Classificazione delle Varietà Proiettive

Marco Andreatta

Dipartimento di Matematica
Università di Trento

Napoli-2025

Introduzione

Lo **Spazio Proiettivo** $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è il completamento (compattificazione) dello Spazio Affine con l'aggiunta dei punti all'infinito (iperpiano).

Introduzione

Lo **Spazio Proiettivo** $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è il completamento (compattificazione) dello Spazio Affine con l'aggiunta dei punti all'infinito (iperpiano).

Questo concetto nasce dalla pratica della pittura in prospettiva dei pittori italiani del Rinascimento:
Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca.

Introduzione

Lo **Spazio Proiettivo** $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è il completamento (compattificazione) dello Spazio Affine con l'aggiunta dei punti all'infinito (iperpiano).

Questo concetto nasce dalla pratica della pittura in prospettiva dei pittori italiani del Rinascimento:
Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca.

Introduzione

Una **Varietà Proiettiva** è data da un certo numero di polinomi omogenei.
Non è solo il suo luogo di zeri, ha altre proprietà algebriche che *Grothendieck* raccoglie nel concetto di **Schema**.

Introduzione

Una **Varietà Proiettiva** è data da un certo numero di polinomi omogenei.
Non è solo il suo luogo di zeri, ha altre proprietà algebriche che *Grothendieck* raccoglie nel concetto di **Schema**.

Teorema (Chow): ogni sottovarietà (analitica) dello Spazio Proiettivo è algebrica.

Introduzione

Una **Varietà Proiettiva** è data da un certo numero di polinomi omogenei.
Non è solo il suo luogo di zeri, ha altre proprietà algebriche che *Grothendieck* raccoglie nel concetto di **Schema**.

Teorema (Chow): ogni sottovarietà (analitica) dello Spazio Proiettivo è algebrica.

Le mappe tra varietà proiettive possono essere
- *regolari*, $f : X \to Y$, date localmente da polinomi;
- *razionali*, $f : X - -- > Y$, date localmente da quozienti di polinomi.

Queste ultime non sono definite in codimensione 1.

Classificazione Varietà Proiettive

Classificare le Varietà Proiettiva, nello spirito del *Programma di Erlangen* (F. Klein), significa studiarle a meno di equivalenza per trasformazioni i) *biregolar*i o ii) *birazionali*.

Classificazione Varietà Proiettive

Classificare le Varietà Proiettiva, nello spirito del *Programma di Erlangen* (F. Klein), significa studiarle a meno di equivalenza per trasformazioni i) *biregolar*i o ii) *birazionali*.

Si devono trovare

- modelli per ogni classe di equivalenza,
- invarianti che definiscono la classe
- descrivere la procedura con la quale associare una varietà al suo modello (attraverso trasformazioni biregolari o birazionali).

Classificazione Varietà Proiettive

Classificare le Varietà Proiettiva, nello spirito del *Programma di Erlangen* (F. Klein), significa studiarle a meno di equivalenza per trasformazioni i) *biregolar*i o ii) *birazionali*.

Si devono trovare

- modelli per ogni classe di equivalenza,
- invarianti che definiscono la classe
- descrivere la procedura con la quale associare una varietà al suo modello (attraverso trasformazioni biregolari o birazionali).

Medaglie Fields assegnate a ricercatori di questo settore:

K. Kodaira (1954), J-P. Serre (1954), M. Atiyah (1966), A. Grothendieck (1966), H. Hironaka (1970), D. Mumford (1974), E. Bombieri (1974), P. Deligne (1978) S.T. Yau (1982), G. Faltings (1986). S. Mori (1990), M. Kontsevich (1998), P. Scholze e C. Birkhar (2018).

Curve Algebriche

Teorema (Riemann-Poincaré). Una varietà proiettiva liscia X con $dim_{\mathbb{C}} X = 1$ è isomorfa (biregolarmente equivalente) a una delle seguenti.

Teorema (Riemann-Poincaré). Una varietà proiettiva liscia X con $dim_{\mathbb{C}}X = 1$ è isomorfa (biregolarmente equivalente) a una delle seguenti.

- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = S^2$, la *Sfera di Gauss* con (l'unica) struttura complessa. TX **ammette metrica hermitiana con curvatura costante positiva.**

Curve Algebriche

Teorema (Riemann-Poincaré). Una varietà proiettiva liscia X con $dim_{\mathbb{C}} X = 1$ è isomorfa (biregolarmente equivalente) a una delle seguenti.

- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = S^2$, la *Sfera di Gauss* con (l'unica) struttura complessa. TX **ammette metrica hermitiana con curvatura costante positiva.**
- $\mathbb{C}/\Gamma$, $\Gamma = \{a + \tau b\}$ reticolo con $Im\tau > 0$, *Curve Ellittiche*. TX **ammette metrica hermitiana con curvatura costante nulla.**

Curve Algebriche

Teorema (Riemann-Poincaré). Una varietà proiettiva liscia X con $dim_{\mathbb{C}} X = 1$ è isomorfa (biregolarmente equivalente) a una delle seguenti.

- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = S^2$, la *Sfera di Gauss* con (l'unica) struttura complessa. TX **ammette metrica hermitiana con curvatura costante positiva.**
- $\mathbb{C}/\Gamma$, $\Gamma = \{a + \tau b\}$ reticolo con $Im\tau > 0$, *Curve Ellittiche*. TX **ammette metrica hermitiana con curvatura costante nulla.**
- $\mathbb{D}/\pi_1(X)$, $\mathbb{D}$ è il *disco iperbolico* di Beltrami-Klein-Poincaré. TX **ammette metrica hermitiana con curvatura costante negativa.**

Caratterizzazione di $\mathbb{P}^n$

Teorema (Mori 1979; Frankel-Hartshorne conjecture).
Sia X una varietà compatta (proiettiva) liscia tale che TX ammette una metrica käheleriana con curvatura bisezionale olomorfa positiva, oppure se TX è ampio, allora $X \cong \mathbb{P}^n$.

Caratterizzazione di $\mathbb{P}^n$

Teorema (Mori 1979; Frankel-Hartshorne conjecture).
Sia X una varietà compatta (proiettiva) liscia tale che TX ammette una metrica käheleriana con curvatura bisezionale olomorfa positiva, oppure se TX è ampio, allora $X \cong \mathbb{P}^n$.

Teorema (Andreatta-Wisniewski 2001; Campana -Peternell conjecture).
Sia X una varietà compatta (proiettiva) liscia tale che TX ammette un sottofibrato ampio, allora $X \cong \mathbb{P}^n$.

Varietà Fano

Varietà lisce (o con buone singolarità!) per cui il *divisore anti canonico*

$$-K_X := -detTX^* = detTX$$

è ampio (positivo) si chiamano **Varietà di Fano** (canonico negativo!).

Varietà Fano

Varietà lisce (o con buone singolarità!) per cui il *divisore anti canonico*

$$-K_X := -detTX^* = detTX$$

è ampio (positivo) si chiamano **Varietà di Fano** (canonico negativo!).

$n = 1$ solo $\mathbb{P}^1$;
$n = 2$ superfici di del Pezzo (scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ e quadrica)
dP: Nobile, Rettore, Sindaco di Napoli, Senatore, sposó Anne C. Leffler;
$n = 3$, 3-varietà di Fano, classificate da Fano, Iskovskihk, Shokurov, Mukai, Mori; $17 + 88 = 105$ classi a meno di deformazioni.

Varietà Fano

Varietà lisce (o con buone singolarità!) per cui il *divisore anti canonico*

$$-K_X := -detTX^* = detTX$$

è ampio (positivo) si chiamano **Varietà di Fano** (canonico negativo!).

$n = 1$ solo $\mathbb{P}^1$;
$n = 2$ superfici di del Pezzo (scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ e quadrica)
dP: Nobile, Rettore, Sindaco di Napoli, Senatore, sposó Anne C. Leffler;
$n = 3$, 3-varietà di Fano, classificate da Fano, Iskovskihk, Shokurov, Mukai, Mori; $17 + 88 = 105$ classi a meno di deformazioni.

Curiosità: Fano's Last Fano, $X^{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ con curva sezione di genere 12, (Fano (1949)- Andreatta-Pignatelli (2023))

Varietà Fano

Varietà lisce (o con buone singolarità!) per cui il *divisore anti canonico*

$$-K_X := -detTX^* = detTX$$

è ampio (positivo) si chiamano **Varietà di Fano** (canonico negativo!).

$n = 1$ solo $\mathbb{P}^1$;
$n = 2$ superfici di del Pezzo (scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ e quadrica)
dP: Nobile, Rettore, Sindaco di Napoli, Senatore, sposó Anne C. Leffler;
$n = 3$, 3-varietà di Fano, classificate da Fano, Iskovskihk, Shokurov, Mukai, Mori; $17 + 88 = 105$ classi a meno di deformazioni.

Curiosità: Fano's Last Fano, $X^{22} \subset \mathbb{P}^{13}$ con curva sezione di genere 12, (Fano (1949)- Andreatta-Pignatelli (2023))

Classificazione delle 3 e 4 -varietà di Fano con singolarità terminali, A. Corti ed altri: *Periodic Table of Shapes*.

Alcune Proprietà delle Varietà di Fano

- Ci sono 3-varietà di Fano che non sono razionali (Clemens-Griffiths, Iskovskihk-Manin, Artin-Mumford)

Alcune Proprietà delle Varietà di Fano

- Ci sono 3-varietà di Fano che non sono razionali (Clemens-Griffiths, Iskovskihk-Manin, Artin-Mumford)
- Le Varietà di Fano sono ricoperte da curve razionali (unirigate) (Mori 1979); di più sono rationally chain connected.

Alcune Proprietà delle Varietà di Fano

- Ci sono 3-varietà di Fano che non sono razionali (Clemens-Griffiths, Iskovskihk-Manin, Artin-Mumford)
- Le Varietà di Fano sono ricoperte da curve razionali (unirigate) (Mori 1979); di più sono rationally chain connected.
- Le Varietà di Fano di data dimensione e grado formano una famiglia limitata, sono classificate da un numero finito di varietà (Kollar-Myaoka- Mori e Nadel (1991); singolari Birkar (2021))

Alcune Proprietà delle Varietà di Fano

- Ci sono 3-varietà di Fano che non sono razionali (Clemens-Griffiths, Iskovskihk-Manin, Artin-Mumford)
- Le Varietà di Fano sono ricoperte da curve razionali (unirigate) (Mori 1979); di più sono rationally chain connected.
- Le Varietà di Fano di data dimensione e grado formano una famiglia limitata, sono classificate da un numero finito di varietà (Kollar-Myaoka- Mori e Nadel (1991); singolari Birkar (2021))
- Le Varietà di Fano sono le uniche varietà che possono non ammettere metriche di Kähler-Einstein (Matsushima, Futaki, Tian). La ammette se e solo se è K-stabile (Donaldson et al. (2015)).

La definizione corretta

Una varietà proiettiva X, liscia o con singolarità che permettano di definire K_X o un suo multiplo come fibrato lineare, tale che $K_X \cdot C \geq 0$ per ogni curva $C \subset X$ (K_X è *nef*), si dice un *modello minimale*.

La definizione corretta

Una varietà proiettiva X, liscia o con singolarità che permettano di definire K_X o un suo multiplo come fibrato lineare, tale che $K_X \cdot C \geq 0$ per ogni curva $C \subset X$ (K_X è *nef*), si dice un *modello minimale*.

(Abundance Conjecture. Se K_X è nef allora è *semiampio*.
In particolare definisce una mappa (pluricanonica) $X \to \mathbb{P}^N$ che aiuta a descrivere X.)

La definizione corretta

Una varietà proiettiva X, liscia o con singolarità che permettano di definire K_X o un suo multiplo come fibrato lineare, tale che $K_X \cdot C \geq 0$ per ogni curva $C \subset X$ (K_X è *nef*), si dice un *modello minimale*.

(Abundance Conjecture. Se K_X è nef allora è *semiampio*.
In particolare definisce una mappa (pluricanonica) $X \to \mathbb{P}^N$ che aiuta a descrivere X.)

L'idea di Mori, ispirata da quelle di Castelnuovo ed Enriques per le superfici (superfici adeguatamente preparate), è di partire da una Varietà Proiettiva, eliminare tutte le curve su cui il canonico é negativo e ottenere un modello minimale.
Se non si riesce si deve poter descrivere X.

La definizione corretta

Una varietà proiettiva X, liscia o con singolarità che permettano di definire K_X o un suo multiplo come fibrato lineare, tale che $K_X \cdot C \geq 0$ per ogni curva $C \subset X$ (K_X è *nef*), si dice un *modello minimale*.

(Abundance Conjecture. Se K_X è nef allora è *semiampio*.
In particolare definisce una mappa (pluricanonica) $X \to \mathbb{P}^N$ che aiuta a descrivere X.)

L'idea di Mori, ispirata da quelle di Castelnuovo ed Enriques per le superfici (superfici adeguatamente preparate), è di partire da una Varietà Proiettiva, eliminare tutte le curve su cui il canonico é negativo e ottenere un modello minimale.
Se non si riesce si deve poter descrivere X.

La procedura viene organizzata in un "Programma"; si incontrano parecchie difficoltà, molte superate negli ultimi 40 anni.

Teoria di Mori

Mori considera le curve in una varietà proiettiva, $C \subset X$, tali che $K_X \cdot C < 0$.

All'interno del $\mathbb{R}$- spazio vettoriale $N_1(X)$ costruito come gruppo libero generato dalle curve in X modulo equivalenza numerica, considera il cono delle curve effettive $NE(X)$ (cono di Kleiman.Mori).

Teoria di Mori

Mori considera le curve in una varietà proiettiva, $C \subset X$, tali che $K_X \cdot C < 0$.

All'interno del $\mathbb{R}$- spazio vettoriale $N_1(X)$ costruito come gruppo libero generato dalle curve in X modulo equivalenza numerica, considera il cono delle curve effettive $NE(X)$ (cono di Kleiman.Mori).

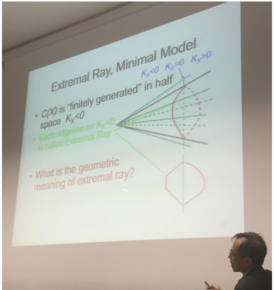
Teorema del Cono (Mori 1981).
1) La parte del cono $NE(X)$ delle curve con $K_X \cdot C < 0$ è poliedrale,
2) i raggi estremali sono generati da curve razionali
3) per ogni $\epsilon > 0$ i raggi con $K_X \cdot C \leq \epsilon < 0$ sono finiti.

Teoria di Mori

Mori considera le curve in una varietà proiettiva, $C \subset X$, tali che $K_X \cdot C < 0$.

All'interno del $\mathbb{R}$- spazio vettoriale $N_1(X)$ costruito come gruppo libero generato dalle curve in X modulo equivalenza numerica, considera il cono delle curve effettive $NE(X)$ (cono di Kleiman.Mori).

Teorema del Cono (Mori 1981).
1) La parte del cono $NE(X)$ delle curve con $K_X \cdot C < 0$ è poliedrale,
2) i raggi estremali sono generati da curve razionali
3) per ogni $\epsilon > 0$ i raggi con $K_X \cdot C \leq \epsilon < 0$ sono finiti.



Teoria di Mori

Teorema delle Contrazioni (Mori-Kawamata-Shokurov-...).
Sia $R = \mathbb{R}[C] \in NE(X)$ un raggio estremale con $K_X \cdot C < 0$.
Esiste un morfismo suriettivo $f_R : X \to Y$ in una varietà proiettiva normale, a fibre connesse, che contrae tutte e sole le curve nel raggio R.

Teorema delle Contrazioni (Mori-Kawamata-Shokurov-...).
Sia $R = \mathbb{R}[C] \in NE(X)$ un raggio estremale con $K_X \cdot C < 0$.
Esiste un morfismo suriettivo $f_R : X \to Y$ in una varietà proiettiva normale, a fibre connesse, che contrae tutte e sole le curve nel raggio R.

Il morfismo f si chiama contrazione estremale o di Fano-Mori e può essere di tre tipi:

- *fibrata*, se $dimX < dimY$
- *birazionale divisoriale*, se $dimX = dimY$ e il luogo eccezionale E è un divisore
- *birazionale piccola*, se $dimX = dimY$ e $dimE < (n - 1)$.

(Attenzione, se la contrazione è piccola non possiamo più definire K_Y (né un suo multiplo) come fibrato lineare!)

Classificazione Contrazioni Birazionali su Varietà liscie

Se $dimX = 2$, Teorema di Contrazione, Castelnuovo. La contrazione associata è data dal blow-up di un punto liscio (il raggio è generato da una *(-1) curva*).

Classificazione Contrazioni Birazionali su Varietà liscie

Se $dimX = 2$, Teorema di Contrazione, Castelnuovo. La contrazione associata è data dal blow-up di un punto liscio (il raggio è generato da una *(-1) curva*).

Se $dimX = 3$, Teorema di Classificazione, Mori (1981). Oltre ai blow-up lisci lungo punti o curve, le contrazioni di un divisore $D \subset X$ ad un punto con D isomorfo a $\mathbb{P}^2$ e normale $\mathcal{O}(-2)$ o D isomorfo ad una quadrica (liscia o singolare).

Classificazione Contrazioni Birazionali su Varietà liscie

Se $dimX = 2$, Teorema di Contrazione, Castelnuovo. La contrazione associata è data dal blow-up di un punto liscio (il raggio è generato da una *(-1) curva*).

Se $dimX = 3$, Teorema di Classificazione, Mori (1981). Oltre ai blow-up lisci lungo punti o curve, le contrazioni di un divisore $D \subset X$ ad un punto con D isomorfo a $\mathbb{P}^2$ e normale $\mathcal{O}(-2)$ o D isomorfo ad una quadrica (liscia o singolare).

Se $dimX = 4$, Teorema di Classificazione, Andreatta-Wisniewski (1998) Oltre ai blow-up lisci da segnalare contrazioni divisoriali a superfici con jumping fibers e contrazioni piccole (Kawamata).

Minimal Model Program

L'idea di Mori è dunque quella di partire da una Varietà Proiettiva, contrarre tutti i raggi estremali su cui K_X è negativo e ottenere un modello minimale. Se non si riesce si deve poter descrivere X.

Minimal Model Program

L'idea di Mori è dunque quella di partire da una Varietà Proiettiva, contrarre tutti i raggi estremali su cui K_X è negativo e ottenere un modello minimale. Se non si riesce si deve poter descrivere X.

Eccone un'idea partendo da un raggio R su X e denotando con $f_R : X \to X'$ la sua contrazione possiamo avere le seguenti possibilità:

1. la contrazione è fibrata (f_R è un Mori fiber space); la fibra generale è di Fano e, per "induzione", si può cercare di descrivere f_R e quindi X. X è unirigata e non è birazionale ad un modello minimale.

Minimal Model Program

L'idea di Mori è dunque quella di partire da una Varietà Proiettiva, contrarre tutti i raggi estremali su cui K_X è negativo e ottenere un modello minimale. Se non si riesce si deve poter descrivere X.

Eccone un'idea partendo da un raggio R su X e denotando con $f_R : X \to X'$ la sua contrazione possiamo avere le seguenti possibilità:

1. la contrazione è fibrata (f_R è un Mori fiber space); la fibra generale è di Fano e, per "induzione", si può cercare di descrivere f_R e quindi X. X è unirigata e non è birazionale ad un modello minimale.

$\Rightarrow k(X) = \oplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(X, mK_X) = -\infty$. (Congettura di Mori: $\Leftarrow$?).

Minimal Model Program

L'idea di Mori è dunque quella di partire da una Varietà Proiettiva, contrarre tutti i raggi estremali su cui K_X è negativo e ottenere un modello minimale. Se non si riesce si deve poter descrivere X.

Eccone un'idea partendo da un raggio R su X e denotando con $f_R : X \to X'$ la sua contrazione possiamo avere le seguenti possibilità:

1. la contrazione è fibrata (f_R è un Mori fiber space); la fibra generale è di Fano e, per "induzione", si può cercare di descrivere f_R e quindi X. X è unirigata e non è birazionale ad un modello minimale.
$\Rightarrow k(X) = \oplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(X, mK_X) = -\infty$. (Congettura di Mori: $\Leftarrow$?).
2. la contrazione è birazionale, divisoriale o piccola.

Minimal Model Program

L'idea di Mori è dunque quella di partire da una Varietà Proiettiva, contrarre tutti i raggi estremali su cui K_X è negativo e ottenere un modello minimale. Se non si riesce si deve poter descrivere X.

Eccone un'idea partendo da un raggio R su X e denotando con $f_R : X \to X'$ la sua contrazione possiamo avere le seguenti possibilità:

1. la contrazione è fibrata (f_R è un Mori fiber space); la fibra generale è di Fano e, per "induzione", si può cercare di descrivere f_R e quindi X. X è unirigata e non è birazionale ad un modello minimale.

$\Rightarrow k(X) = \oplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(X, mK_X) = -\infty$. (Congettura di Mori: $\Leftarrow$?).

2. la contrazione è birazionale, divisoriale o piccola.

- Nel primo caso X' può essere singolare ma si riesce a definire $K_{X'}$; Si riparte da X'. Si noti che la dimensione del cono di Kleiman-Mori diminuisce e quindi la procedura deve terminare.

Minimal Model Program

L'idea di Mori è dunque quella di partire da una Varietà Proiettiva, contrarre tutti i raggi estremali su cui K_X è negativo e ottenere un modello minimale. Se non si riesce si deve poter descrivere X.

Eccone un'idea partendo da un raggio R su X e denotando con $f_R : X \to X'$ la sua contrazione possiamo avere le seguenti possibilità:

1. la contrazione è fibrata (f_R è un Mori fiber space); la fibra generale è di Fano e, per "induzione", si può cercare di descrivere f_R e quindi X. X è unirigata e non è birazionale ad un modello minimale.

$\Rightarrow k(X) = \oplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(X, mK_X) = -\infty$. (Congettura di Mori: $\Leftarrow$?).

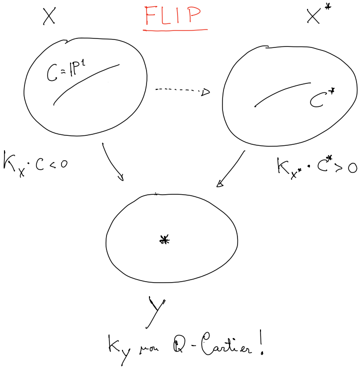
2. la contrazione è birazionale, divisoriale o piccola.

- Nel primo caso X' può essere singolare ma si riesce a definire $K_{X'}$; Si riparte da X'. Si noti che la dimensione del cono di Kleiman-Mori diminuisce e quindi la procedura deve terminare.

- Nel secondo caso la singolarità di X' non permette di costruire $K_{X'}$ come fibrato.

Flip e MMP per 3-varietà

Il secondo caso appare già nelle 3-varietà:



Flip e MMP per 3-varietà

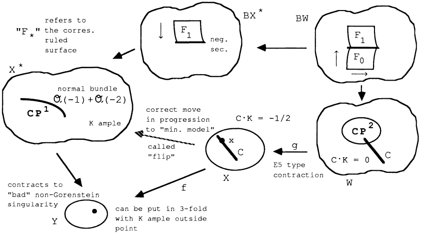
Esempio di Paolo Francia, con relativo Flip.
Estratto da Astérisque 1987 Clemens-Mori-Kollár

We first study an example of this situation. In the example, the (directed) flip will remove the curve $C = \mathbf{CP}^1$ from the singular variety X and replace it with $D = \mathbf{CP}^1$ to achieve the "improved" variety X^* (which in this case is non-singular). The process is most easily explained in reverse, as a sequence of blowing-ups

$$X^* \longleftarrow BX^* \longleftarrow BW$$

followed by a sequence of blowing-downs

$$BW \longrightarrow W \longrightarrow X:$$

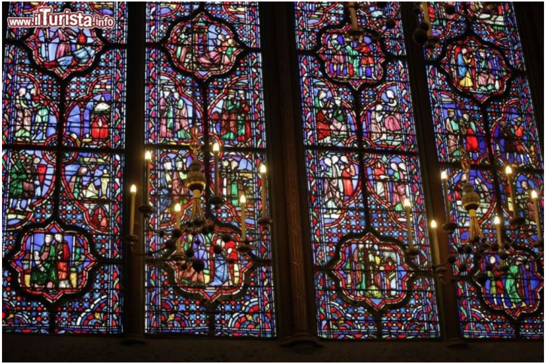


Flip e MMP per 3-varietà

- (1985) Mori classifica le singolarità terminali su 3-varietà.
- (1988) Mori, e poi (1992) Mori e Kollár, classificano tutte le contrazioni piccole e i loro flip su 3-varietà.

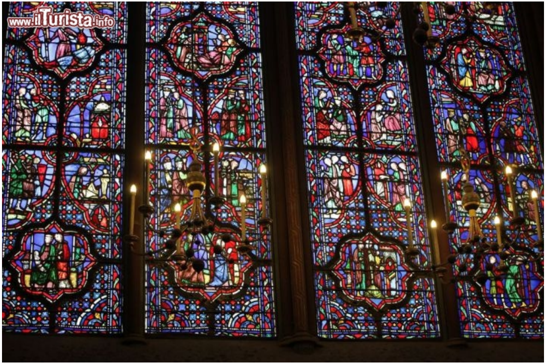
Flip e MMP per 3-varietà

- (1985) Mori classifica le singolarità terminali su 3-varietà.
- (1988) Mori, e poi (1992) Mori e Kollár, classificano tutte le contrazioni piccole e i loro flip su 3-varietà.



Flip e MMP per 3-varietà

- (1985) Mori classifica le singolarità terminali su 3-varietà.
- (1988) Mori, e poi (1992) Mori e Kollár, classificano tutte le contrazioni piccole e i loro flip su 3-varietà.



$dim = 3 \Longrightarrow$: Termination of Flips (Shokurov 1986) e Esistenza di Modelli Minimali.

MMP per n-varietà

Esistenza dei Modelli Minimali (Birkhar-Cascini-Hacon-McKernan). Sia X una varietà proiettiva *di tipo generale* allora X ammette un Modello Minimale.

(basato, oltre che sui risultati e costruzioni di Mori ed al., su risultati di Shokurov e di Hacon-McKernan sulla esistenza e terminazione dei Flip.)

Premi

- S. Mori: Fields Medalist in 1990 for *the proof of Hartshorne's conjecture and his work on the classification of three-dimensional algebraic varieties*

Premi

- S. Mori: Fields Medalist in 1990 for *the proof of Hartshorne's conjecture and his work on the classification of three-dimensional algebraic varieties*

- C. Hacon and J. McKernan: Breakthrough Prize in Mathematics 2018 for *transformational contributions to birational algebraic geometry, especially to the minimal model program in all dimensions*

Premi

- S. Mori: Fields Medalist in 1990 for *the proof of Hartshorne's conjecture and his work on the classification of three-dimensional algebraic varieties*

- C. Hacon and J. McKernan: Breakthrough Prize in Mathematics 2018 for *transformational contributions to birational algebraic geometry, especially to the minimal model program in all dimensions*

-C. Birkhar : Fields Medalist in 2018 for *the proof of the boundedness of Fano varieties and for contributions to the minimal model program*.

Premi

- S. Mori: Fields Medalist in 1990 for *the proof of Hartshorne's conjecture and his work on the classification of three-dimensional algebraic varieties*

- C. Hacon and J. McKernan: Breakthrough Prize in Mathematics 2018 for *transformational contributions to birational algebraic geometry, especially to the minimal model program in all dimensions*

-C. Birkhar : Fields Medalist in 2018 for *the proof of the boundedness of Fano varieties and for contributions to the minimal model program*.

- ??? : nuovo premio UMI 2025 per *lavori collegati alla ricerca di Federigo Enriques,* ≤ 35.

Teoria dell'Aggiunzione

Si consideri una Varietà Proiettiva immersa, $X^n \subset \mathbb{P}^N$, e sia $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)_{|X}$.

Teoria dell'Aggiunzione

Si consideri una Varietà Proiettiva immersa, $X^n \subset \mathbb{P}^N$, e sia $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)_{|X}$.

Studiare la positività (nefness) di $K_X + rH$ con $r > 0$.

Teoria dell'Aggiunzione

Si consideri una Varietà Proiettiva immersa, $X^n \subset \mathbb{P}^N$, e sia $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)_{|X}$.

Studiare la positività (nefness) di $K_X + rH$ con $r > 0$.

Per $r > (n-3)$ esiste una teoria ben sviluppata,
in corso di studio il caso $r = (n-3)$.