Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2022/2023

Secondo appello - Luglio 2023

Esercizio 1. Si consideri la conica affine $C \subset \mathbb{E}^2$ data dall'equazione:

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 10x_1 - 8x_2 + 8x_1x_2 - 4 = 0$$

(1) Classificare la conica affine C.

(2) Scrivere esplicitamente un'isometria $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ che manda C nella sua forma canonica.

(3) Sia $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x_0, x_1, x_2]\}$ il completamento proiettivo di C. Trovare le rette tangenti a $\overline{C}$ passanti per il punto improprio $P = [0, 0, 1]$].

Esercizio 2. Sia $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la curva affine data dall'equazione:

$$f(x, y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3 + xy^4 = 0$$

Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dove $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] | x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(1) Calcolare i punti singolari della chiusura proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di C. Per ciascuno dei punti singolari determinare la molteplicità e le tangenti principali.

(2) Determinare i punti impropri e gli eventuali asintoti di C.

(3) Trovare, tra le rette passanti per il punto $B = [1, 0, 0]$, eventuali tangenti a C in due punti distinti.

Soluzione 1. (1) Le matrici associate alla conica C sono le seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa mostriamo che C non è degenere. Infatti si nota che

$$det(A) = det \begin{pmatrix} -4 & -5 & -4 \\ -5 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix} = -81$$

è diverso da 0. Studiamo ora la matrice A_0, si ha che

$$det(A_0) = 25 - 16 = 9 > 0 \quad \text{e} \quad tr(A_0) = 5 + 5 = 10$$

Indicando quindi con λ_1, λ_2 i due autovalori di A_0 si che ha entrambi sono positivi, perciò $sign(A_0) = (2, 0)$. Poichè $det(A) < 0$ si ottiene che la segnatura di A è la seguente $sign(A) = (2, 1)$. Si ottiene perciò che C è un'ellisse a punti reali.

(2) **Rotazione**: Vogliamo diagonalizzare la matrice:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = detA_0 = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 9)(\lambda - 1)$$

Si ottiene quindi che i due autovalori di A_0 sono:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 9$$

Esplicitiamo ora una base di autovettori:

- Per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ consideriamo il sistema associato a $(A - I_2)$ dato da

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Per l'autovalore $\lambda_1 = 9$ consideriamo il sistema associato a $(A - 9I_2)$ dato da

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora M la matrice che ha come colonne gli autovalori v_1, v_2 normalizzati, ossia:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo quindi il cambio di coordinate dato da M:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_1 = (x_1' + x_2')/\sqrt{2} \\ x_2 = (-x_1' + x_2')/\sqrt{2} \end{cases}$$

Sostituendo il cambio di coordinate e completando i quadrati otteniamo l'equazione

$$(3x_2' - \frac{3}{\sqrt{2}})^2 + (x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 9$$

Traslazione: Ora è facile indovinare l'ultimo cambio di coordinate:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x_1'' + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2'' + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

L'isometria cercata è perciò la composizione della rotazione e della traslazione precedenti. Si noti che alla fine l'equazione canonica dell'ellisse C risulta essere la seguente:

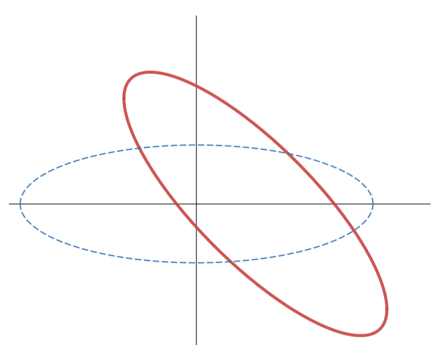
$$C_{can} : \frac{x_1^2}{9} + x_2^2 = 1$$

(3) La traccia affine delle rette passanti per il punto $[0, 0, 1]$ è data dall'equazione $x_1 - a = 0$. Per cercare tra queste le rette tangenti alla conica sostituiamo $x_1 = a$ nell'equazione della conica e troviamo l'equazione

$$5x_2^2 - 8(1 - a)x_2 - 10a + 5a^2 - 4 = 0.$$

La condizione di avere una radice doppia, ovvero discriminante uguale a zero, porta ai due valori da a che determinano le due tangenti.

Di seguito si mostra l'ellisse C in rosso e la sua forma canonica $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ in blu.



$\square$

Soluzione 2. (1) Rinominiamo per comodità le coordinate $x = x_1$ e $y = x_2$. Tramite l'identificazione $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = U_0$ otteniamo che l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{C}$ di C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è data dalla seguente equazione:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2(x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2x_2 - x_2^3) + x_1x_2^4 = 0$$

Osserviamo innanzitutto che il fattore nella prima parentesi $(x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2x_2 - x_2^3)$ può essere raccolto nel modo seguente:

$$(x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2x_2 - x_2^3) \quad \rightsquigarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2$$

Pertanto l'equazione di $\overline{C}$ può essere riscritta nella forma più compatta:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2^4 = 0$$

I punti singolari di $\overline{C}$ si ottengono come soluzioni del sistema omogeneo associato alle derivate parziali di $F_{x_i} := \frac{\partial F}{\partial x_i}$. Il sistema si riscrive come:

$$\begin{cases} F_{x_0} = 2x_0(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2 = 0 \\ F_{x_1} = x_0^2(x_1 + x_2)^2 + 2x_0^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_2^4 = 0 \\ F_{x_2} = -x_0^2(x_1 + x_2)^2 + 2x_0^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4x_1x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Per trovare le soluzioni discutiamo i 3 casi possibili per l'annullamento della prima equazione:

- Poniamo $x_0 = 0$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo $x_2^4 = 0$, che implica $x_2 = 0$. Osserviamo che sostituendo sia $x_0 = 0$ che $x_2 = 0$ nella terza equazione otteniamo un'identità, perciò il punto $A = [0, 1, 0]$ soddisfa il sistema ed è quindi un punto singolare della curva $\overline{C}$.
- Poniamo $x_1 = x_2$. Sostituendo nella seconda equazione e nella terza troviamo le due condizioni:

  $$x_1^2(4x_0^2 + x_1^2) = 0 \quad \text{e} \quad x_1^2(4x_1^2 - x_0^2) = 0$$

  Ora se $x_1 = 0$ abbiamo che entrambe le condizioni sono verificate per ogni x_0, percui il punto $B = [1, 0, 0]$ soddisfa il sistema ed è quindi un punto singolare per la curva $\overline{C}$. D'altro canto $4x_0^2 + x_1^2 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha come unica soluzione $x_0 = x_1 = 0$. Essendo tuttavia per ipotesi $x_1 = x_2$ otteniamo un assurdo.
- Poniamo $x_2 = -x_1$. Sostituendo nella seconda equazione troviamo $x_2^4 = 0$, che implica $x_2 = 0$ e di conseguenza $x_1 = 0$. Ritroviamo perciò il punto B dello step precedente.

Abbiamo perciò che gli unici due punti singolari di $\overline{C}$ sono i punti $A = [0, 1, 0]$ e $B = [1, 0, 0]$. Il punto B appartiene a $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e nella carta affine U_0 coincide con l'origine. L'equazione di $\overline{C} \cap U_0 = C$ è proprio l'equazione di partenza e perciò la parte omogenea di grado minimo è la seguente:

$$x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2x_2 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2$$

Abbiamo perciò che B è un punto triplo con tangenti principali le rette

$$L_1 : (x_1 - x_2) = 0 \quad \text{e} \quad L_2 : (x_1 + x_2) = 0$$

Per studiare il tipo di singolarità del punto A dobbiamo invece cambiare carta affine. Consideriamo $U_1 = \{[x_0, x_1, x_2] | x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e chiamiamo $u = \frac{x_0}{x_1}$ e $v = \frac{x_2}{x_1}$ le sue coordinate. Si ha che in questa carta affine il punto A corrisponde all'origine e l'equazione di $\overline{C} \cap U_1$ è la seguente:

$$u^2(1-v)(1+v)^2 + v^4 = 0 \quad \text{e} \quad u^2 + u^2 v - u^2 v^2 - u^2 v^3 + v^4 = 0$$

Perciò la parte omogenea di grado minimo è rappresentata dal monomio u^2. Pertanto A è un punto doppio (cuspide) con tangente principale data da $u = 0$. Ritornando alle coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la tangente ad A risulta essere la retta $L_3 : x_0 = 0$.

(2) Per determinare i punti impropri di C intersechiamo $\overline{C}$ con la retta all'infinito $x_0 = 0$. Mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2^4 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo che i due punti impropri sono i punti $A = [0, 1, 0]$ e $P = [0, 0, 1]$. Per il punto precedente abbiamo che A è punto doppio con tangente principale (doppia) la retta all'infinito $x_0 = 0$. Si conclude quindi che in A la curva affine C non ha asintoto. Poichè nel punto P la curva $\overline{C}$ è liscia, ci basta calcolare la retta tangente R come segue:

$$R : F_{x_0}(0, 0, 1)x_0 + F_{x_1}(0, 0, 1)x_1 + F_{x_2}(0, 0, 1)x_2 = 0 \quad \rightsquigarrow x_1 = 0$$

Pertanto la curva $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = U_0$ ammette la retta delle ordinate $x_1 = 0$ come asintoto.

(3) Il punto $B = [1, 0, 0]$ abbiamo visto essere un punto triplo. Dunque, poiché la curva ha grado 5 nessuna di queste rette potrá avere due punti di tangenza diversi da B.

Le due rette tangenti a B, $L_1 : (x_1 - x_2) = 0 \quad \text{e} \quad L_2 : (x_1 + x_2) = 0, L_1 : (x_1 - x_2) = 0 \quad \text{e} \quad L_2 : (x_1 + x_2) = 0$, hanno molteplicità di intersezione 4 con la curva in B, dunque non hanno altri punti di tangenza.

Non esistono rette passanti per B tangenti alla curva in due punti distinti.

$\square$