'affermazione che una teoria è valida scientificamente se e solo se la si può rappresentare con un modello matematico.

I testi di Galilei sono ricchi di esempi e di costruzioni di curve e hanno il merito di formulare chiaramente i problemi fisici e di abbozzare proposte risolutive basate su un ragionamento matematico. Invitano a leggere la natura con gli occhi del geometra, fanno capire che la complessità e l'astrattezza della matematica possono permettere all'uomo di uscire dagli ambiti del territorio che abita e di avventurarsi a esplorare l'universo.

Galileo non è così sistematico nello studio della geometria come il contemporaneo Cartesio, che pare lo ammirasse molto; il suo uso della geometria è classico e non utilizza il ponte con l'algebra. I problemi sul moto e la caduta dei gravi che si pone richiedono di fatto una matematica più complessa e astratta di quella che ha a disposizione, per questo molti suoi risultati sono incompleti o parziali. Gli manca soprattutto la potenza del calcolo differenziale (calculus), sviluppato da lì a poco da un folto gruppo di matematici tra i quali Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716).

Nel libro *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e ai movimenti locali*, pubblicato nel 1638, cinque anni dopo il famoso processo, così Galilei introduce la terza giornata:

Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo. Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; tuttavia tra le sue proprietà ne trova molte che, pur degne di essere conosciute, non sono mai state finora osservate, nonché dimostrate. Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non è stato sin qui mostrato: nessuno, che io sappia, infatti, ha dimostrato che un mobile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi ab unitate. È stato osservato che i corpi lanciati, ovverossia i proietti, descrivono una linea curva di un qualche tipo; però, che essa sia una parabola, nessuno l'ha mostrato. Che sia così, lo dimostrerò insieme ad altre non poche cose, né meno degne di essere conosciute, e, ciò che ritengo ancor più importante, si apriranno le porte a una vastissima e importantissima scienza, della quale queste nostre ricerche costituiranno gli elementi; altri ingegni più acuti del mio ne penetreranno poi più ascosti recessi.

La consapevolezza della portata innovativa dei risultati si accompagna con la constatazione che gli strumenti a disposizione non sono abbastanza adeguati e dovranno essere sviluppati da *altri ingegni più acuti*.

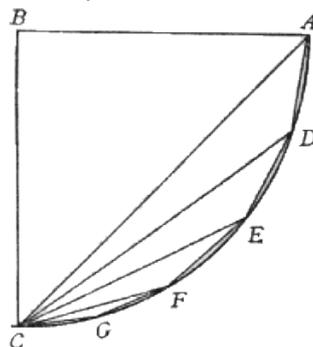
Tra i grandi principi della scienza moderna che Galilei enuncia nel testo vi è anche quello che un grave in caduta libera *accelera continuamente ... e percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi ab unitate*.

Egli dimostra sperimentalmente che i corpi materiali in caduta libera nel vuoto (ovvero senza attrito) cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla massa, e che la legge oraria che descrive lo spazio percorso in funzione del tempo, partendo con velocità iniziale nulla, è data dalla famosa formula $x(t) = ct^2$, dove c g è una costante. Si osservi che la somma dei primo $2n + 1$ numeri dispari è proprio n^2 , proprietà nota anche ai matematici greci; se dunque, come osserva Galilei, lo spazio percorso ad ogni intervallo di tempo si ottiene aggiungendo un numero dispari successivo la legge oraria deve dipendere dal quadrato del tempo.

Grazie a questo principio, dopo una lunga serie di osservazioni e proposizioni Galilei formula il risultato seguente.

Teorema 22. Proposizione 36. Se in un cerchio, eretto sull'orizzonte, dal suo punto più basso si innalza un piano inclinato, il quale sottenda un arco non maggiore di un quadrante, e se dagli estremi di tale piano si conducono due altri piani inclinati a un qualsiasi punto dell'arco, la discesa lungo [il sistema di] questi due ultimi piani inclinati si compirà in minor tempo che lungo il solo primo piano inclinato, o che lungo uno soltanto di questi due ultimi piani, e precisamente l'inferiore.

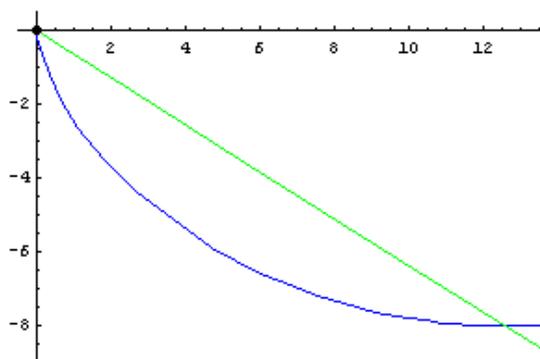
Con riferimento alla figura seguente, tratta sempre dallo stesso libro, il teorema dice che la discesa lungo i due piani AD e DC avviene in un tempo minore che lungo il piano AC, o del solo DC.



Da questo teorema, con un ragionamento contenuto in uno *Scolio* immediatamente successivo, deduce che *quanto più, con poligoni inscritti [poligonalmente iscritte] ci avviciniamo alla circonferenza, tanto più presto si compie il moto tra i due segnati estremi A e C e quindi che da quanto si è dimostrato sembra si possa ricavare che il movimento più veloce da estremo ad estremo non avviene lungo la linea più breve, cioè la retta, ma lungo un arco di cerchio.*

Il ragionamento di Galileo si fonda su una serie di osservazioni sperimentali, deduzioni logiche e elementi di geometria euclidea che non affrontiamo in questo testo. Pochi anni dopo venne formulata la seguente questione più generale.

Questione. *Dati due punti A e B in un piano verticale, determinare il cammino, ovvero la curva, lungo il quale una particella mobile M, partendo da A e scendendo unicamente sotto l'influenza del suo peso, raggiunge B nel minor tempo possibile.*



Questa curva viene presto denominata *Brachistocrona*, dall'unione delle due parole greche $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma$ = breve e $\chi\rho\nu\nu\omicron\sigma$ = tempo.

Galilei dimostra che il tratto di circonferenza è un cammino più breve rispetto al segmento, nonostante quest'ultimo sia il cammino di lunghezza più corta. La circonferenza però non è *il* cammino più breve, non è la brachistocrona, come notano in molti nella seconda metà del secolo.

La questione appartiene alla classe di problemi denominati di *tipo variazionale*, che chiedono di trovare un minimo (o un massimo) in un insieme di configurazioni possibili rispetto ad una data proprietà. Nel caso della brachistocrona le configurazioni sono i cammini tra i punti A e B e la proprietà è determinata dal tempo necessario per percorrerli.

Per risolvere questi problemi i matematici hanno creato numerosi strumenti raggruppati oggi in una corposa teoria denominata *Calcolo delle Variazioni*. Tra gli specialisti troviamo grandi matematici italiani, tra i quali Enrico Bombieri (Fields medal nel 1974), Ennio De Giorgi, Luigi Ambrosio e Alessio Figalli (Fields medal nel 2018).

Il Calcolo, nuove curve risolvono i nuovi problemi

A cavallo tra il 1600 e il 1700 vivevano e operavano a Basilea i due fratelli Jacob e Johann Bernoulli (1654-1705 e 1667-1748 rispettivamente), di professione matematici, si detestavano apertamente. Discutendo il problema della brachistocrona con il fratello, Johann si convinse che Jacob fosse stato tratto in inganno dalla lettura di Galilei e che pensasse che la soluzione fosse davvero la circonferenza. Per ridicolizzare il fratello decide quindi di bandire, sulla rivista *Acta Eruditorum* del

L'ultimo passo è di natura strettamente *geometrica* e si basa sulla geometria euclidea e sulla definizione di seno e coseno. Con riferimento alla figura precedente, siano Δx e Δy gli incrementi delle variabili x e y lungo la curva nella striscia scelta; Δx e Δy sono i cateti di un triangolo retto con angolo α . Sappiamo che, per la definizione delle funzioni trigonometriche, il rapporto tra i cateti di un triangolo retto è uguale a quello tra il coseno e il seno dell'angolo. Vale dunque l'identità $\Delta y/\Delta x = \cos(\alpha)/\sin(\alpha)$. Poichè $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$ si ottiene, con semplici passaggi algebrici, che

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

Mettendo ora assieme i tre passi precedenti, ovvero il principio fisico della conservazione (invarianza) dell'energia totale, la condizione variazionale di minimalità e la condizione geometrica della geometria euclidea, si ottiene:

$$K \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} \right] = K \sin(\alpha) = v = \sqrt{2gy}$$

Ricavando la quantità $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ con semplici manipolazioni algebriche si perviene alla **equazione differenziale della Brachistocrona**:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \sqrt{\frac{y}{c - y}},$$

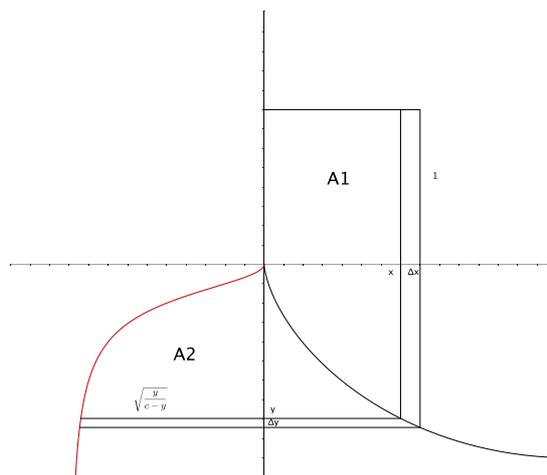
con c costante opportuna che dipende da K e g .

Questa equazione si dice differenziale perché lega tra loro le variabili x e y e i loro incrementi Δx e Δy ; per "risolverla" dobbiamo in qualche modo eliminare gli incrementi Δx e Δy ed ottenere, nel linguaggio di Cartesio, una equazione che lega solo x e y .

Bernoulli, Leibniz, Newton per questo (ed altri problemi simili) creano il calcolo differenziale, dando origine a una potente rivoluzione concettuale che determinerà lo sviluppo successivo della matematica. Proviamo a dare un'idea di questo nuovo metodo in questo esempio.

Si prendono sempre più piccole le strisce in cui si è diviso il piano, e la curva, ovvero si considerano Δx e Δy come *elementi infinitesimi*. Supponiamo che la equazione della curva sia data in forma di grafico, ovvero che x sia esprimibile come funzione di y , $x = x(y)$.

Se leggiamo l'equazione in questo modo $\Delta x = \sqrt{\frac{y}{c-y}} \Delta y$ possiamo dire che l'incremento infinitesimo Δx è uguale all'area di un rettangolo di base Δy e di altezza $\sqrt{\frac{y}{c-y}}$. Ovvero che i due rettangolini colorati nella figura seguente hanno la stessa area.



Pensiamo ora la zona denotata con A1 come somma di tanti rettangolini da 0 a x ; **in corrispondenza** di ognuno di questi rettangoli viene individuato nella zona A2 un altro rettangolo della stessa area. Dunque, assumendo Δx e Δy sufficientemente piccoli (infinitesimi) le aree A1 e A2 sono uguali. Bernoulli dice esplicitamente *Ergo & horum Integralia aequantur*; in questa frase appare per la prima volta in matematica la parola *Integrale*.

Abbiamo quindi dimostrato che $x(y)$, cioè l'area della zona A1, è uguale all'area sottostante il grafico della funzione $\sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$ da 0 a y , **ovvero $x(y)$ è l'integrale della funzione $\sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$.**

Possiamo alternativamente enunciare il nostro problema con l'uso di un altro concetto fondamentale nella teoria del calcolo differenziale, quello di *derivata*. Se la funzione $x(y)$ dipende con sufficiente *continuità* da y , facendo diventare Δy arbitrariamente piccolo anche Δx diventa arbitrariamente piccolo. Inoltre, sotto opportune circostanze, il rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ tende a un valore preciso, che chiameremo la *derivata della funzione $x(y)$ rispetto alla variabile y* e che denoteremo con $\dot{x}(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

In questa terminologia l'equazione della Brachistocrona si scrive

$$\dot{x}(y) = \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

che è una *equazione differenziale (a variabili separate)*.

Dunque la funzione $x(y)$ è la **funzione la cui derivata è $\sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$.**

L'idea di derivata oggi è considerata più semplice di quella di integrale, anche se storicamente si è sviluppata dopo, sebbene Fermat, come abbiamo visto, introdusse dei ragionamenti simili per il calcolo della tangente ad una curva.

Per **integrare l'equazione della Brachistocrona** è necessario qualche conoscenza del calculus imparata nelle scuole superiori. Facciamo prima una sostituzione, ovvero consideriamo una variabile ausiliaria t e supponiamo che y dipenda da t secondo l'equazione:

$$y(t) = c \operatorname{sen}^2(t) = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cos(2t).$$

Si vede facilmente che $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \dot{y}(t) = c \operatorname{sen}(2t)$. Attraverso la regola $\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \Delta t$, utilizzando l'equazione per $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ si ottiene che $\Delta x = 2c \operatorname{sen}^2(t) \Delta t$.

Integrare quest'ultima equazione, ovvero calcolare l'area sotto il grafico della funzione $2c \operatorname{sen}^2(t)$, è semplice e permette di ottenere

$$x(t) = \frac{c}{2}(2t) - \frac{c}{2}\operatorname{sen}(2t).$$

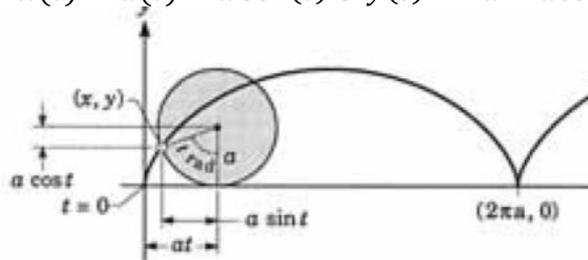
(Per chi preferisce derivare è facile controllare che la derivata $\dot{x}(t)$ è proprio $2c \operatorname{sen}^2(t)$.)

Ecco dunque delle equazioni parametriche per la curva brachistocrona:

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{c}{2}(2t) - \frac{c}{2}\operatorname{sen}(2t), \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\operatorname{cos}(2t) \right)$$

Bernoulli osserva con grande attenzione queste equazioni ed esclama: *ex qua concludo Curvam Brachystochronam esse Cycloidem vulgarem.*

Si accorge cioè che la Brachistocrona non è altro che il luogo percorso da un punto sulla circonferenza di un cerchio di raggio $a = \frac{c}{2}$ che rotola lungo una linea retta detta *Cicloide*. Con l'uso della figura seguente si osserva infatti che all'istante t le coordinate del punto P sulla curva soddisfano le due equazioni: $x(t) = at - a \operatorname{sen}(t)$ e $y(t) = a - a \operatorname{cos}(t)$



Non solo dunque risolve il problema della brachistocrona ma fornisce anche un meccanismo per la sua costruzione.

I libri di Storia contengono parecchi aneddoti gustosi su Johann Bernoulli, il seguente mi sembra interessante per cogliere da un lato la sua passione per il calcolo delle variazioni e dall'altro la difficoltà che matematici e scienziati a volte incontrano nella società.

Johann all'inizio della carriera, persuaso anche dal fratello Jakob, si dedicò anche agli studi di medicina, pensando che questo fosse un ottimo campo per l'applicazione della matematica. Si laurea e quindi si dottora in Medicina e scrive un libro dal titolo *De nutritione*. In esso, partendo dall'osservazione che una parte fissa di sostanza corporea, uniformemente distribuita, viene persa e rimpiazzata con la nutrizione, calcola che il materiale di cui è formato il nostro corpo viene completamente rinnovato in un periodo di tre anni. Questo risultato provocò una serissima disputa teologica: implica infatti l'impossibilità di una resurrezione completa del corpo in tutta la sua sostanza!

La fama raggiunta gli fece ottenere la cattedra di matematica all'università olandese di Groninga e, di conseguenza, perdere interesse per la medicina.

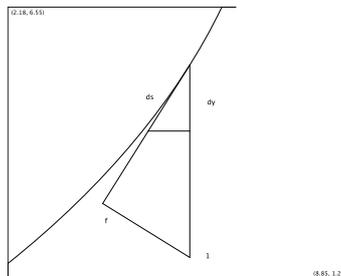
Per altra strada approdò allo studio della cicloide anche Christiaan Huygens (1629 – 1695), geniale scienziato olandese, che studiò sotto la direzione di Cartesio e che anticipò molti risultati del calcolo differenziale. Nel 1673, nel libro *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum*, si pone il problema di trovare la traiettoria lungo la quale un pendolo si muove con un periodo indipendente

dalla ampiezza iniziale. Per il suo pendolo voleva quindi una *curva tautocrona*, dalle parole greche ταυτο, lo stesso, e χρονος, tempo.

Anche in questo caso si arriva alla equazione traducendo in linguaggio matematico tre osservazioni. La prima si basa sul principio della conservazione della quantità di moto descritto da Newton; si assume cioè la seconda legge della dinamica, secondo la quale la forza agente sul corpo, F , è uguale alla sua massa, m , per l'accelerazione: $F = ma$. L'accelerazione, per definizione, è uguale alla derivata seconda della sua equazione del moto; dunque se s è la lunghezza dell'arco di traiettoria percorsa l'accelerazione è data da \ddot{s} e quindi $F = m\ddot{s}$.

La proprietà di tautocronia si ottiene imponendo che la accelerazione sia proporzionale in ogni punto alla lunghezza d' arco: $\ddot{s} + Ks = 0$.

Con considerazioni geometriche vediamo che i due triangoli in figura sono simili, dunque i lati corrispondenti sono in proporzione: da questo otteniamo che $F = -\Delta y/\Delta s$.



Combinando assieme le tre formule ottenute dalle osservazioni otteniamo l'equazione: $\frac{\Delta y}{\Delta s} = Ks$.

Integrando rispetto alla variabile s si ottiene $y = \frac{K}{2}s^2$, ovvero $s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$. Inserendo questo valore

di s in $\frac{\Delta y}{\Delta s} = Ks$ abbiamo che: $\frac{\Delta y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2K} \Delta s = \sqrt{2K} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ e quindi, con una manipolazione algebrica, l'**equazione differenziale della Brachistocrona**:

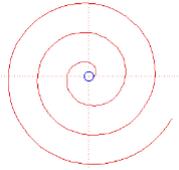
$$\sqrt{\frac{c-y}{y}} \Delta y = \Delta x$$

A meno di una traslazione della variabile y abbiamo ottenuto la stessa equazione della Brachistocrona e quindi, anche in questo caso, la soluzione è una curva cicloide, come Joh. Bernoulli stesso notò: *animo revolvens inexpectatam illam identitatem Tautochronae Hugeniae nostra que Brachystochronae*. La curva cicloide è dunque sia curva Brachistocrona che curva Tautocrona.

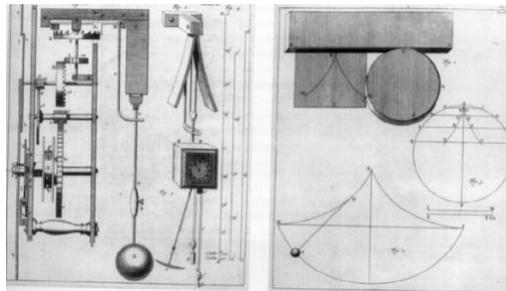
La curva cicloide ha un'ulteriore proprietà molto utile. A partire da una curva piana senza punti singolari si può costruire una nuova curva detta *evolvente* della curva di partenza nel modo seguente. Si avvolge un filo inestensibile attorno alla curva di partenza; la curva che percorre la

estremità esterna del filo svolgendolo a ritroso genera la curva evolvente. La curva di partenza si dice *evoluta* (della sua evolvente).

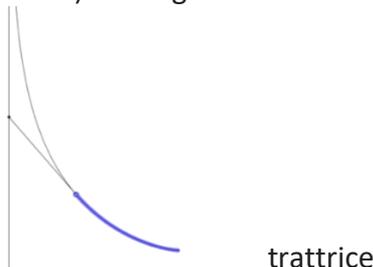
L'evolvente di un cerchio, ad esempio, è una curva spirale.



Huygens notò che ogni cicloide è evoluta (o evolvente) di un'altra cicloide. Costruì quindi un pendolo costringendo il filo alla cui estremità era legata la massa a evolversi lungo profili cicloidalici, come nella figura seguente. Per la proprietà evolvente della cicloide la massa del pendolo è forzata a muoversi lungo una cicloide, ovvero lungo una traiettoria tautocrona, come è bene che sia.



Le nuove tecniche di calcolo permisero la descrizione precisa di molte altre **curve celebri**, che rappresentano la soluzione di problemi sia di natura propriamente matematica che di natura fisica o ingegneristica. Tra queste la *curva esponenziale*, che risolve un problema posto dal matematico de Beaune, allievo di Cartesio, la *catenaria*, curva sulla quale si dispone una catena di massa uniforme soggetta alla forza di gravità, l'*isocrona*, curva lungo la quale una massa soggetta alla sola forza di gravità abbassa la sua altezza linearmente nel tempo. Da menzionare infine, anche perché ne parleremo nel capitolo sulle superfici, la *trattrice*: una curva che Leibniz descrive disponendo il suo orologio da taschino sul tavolo, con la catena che lo legava al panciotto ben tesa. Trascinando l'anello della catena in direzione ortogonale l'orologio si muove lungo una curva detta trattrice. In altre parole, è la curva piana tale che su ogni retta tangente il segmento tra il punto di contatto e l'intersezione con una retta fissa (asintoto) ha lunghezza costante.



La curvatura, ...che la diritta via era smarrita

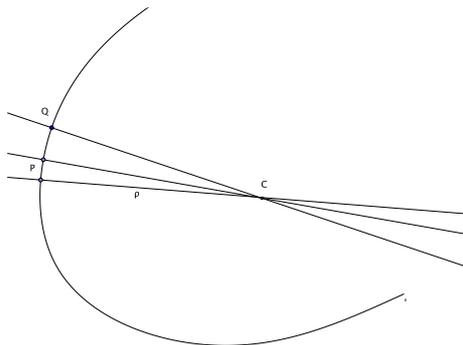
Supponete di essere alla guida di una macchina su una strada che alterna tratti rettilinei a tratti curvi. Nei tratti rettilinei non avete bisogno dello sterzo ma se la strada si curva dovete agire su di esso, in proporzione a quanto è larga o stretta una curva. La misura della rotazione dello sterzo ci fornisce dunque la **curvatura** della strada: quando è zero la strada è diritta, quanto più lo sterzo è azionato tanto più la strada si allontana dalla linea retta.

Dare un significato matematico a tutto questo non è facile: dobbiamo assegnare ad ogni punto di una curva un numero che misuri quanto questa si "incurvi" in quel punto. In particolare questo

numero dovrà essere zero su tutti i punti di una retta; nel caso di una circonferenza invece un numero corretto potrebbe essere l'inverso del raggio, poiché più piccolo è il suo raggio più questa è incurvata,.

Considereremo il caso semplice delle curve piane senza punti singolari. Abbiamo visto in precedenza come definire la retta tangente, la retta che meglio approssima la curva in un intorno del punto e che dà informazioni sulla *direzione* della curva.

Per studiare come la curva si allontani dalla sua tangente, Newton per primo considerò il **cerchio osculatore**, il cerchio che meglio approssima la curva in un suo punto P e che può essere costruito nel modo seguente. Si prendono due punti A e B sulla curva vicini a P e si consideri la circonferenza passante per A,B e P; il cerchio osculatore è il cerchio limite ottenuto facendo muovere A e B lungo la curva verso P.



Il centro del cerchio osculatore C è detto il **centro di curvatura**. L'inverso del suo raggio è la **curvatura della curva in P**.

Con questa definizione la curvatura della retta è zero mentre quella del cerchio di raggio r è $\frac{1}{r}$ in ogni suo punto, come volevamo.

Per una curva data come grafico $(x, y(x))$ Newton determina una elegante espressione per la curvatura in ogni punto in funzione delle derivate prima e seconda:

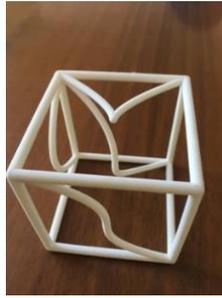
$$k(x, y) = \frac{[1+(\dot{y}(x))^2]^{3/2}}{\ddot{y}(x)}.$$

Si possono pensare anche curve che escono dal piano e “abitano” propriamente lo spazio tridimensionale. Per queste curve i matematici in italiano hanno deciso di utilizzare la parola **curva sghemba o gobba**.

Curve di questo tipo sono state nell'antichità, spesso come intersezioni di superfici o come spirali nello spazio. Un loro studio più sistematico inizia solo nel '700, dopo la rifondazione operata da Cartesio e Fermat che permette di rappresentare una curva gobba in un sistema di coordinate spaziale dove ogni punto dello spazio è associato ad una tripla (x, y, z) . La curva può essere descritta da equazioni parametriche, ovvero da tutti i punti dati da tre funzioni $(x(t), y(t), z(t))$ al variare del parametro t . Ovviamente si richiede che le tre funzioni soddisfino a criteri di regolarità, ad esempio che siano polinomi o semplicemente derivabili.

Un esempio interessante è la curva di equazione parametrica $(\sin(t), \cos(t), t)$ che rappresenta una spirale cilindrica. Un altro è dato dalla cubica gobba di equazioni (t, t^2, t^3) ; la figura seguente, creata da Oliver Lab con una stampante 3D, ne rappresenta un modellino. La cubica è inserita in un cubo sulle cui facce troviamo tre curve diverse che si ottengono proiettando la cubica su queste facce, matematicamente cancellando una delle tre coordinate. Si ottengono: la parabola (t, t^2)

(faccia sulla sinistra), la cubica piana liscia (t, t^3) (faccia in alto), e la cubica piana con cuspidi (t^2, t^3) (faccia frontale)



Per ogni punto P di una curva gobba possiamo definire il **piano osculatore** come la posizione limite del piano passante per P e per altri due punti generici, P', P'' della curva, quando si fanno tendere P' e P'' , lungo la curva, a P (si noti che non è ben definito nel caso della retta). Per una curva piana il piano osculatore coincide in ogni punto con il piano della curva.

In maniera simile a quella per una curva nel piano si può definire un **cerchio osculatore**, imponendo che giaccia sul piano osculatore. L'inverso del suo raggio viene denominato **(prima) curvatura** della curva in P . Questa non è sufficiente a determinare quanto la curva si incurvi nello spazio. La misura di quanto varia il piano osculatore nell'intorno di P è una funzione che viene denominata **torsione** (o seconda curvatura) della curva in P . Curvatura e torsione determinano completamente il comportamento della curva sghemba.

Il concetto di curvatura si estende in seguito dalle curve alle superfici e quindi alle varietà di dimensione alta, come vedremo nel seguito, diventando uno dei concetti più profondi e fecondi della geometria moderna.

La ricerca di punti razionali. Le cubiche e le curve ellittiche

Definendo con Cartesio una curva algebrica come il luogo dei punti nel piano le cui coordinate (x, y) soddisfano una equazione $f(x, y) = 0$ una domanda sorge naturale. Una curva così definita ha sempre dei punti, in altre parole per una funzione $f(x, y)$ esistono sempre delle coppie (x, y) che la annullano? E se esistono, vi è un modo per determinarle o magari un algoritmo per calcolarle?

La curva data dall'equazione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$, ad esempio, non può avere soluzioni tra i numeri reali: infatti il quadrato di un numero reale è sempre positivo e dunque $f(x, y)$ è sempre maggiore o uguale a uno.

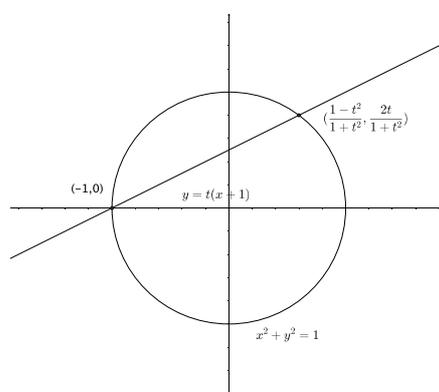
I numeri reali sono un insieme che contiene i numeri naturali, $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, gli interi $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$, i razionali, ovvero i quozienti degli interi $\frac{p}{q}$ con p e q interi e tanti altri numeri, detti irrazionali, come ad esempio le radici degli interi $(\sqrt{2}, \dots)$ e i numeri trascendenti (π, e, \dots) . Questi numeri sono stati ben definiti, assiomaticizzati, solo all'inizio del 1900. I matematici hanno creato un insieme ancora più grande di numeri, i **numeri complessi**, che contiene i reali ed anche i numeri immaginari determinati come radici di numeri negativi, ad esempio $\sqrt{-1} = i$. In questo insieme ogni curva algebrica ha dei punti, pertanto la prassi generale oggi è quella di studiare le curve utilizzando i numeri complessi. In questo contesto generale rimane comunque il problema successivo di determinare quali punti siano reali e quanti invece puramente "immaginari".

In questa direzione possiamo spingerci ulteriormente e considerare un problema più difficile e ricco di applicazioni: determinare quali punti di una curva algebrica abbiano addirittura coordinate numeri razionali e come determinarli.

Se la curva ha grado uno, ovvero è una retta, la soluzione è molto semplice, basta assegnare ad una delle variabili un valore razionale e ricavare il valore dell'altra dalla equazione, che risulterà essere anche razionale. Ad esempio se la retta è data dall'equazione $3x - y + 2 = 0$, assegnando a x il valore $\frac{p}{q}$ si ottiene per y il valore $3\frac{p}{q} + 2$, che è razionale.

Il problema è già molto difficile per una curva di grado due; prendiamo ad esempio la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. In questo caso, se assegniamo un valore razionale ad una delle due variabili, per ricavare il valore della seconda dobbiamo fare una radice quadrata, e dunque molto probabilmente non otterremo un valore razionale.

Diofanto di Alessandria nel terzo secolo d.C. affrontò e risolse il problema della ricerca dei punti razionali della circonferenza, con quello che oggi viene chiamato **metodo delle corde** (di Diofanto). Partiamo da una soluzione razionale ovvia $x = -1$ e $y = 0$ e costruiamo tutte le rette passanti per questo punto, come in figura.



Queste rette sono descritte dall'equazione $y = t(x + 1)$ con t razionale. Al variare di t queste rette intersecano la circonferenza in un altro punto che, con facili conti, possiamo vedere essere

$$x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, y(t) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Queste sono delle equazioni parametriche della circonferenza particolarmente semplici, date come quozienti di due polinomi. Funzioni che sono quozienti di due polinomi si dicono **razionali** ed hanno la proprietà, importante per il nostro scopo, che assumono valori razionali per ogni valore razionale della variabile t .

Assegnando quindi valori razionali alla variabile t , ovvero $t = \frac{p}{q}$ con p e q numeri interi, nelle due equazioni precedenti, troviamo che le coppie di numeri razionali che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono le coppie $(x,y) = \left(\frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}, \frac{2pq}{q^2 + p^2}\right)$ al variare di p e q nei numeri interi.

Diofanto osserva che da queste coppie possiamo ottenere tutte le terne di numeri interi (a, b, c) tali che $a^2 + b^2 = c^2$, le così dette *terne pitagoriche*; semplicemente togliere il denominatore comune, $q^2 + p^2$, chiamarlo c e eventualmente moltiplicando tutto per un intero r . Otteniamo

$$(a, b, c) = (r(q^2 - p^2), r2pq, r(q^2 + p^2)),$$

dove r, p e q sono numeri interi. Ad esempio con $r = 1, p = 1$ e $q = 2$ otteniamo la terna pitagorica $(3,4,5)$.

Un'equazione polinomiale in due (o più) variabili con coefficienti numeri interi (o razionali) si dice *equazione diofantina*. Trovare coppie di numeri razionali che soddisfano equazioni diofantine di

grado superiore al secondo è un problema difficile, studiato intensamente con tecniche oggi molto sofisticate che vanno dall'algebra alla geometria e all'analisi.

Ovviamente se si potesse esibire una parametrizzazione razionale della curva associata all'equazione il problema avrebbe immediata soluzione, ma quasi sempre queste parametrizzazioni non esistono.

Anche Isaac Newton si dedicò allo studio delle curve algebriche piane, in particolare seguendo la strada avviata da Cartesio ottenne una classificazione completa delle curve di grado tre, le *cubiche*. Il passo cruciale di questa classificazione consiste nel notare che ogni cubica priva di punti singolari ha almeno un *punto di flesso*, cioè un punto non singolare in cui la tangente "tocca" la curva con molteplicità maggiore di due. Partendo da questa osservazione Newton dimostra che ogni cubica non singolare, con un'opportuna scelta del sistema di riferimento, può essere descritta da un'equazione della forma $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Le cubiche singolari hanno una parametrizzazione razionale, come abbiamo visto ad esempio nel caso del folium di Cartesio.

Se la cubica non ha singolarità, ovvero è liscia, in generale non ha una parametrizzazione razionale. Questo è vero per ogni curva algebrica piana non singolare di grado maggiore di due. Si noti che dimostrare l'impossibilità di qualcosa in matematica (in questo caso l'impossibilità di parametrizzare con funzioni razionali) è spesso più difficile che dimostrarne la possibilità.

Il problema di parametrizzare le cubiche lisce con funzioni semplici fu affrontato da grandi matematici come Niels Abel (1802-1829), Carl Gustav Jacobi (1804-1851), Carl Friederich Gauss (1777-1855), Leonhard Euler (1707-1783). In analogia con le funzioni trigonometriche seno e coseno che parametrizzano la circonferenza essi introdussero delle funzioni speciali, *le funzioni ellittiche*, che in maniera naturale parametrizzano le cubiche lisce.

Queste funzioni non sono algebriche né razionali, ovvero non sono esprimibili né come polinomi né come quozienti di polinomi, e la loro descrizione è piuttosto complessa. Nel vero senso della parola, ovvero per capire qualcosa di esse bisogna passare ai numeri complessi sopra citati. Si possono dimostrare parecchie proprietà di queste funzioni, simili a quelle delle funzioni trigonometriche. Ad esempio delle proprietà di addizione: dati cioè i valori delle funzioni in due punti si può calcolare il valore in un terzo punto attraverso un procedimento matematico detto di addizione.

L'utilizzo delle funzioni ellittiche porta a scoprire molte proprietà geometriche e algebriche o aritmetiche delle cubiche piane, che per questo vengono spesso anche chiamate *curve ellittiche*.

Un importante Teorema, congetturato da H. Poincaré (1901) e dimostrato poi da L. J. Mordell (1922) afferma che il metodo delle corde di Diofanto può essere applicato con successo anche nel caso delle cubiche. Ogni punto a coordinate razionali di una cubica liscia può essere ottenuto a partire da un numero finito di punti razionali intersecando la cubica con corde per due di questi punti o tangenti a uno. Purtroppo non si riesce a trovare un algoritmo esplicito che determini questi punti iniziali per ogni curva cubica.

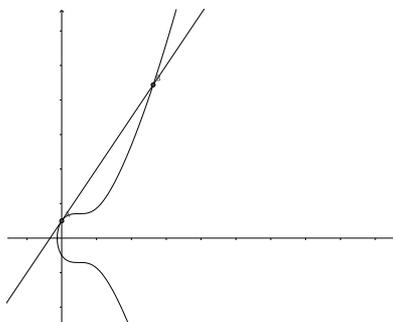
Lo stesso Diofanto nel suo libro *Arithmetica* fa uso non solo delle corde ma anche delle tangenti per la ricerca di punti razionali su una cubica. Per capire la sua capacità tecnica, sorprendente per l'epoca, consideriamo un problema e la sua soluzione contenuti nel capitolo sesto.

Problema 18: Si determini un triangolo rettangolo la cui area aggiunta all'ipotenusa sia un (numero razionale elevato al) cubo il cui perimetro sia un (numero razionale elevato al) quadrato.

Per interpretare questo problema in linguaggio moderno scegliamo un'unità di misura tale che un cateto del triangolo sia lungo 2. Detti b e c l'altro cateto e l'ipotenusa il problema si traduce facilmente in quello di trovare b e c tali che $b + c = \beta^3$ e $2 + b + c = y^2$. Sostituendo $b + c = \beta^3$ nella seconda equazione otteniamo $\beta^3 + 2 = y^2$. Posto $x = \beta + 1$, dobbiamo trovare dei punti razionali sulla cubica $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y^2$.

Diofanto suggerisce di sostituire $\frac{3}{2}x + 1$ al posto di y ; questa sostituzione ci dà l'equazione $x^3 - \frac{21}{4}x^2 = 0$, che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = \frac{21}{4}$. Quest'ultima ci fornisce a ritroso la soluzione $b = \frac{24121185}{628864}$ e $c = \frac{24153953}{628864}$.

Diofanto non spiega le ragioni che lo hanno portato a sostituire y con $\frac{3}{2}x + 1$. Oggi potremmo pensare che abbia considerato il punto razionale $(0,1)$, che appartiene alla curva; che abbia quindi calcolato la tangente alla curva in quel punto, scoprendo che è proprio la retta $y = \frac{3}{2}x + 1$!



Genialità e abilità tecnica che il lettore può apprezzare verificando che la retta è davvero la tangente nel punto $(0,1)$; suggerisco di traslare il punto in $(0,0)$ e quindi di modificare di conseguenza l'equazione della curva.

Pierre de Fermat fu un appassionato lettore dell'Arithmetica di Diofanto. Egli scrisse numerose osservazioni in margine ad un'edizione del 1621, raccolte in un libro pubblicato postumo secondo una sorte comune a quasi tutte le sue opere. In una di queste note egli scrisse:

D'altra parte è impossibile che un cubo possa essere scritto come somma di due cubi, o che una potenza quarta sia somma di due potenze quarte, o, in generale che ogni numero che sia una potenza superiore alla seconda possa essere scritto come somma di due analoghe potenze. Ho ottenuto una davvero splendida dimostrazione di questa proposizione, che il margine di questo libro è troppo piccolo per contenere.

Fermat qui afferma che non esistono tre interi a, b, c (non nulli) tali che $a^n + b^n = c^n$, con n intero maggiore di due. Dunque che il problema della ricerca di soluzioni razionali della funzione diofantina $x^n + y^n = 1$, per $n \geq 3$, non ammette soluzioni.

Questo è uno dei più famosi problemi matematici, alla cui soluzione hanno dedicato grandi sforzi i maggiori matematici degli ultimi 350 anni; viene denominato come il **Grande Teorema (o La Congettura) di Fermat**.

Nel 1986 il matematico tedesco Frey osservò che il Teorema proposta da Fermat è vero se la cubica liscia $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ ha particolari proprietà.

Nel 1993 l'inglese Andrews Wiles annunciò al mondo, durante un seminario al Newton Institute di Cambridge, di aver provato la famosa (per i matematici) congettura dei giapponesi Taniyama-Shimura, ovvero che ogni curva ellittica (semistabile) ha questa proprietà e che, di conseguenza, il Teorema di Fermat è vero.

Fu un momento di grande eccitazione per i matematici di tutto il mondo, una congettura aperta da secoli veniva finalmente provata! Ricordo ancora la frenesia al Max Planck Institute für Mathematik di Bonn, dove in quel momento stavo lavorando: la notizia arrivò via e-mail la mattina presto, diffusa dall'americano Serge Lang. Il tedesco Gerd Faltings, professore e co-direttore dell'Istituto di Bonn, aveva in precedenza dimostrato, con l'uso delle tecniche di Mordell sulle cubiche, che gli eventuali controesempi al Teorema di Fermat sono al più un numero finito, per questo nel 1986 gli viene conferita la medaglia Fields, il più prestigioso riconoscimento in campo matematico, l'equivalente del premio Nobel in altre discipline. Faltings decise di tenere subito una serie di seminari pubblici per studiare il risultato di Wiles; ma al secondo appuntamento cancellò il seminario, la dimostrazione aveva una grossa falla!

Con perizia matematica e con la collaborazione del suo studente Richard Taylor, Wiles riuscì in un anno a sistemare la dimostrazione, che venne quindi pubblicata, dopo essere stata valutata da più esperti, nel 1995 in due articoli sulla rivista *Annals of Mathematics*.

Alla soluzione della congettura di Fermat Andrew Wiles dedicò sette anni della sua vita; questa avventura matematica è stata raccontata da Simon Singh prima in un bel libro dal titolo *L'Ultimo Teorema di Fermat* e quindi anche in un film-documentario dallo stesso titolo della PBS-NOVA.

Poiché per regolamento la medaglia Fields non può essere assegnata a matematici di età superiore ai 40 anni, Wiles, che ha concluso con successo la prova all'età di 41 anni, non potrà mai ricevere questo premio.

La ricerca di soluzioni razionali o intere di equazioni diofantine è un tema di grande interesse in numerosi campi della matematica e in tante sue applicazioni; in particolare nel campo della comunicazione digitale, per trasmettere pubblicamente messaggi dal contenuto che si vuole tenere segreto. Per questo la teoria delle cubiche piane è molto studiata oggi dagli esperti di *Crittografia*.

Vedere e costruire curve con tecniche digitali

Alcuni studiosi dell'evoluzione del pensiero e della conoscenza umana fanno notare che un punto critico di questa evoluzione, una singolarità nella curva della conoscenza, è dato dal passaggio dall'*epos* al *logos*, ovvero dalla transizione da una tradizione orale ad una scritta. Questo passaggio inizia con Omero (settimo secolo a.C.) e raggiunge completa maturazione con gli scritti di Platone. Un grande contributo è stato dato dagli scritti di Euclide, Archimede, Apollonio nei quali l'intuizione geometrica e il calcolo algebrico vengono codificati per iscritto. In questo capitolo abbiamo visto come Euclide abbia messo per iscritto il concetto di curva e le conoscenze che da questo derivano; e poi come Cartesio l'abbia completato con l'uso dell'algebra ed infine altri con le tecniche dell'analisi.

Oggi giorno, a mio parere, stiamo attraversando un periodo simile di transizione, da una tradizione scritta e orale ad una tradizione digitale, da *epos* e *logos* a *digital*. Abbiamo a disposizione nuovi strumenti, concettuali e tecnologici, in grado di riflettere ed interpretare le esigenze semplificatrici della nostra mente (Enriques), di creare connessioni tra il mondo delle idee e la realtà concreta, in modo semplice e diretto. Strumenti che si basano sui computer, sulla tecnologia dell'informazione,

su robot e stampanti, ed ora anche sulle officine digitali (in inglese Fabrication Laboratory, o Fab Lab). Tutto questo, che in ultima analisi è frutto delle applicazioni della matematica, si presta molto bene a visualizzare e a dar vita a nuove idee matematiche.

Parecchi software permettono oggi di visualizzare facilmente su un computer, e poi eventualmente stampare, una qualunque curva algebrica. Per disegnare le curve di questo capitolo io ho usato il programma **GeoGebra**, ottenibile gratuitamente alla pagina web <https://www.geogebra.org/>, che contiene anche istruzioni e molti esempi. La facilità d'uso è veramente sorprendente; in molte scuole medie oggi un ragazzo impara a disegnare curve con un computer, a modificare a piacimento l'equazione per ricavare curve più adatte agli scopi che si è prefisso. Darei il mio snowboard nuovo (con un profilo curving che permette curvature molto strette sui pianori nevosi) per vedere Cartesio alle prese con questo "compasso moderno", che dialoga perfettamente con l'utente nella lingua da lui creata.

Ma oggi in un Fab Lab possiamo fare più anche di più: con una **taglierina laser**, in grado di "leggere" le equazioni delle curve che abbiamo precedentemente ideato con il software, siamo in grado di creare profili su innumerevoli materiali, ad esempio con la plastica, il legno e anche il marmo. Possiamo quindi realizzare concretamente e facilmente molte nostre idee e utilizzarle, ad esempio, nei campi del design e della tecnologia.



Grazie a questi strumenti le curve e quel che ho descritto in questo capitolo entreranno a far parte sempre di più nell'educazione e negli strumenti tecnologici che accompagnano il nostro agire contemporaneo.

Nel seguito alcune immagini di oggetti creati con la taglierina laser al MUSE di Trento.
Figura1,2,3,

Capitolo 3 - Superfici

La seguente definizione di superficie presa dall'enciclopedia Treccani ben riassume il senso comune: *il contorno di un corpo, ovvero l'elemento di separazione della regione dello spazio occupata dal corpo da quella non occupata. O anche, con riferimento a determinati corpi, la faccia esterna. Ad esempio la superficie di un frutto, o del corpo umano; nell'altro senso la superficie interna di un vaso. Una superficie può essere pensata più o meno piana e a due dimensioni.*

In matematica la definizione nasce per astrazione dalla nozione intuitiva di contorno di un corpo, avente le caratteristiche di una lamina pensata priva di spessore. Oppure con riferimento al modo in cui è ottenuta: si definisce ad esempio superficie di rotazione (o di rivoluzione o rotonda) la superficie generata da una curva nella rotazione attorno ad una retta (asse).

Le caratteristiche di essere più o meno piana e a due dimensioni sono difficili da definire matematicamente e, come vedremo, richiedono una buona dose di astrazione.

Partiamo ancora dagli Elementi e vediamo cosa propone Euclide nel primo libro.

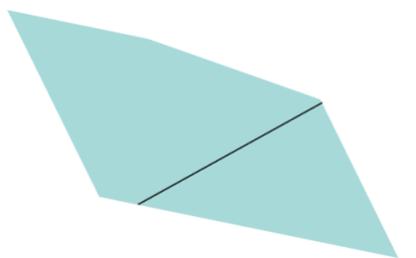
Definizione 5. Una superficie è ciò che ha lunghezza e larghezza

La definizione è abbastanza criptica, vuole probabilmente dire che ha due dimensioni, ma senza specificare (né qui né nel seguito) cosa si debba intendere per lunghezza e larghezza.

Prosegue poi con le definizioni di superfici particolari, come piano, cono, cilindro e sfera.

Per il primo Euclide usa una definizione molto simile alla definizione 4 della retta:

Definizione 7. Una superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa.



Una possibile interpretazione è che dati due punti su un piano la retta che li congiunge stia tutta nel piano; forse però non era questa la sua idea, infatti in una proposizione successiva dimostra che date due rette parallele e due punti su di esse, la retta che li congiunge giace sul piano definito dalle due rette!

Si noti che, a differenza della retta o del cerchio, non postula l'esistenza del piano (Postulati 1 e 3).

Per la definizione di cono, cilindro e sfera sceglie invece il concetto di superficie di rotazione, una superficie ottenuta ruotando una curva piana (detta generatrice) attorno ad una retta (detto asse di rotazione). Vediamo ad esempio la definizione di sfera.

Libro IX, definizione 14. Quando un semicerchio di diametro fissato si fa ruotare fino a tornare nella posizione di partenza, la figura ottenuta è una sfera.