Il problema di Malfatti, due secoli di discussioni

Marco Andreatta

Facoltá di Scienze MMFFNN

Universitá di Trento

Gianfrancesco Malfatti

Ala - Ferrara
1731 - 1807

La Memoria

Memoria sopra un problema stereotomico.
Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, 10 p. 1ª (1803) pp. 235-244 - in 4°.

MEMORIA

SOPRA UN PROBLEMA STEREOTOMICO

DI GIANFRANCESCO MALFATTI.

Dato un Prisma retto triangolare di qualunque materia come di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell' altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza.

Vi sono in Geometria alcuni problemi, la soluzione analitica de' quali non si può presentare senza tedio del lettore attesa la lunghezza e l' improbità de' calcoli, ai quali ha dovuto soggiacere il Geometra nella soluzione del suo problema; laddove dopo aver conosciuto il vero risultato, convertendo l' analisi in sintesi simbolica, ed il problema in teorema, succede parecchie volte che si possa per una via più agevole e piana dare di esso una comoda dimostrazione. Di questa specie è l' enunziato Problema che mi fu proposto non ha guari, e che mi parve sul principio di facile soluzione, osservando che esso riducevasi alla inscrizione di tre circoli nei due triangoli delle basi parallele del Prisma, cosicchè ciascun de' circoli toccasse gli altri due ed insieme due lati del triangolo. Intrapresa per tanto la soluzione di questo secondo Problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli e scabrose formole, atte a stancar la pazienza d' un uomo meno di me ostinato. Superata però la difficoltà e avuti de' risultati assai semplici, tentai, cangiando il Problema in Teorema, di aprirmi una

A 2 via

Il titolo

Il termine stereotomico é poco usato, parola composta

stereo = $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon o$ = solido, rigido
tomia = $\tau o\mu i a$ = divisione, sezione

Il titolo

Il termine stereotomico é poco usato, parola composta

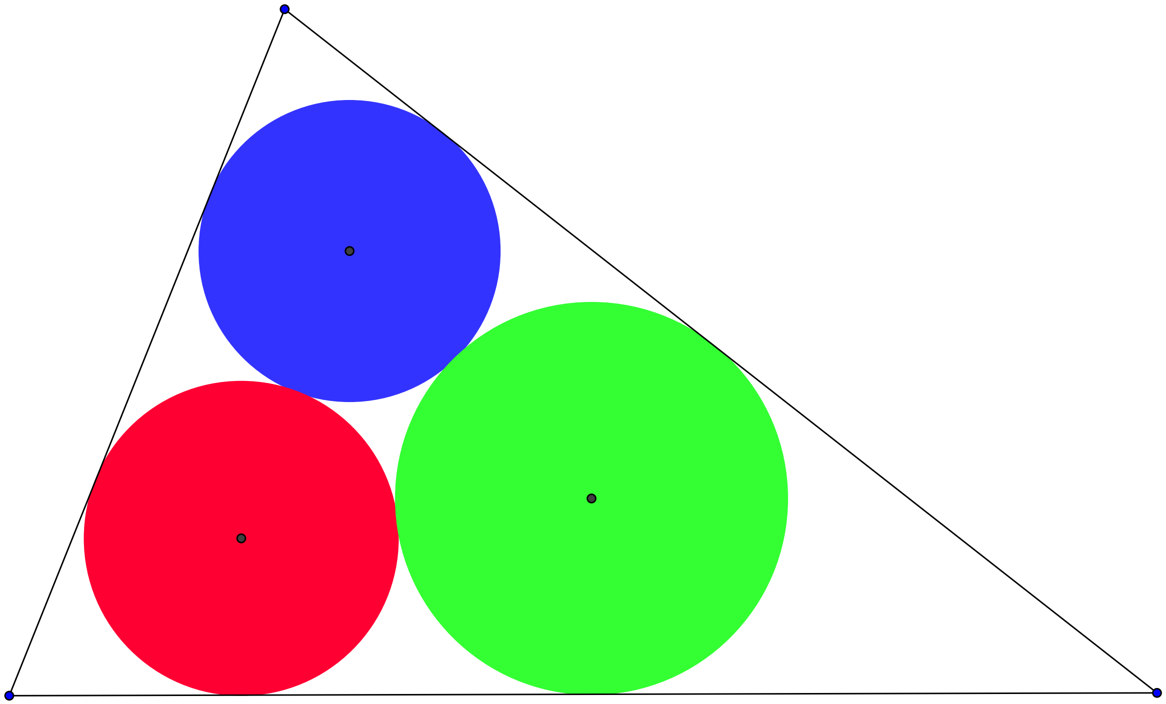
stereo = $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon o$ = solido, rigido
tomia = $\tau o\mu i a$ = divisione, sezione

per la Treccani

Stereotomia = Insieme di procedimenti e di regole suggeriti dalla geometria descrittiva per il taglio e per il disegno dei conci di una progettata struttura (arco, volta, muro, ...) in pietra da taglio o anche in legno e altri materiali da taglio

La configurazione di Malfatti

"... iscrizione di tre circoli nel triangolo , cosicché ciascun de' circoli toccasse gli altri due ed insieme due lati del triangolo. .."



Osservazioni

1. Malfatti, nel titolo, osserva che il problema si riduce, con una stereotomia, ad un problema di geometria piana. Il problema si puó cosí enunciare:
disporre all'interno di un dato triangolo tre cerchi non intersecantesi tra loro e di area complessiva massima.

Osservazioni

1. Malfatti, nel titolo, osserva che il problema si riduce, con una stereotomia, ad un problema di geometria piana. Il problema si puó cosí enunciare:
disporre all'interno di un dato triangolo tre cerchi non intersecantesi tra loro e di area complessiva massima.

2. Quindi afferma, senza giustificare, che esso ”riducevasi alla iscrizione di tre circuli ..." come sopra.

Osservazioni

1. Malfatti, nel titolo, osserva che il problema si riduce, con una stereotomia, ad un problema di geometria piana. Il problema si puó cosí enunciare:
disporre all'interno di un dato triangolo tre cerchi non intersecantesi tra loro e di area complessiva massima.

2. Quindi afferma, senza giustificare, che esso ”riducevasi alla iscrizione di tre circuli ..." come sopra.

3. ” .. Intrapresa pertanto la soluzione di questo secondo problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli e scabrose formole,....”

Preliminari

Nel seguito discuteremo nell’ordine il punto 3. e poi il punto 2.

Preliminari

Nel seguito discuteremo nell'ordine il punto 3. e poi il punto 2.

Ricordiamo che un cerchio, la zona racchiusa da una circonferenza, sono i punti del piano che distano meno o uguale ad una quantitá r, detta raggio, da un punto O detto centro.

Preliminari

Nel seguito discuteremo nell'ordine il punto 3. e poi il punto 2.

Ricordiamo che un cerchio, la zona racchiusa da una circonferenza, sono i punti del piano che distano meno o uguale ad una quantitá r, detta raggio, da un punto O detto centro.

Teorema. L' area del cerchio é pari a πr^2.

Preliminari

Nel seguito discuteremo nell'ordine il punto 3. e poi il punto 2.

Ricordiamo che un cerchio, la zona racchiusa da una circonferenza, sono i punti del piano che distano meno o uguale ad una quantitá r, detta raggio, da un punto O detto centro.

Teorema. L' area del cerchio é pari a πr^2.

Teorema. Fra tutte le figure di area fissata il cerchio ha perimetro minimo. Equivalentemente fra tutte le figure di perimetro fissato il cerchio ha area massima.

Preliminari

Un triangolo é dato da tre segmenti tali che il vertice di ogni segmento é vertice di uno ed uno solo degli altri

Preliminari

Un triangolo é dato da tre segmenti tali che il vertice di ogni segmento é vertice di uno ed uno solo degli altri

Teorema

- La somma degli angoli interni di un triangolo é 180 (π)
- Le tre bisettrice (risp. altezze, risp. mediane) di un triangolo si incontrano in un unico punto.

Preliminari

Un triangolo é dato da tre segmenti tali che il vertice di ogni segmento é vertice di uno ed uno solo degli altri

Teorema

- La somma degli angoli interni di un triangolo é 180 (π)
- Le tre bisettrice (risp. altezze, risp. mediane) di un triangolo si incontrano in un unico punto.

Teorema

- É possibile iscrivere un (unico) cerchio in un triangolo. In un poligono é possibile se e solo se ....
- Il cerchio di area massima contenuto in un triangolo é il cerchio inscritto.

Breve storia del problema di Malfatti

H. Lob and H.W. Richmond, *On the solution of the Malfatti problem for a triangle Proc. London Math. Soc. vol. 2, 1930*
in una breve nota conclusiva notano che in un triangolo equilatero il cerchio iscritto e due piccoli cerchi iscritti negli angoli hanno area complessiva piú grande dei cerchi della configurazione di Malfatti (sottolineano anche che un massimo locale non é necessariamente un massimo).

Breve storia del problema di Malfatti

H. Lob and H.W. Richmond, *On the solution of the Malfatti problem for a triangle Proc. London Math. Soc. vol. 2, 1930*
in una breve nota conclusiva notano che in un triangolo equilatero il cerchio iscritto e due piccoli cerchi iscritti negli angoli hanno area complessiva piú grande dei cerchi della configurazione di Malfatti (sottolineano anche che un massimo locale non é necessariamente un massimo).

M. Goldberg, *On the original Malfatti problem, Math. Magazine. vol. 40, 1967*
prova che, per ogni triangolo, la configurazione di Lob Richmond é di area piú grande di quella di Malfatti (se $\frac{sen\alpha \geq tan\beta}{2}$). La dimostrazione si basa su un argomento numerico e quindi con l'uso del computer.

La soluzione del problema di Malfatti

V.A. Zalgaller - G. A. Los, *Solution of the Malfatti problem, Ukrain. Geom. Sb., n. 35, 1992, tradotto nel 1994*

la configurazione di Lob-Richmond risolve il problema.

La soluzione del problema di Malfatti

Definizione. Un sistema di tre cerchi non intersecantisi in un dato triangolo si dice rigido se non é possibile deformare uno dei cerchi aumentando il raggio, senza muovere gli altri due e senza sovrappore i cerchi.

La soluzione del problema é all'interno dei sistemi rigidi

La soluzione del problema di Malfatti

Definizione. Un sistema di tre cerchi non intersecantisi in un dato triangolo si dice rigido se non é possibile deformare uno dei cerchi aumentando il raggio, senza muovere gli altri due e senza sovrappore i cerchi.
La soluzione del problema é all'interno dei sistemi rigidi

Lemma.Ogni cerchio di un sistema rigido ha al meno tre punti di contatto con gli altri cerchi o con i lati del triangolo. Questi tre punti non stanno tutti su una semicirconferenza

La soluzione del problema di Malfatti

Definizione. Un sistema di tre cerchi non intersecantisi in un dato triangolo si dice rigido se non é possibile deformare uno dei cerchi aumentando il raggio, senza muovere gli altri due e senza sovrappore i cerchi.
La soluzione del problema é all'interno dei sistemi rigidi

Lemma. Ogni cerchio di un sistema rigido ha al meno tre punti di contatto con gli altri cerchi o con i lati del triangolo. Questi tre punti non stanno tutti su una semicirconferenza

Lemma. Ci sono, a meno di ovvie equivalenze, 14 sistemi rigidi differenti. Sono descritti nella figura seguente; i primi cinque hanno un cerchio che tocca tutti e tre i lati, ..., nell'ultimo ogni cerchio tocca solo un lato del triangolo.

14 configurazioni rigide