

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Numeri complessi | 3 |
| 1.1 | Un po' di storia... | 3 |
| 1.2 | Bombelli e i numeri complessi | 4 |
| 1.3 | Rappresentazione dei numeri complessi | 5 |
| 1.4 | Proprietà fondamentali dei numeri complessi | 7 |
| 2 | Teorema fondamentale dell'algebra | 10 |
| 3 | Funzioni complesse | 14 |
| 3.1 | Applicazioni all'idrodinamica | 15 |
| 3.2 | Funzioni olomorfe | 18 |
| 4 | Numeri ipercomplessi | 20 |
| 4.1 | Da dove nascono i numeri ipercomplessi? | 20 |
| 4.2 | I quaternioni | 22 |
| 4.3 | Gli otteti | 25 |
| 5 | Conclusione | 27 |

Introduzione

Questa relazione si propone di presentare i numeri complessi ed ipercomplessi in maniera coinvolgente ed affascinante.

Il lettore avrà la sensazione di trovarsi di fronte, non tanto a dei concetti astratti ed incomprensibili, quanto a delle scoperte fondamentali che hanno portato, e portano tutt'ora, ad una maggiore comprensione dell'intero sistema matematico e non solo.

Sono innumerevoli le applicazioni di questi strani numeri allo studio del mondo reale. La fisica quantistica è solo uno degli esempi che si possono citare a riguardo. L'idrodinamica rappresenta un ottimo ambiente dove trovano applicazione i numeri complessi e dove vengono soddisfatte le cosiddette equazioni di Cauchy-Riemann. E' comune inoltre, per i veicoli spaziali, un sistema di assetto, comandato mediante le proprietà dei quaternioni; altri impieghi sorprendenti sono la robotica, in cui essi trovano impiego per individuare la posizione dei bracci meccanici.

E' nostro interesse, dunque, prendere maggiore dimistichezza con questi numeri, allo scopo di essere maggiormente consapevoli di ciò che accade nel mondo esterno.

Cercando di estendere i numeri reali \mathfrak{R} a dimensioni maggiori, vedremo però che si perdono delle importanti proprietà, quali l'associatività e la commutatività: rimane comunque valido il teorema secondo cui, le strutture che presenteremo di seguito, (numeri reali \mathfrak{R} , numeri complessi \mathbb{C} , quaternioni \mathbb{H} e otteti \mathbb{O}) sono in realtà le uniche strutture di campo su \mathfrak{R}^n definite con le operazioni di somma vettoriale e prodotto che rispettano la norma.

Iniziamo allora la nostra trattazione, cercando di capire come nacquero i numeri complessi. . .

1 Numeri complessi

1.1 Un po' di storia...

All'inizio del Cinquecento, in Italia, il Rinascimento è in pieno sviluppo e anche la matematica occupa un posto di rilievo in questo emergere di nuove idee.

La risoluzione delle equazioni di secondo grado con il metodo di “completamento del quadrato” era nota sin dai tempi dei Babilonesi. L'equazione cubica, invece, aveva fino ad allora sfidato i matematici tanto che, ancora nel 1494, Luca Pacioli aveva sostenuto che la soluzione dell'equazione cubica generale era impossibile.

Scipione Dal Ferro (1465-1526), professore di matematica a Bologna, riuscì a risolvere le equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ intorno al 1500; egli però non pubblicò il suo metodo risolutivo in quanto in tale periodo le scoperte venivano spesso tenute nascoste per poi sfidare i rivali a risolvere lo stesso problema. Tale metodo fu rivelato dallo stesso Scipione Dal Ferro, alla fine della sua vita, ad un suo allievo, Antonio Maria Fior.

Anche Tartaglia era convinto di aver trovato un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado del tipo $x^3 + px = q$ e $x^3 + px^2 = q$ con p e q positivi.

Nel 1535 fu quindi organizzata una sfida matematica tra Fior e Tartaglia. Ognuno dei contendenti propose 30 problemi all'avversario. Tartaglia risolse tutti e trenta i problemi proposti da Fior, mentre Fior non riuscì a risolvere nemmeno uno dei quesiti posti da Tartaglia. La notizia della brillante vittoria di Tartaglia nella sfida raggiunse Girolamo Cardano (1501-1576). Tartaglia, date le insistenze di Cardano, finì per rivelargli il suo metodo, in cambio della solenne promessa di Cardano di mantenere tale metodo segreto.

Nonostante questo impegno Cardano pubblicò la sua versione del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado nella sua opera “*Ars Magna*”.

La soluzione di Del Ferro-Tartaglia-Cardano dell'equazione cubica $y^3 = py + q$ (vedi Appendice) è:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (1)$$

Dal momento che l'espressione $y^3 - py - q$ è positiva per un valore sufficientemente grande di y positivo e negativo per un valore sufficientemente grande di y negativo, l'equazione cubica deve avere almeno una soluzione reale. Di conseguenza, deve essere risolvibile anche il caso in cui $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$.

Era dunque necessario riuscire a trattare con espressioni del tipo:

$$\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a - b\sqrt{-1}}. \quad (2)$$

Il primo che riconobbe la necessità di ampliare i numeri allora conosciuti con altri numeri, definiti poi **numeri complessi**, fu il matematico bolognese Rafael Bombelli (1526-1573).

1.2 Bombelli e i numeri complessi

Bombelli, nella sua opera “L’Algebra”, raccolse e completò i risultati ottenuti in campo algebrico durante la prima metà del Cinquecento da diversi matematici; si propose di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso irriducibile, cioè quando, nella formula di Cardano, si presenta la radice quadrata di un numero negativo.

Nell’Algebra, Bombelli si occupò del calcolo con potenze e con radici, e di equazioni algebriche. A lui si deve inoltre l’introduzione degli esponenti per indicare le potenze dell’incognita.

Nel libro I il matematico prende in esame le radici immaginarie delle equazioni, che egli chiama “quantità silvestri”, e giunge ad operare con i numeri che noi oggi chiamiamo “complessi”.

Bombelli introdusse i termini “più di meno” e “meno di meno”, per indicare $+\sqrt{-1}$ ovvero $+i$ e $-\sqrt{-1}$ ovvero $-i$.

Stabili inoltre le regole seguenti:

Più via più di meno, fa più di meno.
Meno via più di meno, fa meno di meno.
Più via meno di meno, fa meno di meno.
Meno via meno di meno, fa più di meno.
Più di meno via più di meno, fa meno.
Più di meno via men di meno, fa più.
Meno di meno via più di meno, fa più.
Meno di meno via men di meno, fa meno.

che si possono formalizzare nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (+1) \times (+i) &= +i; \\ (-1) \times (+i) &= -i; \\ (+1) \times (-i) &= -i; \\ (-1) \times (-i) &= +i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(+i) \times (+i) &= -1; \\
(+i) \times (-i) &= +1; \\
(-i) \times (+i) &= +1; \\
(-i) \times (-i) &= -1.
\end{aligned}$$

Bombelli, dunque, stabilì le leggi formali di calcolo dei nuovi numeri, successivamente chiamati *immaginari* da Cartesio per indicare delle soluzioni considerate fittizie e irreali.

Nell'Algebra troviamo la corretta trattazione di alcune equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Dal Ferro, Cardano e Tartaglia, portano a radicali doppi coinvolgenti quantità non reali.

L'equazione $x^3 = 15x + 4$, ad esempio, che si sapeva avere soluzione $x = 4$ dal metodo di sostituzione diretta ($4^3 = 15 \times 4 + 4$), viene risolta da Bombelli nel seguente modo:

- dalla formula di Cardano, ricava $x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$;
- mediante la regola $\sqrt{-1}^2 = -1$, ottiene che $2 + \sqrt{-1}^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ e $2 - \sqrt{-1}^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$;
- sostituendo nella formula di Cardano, trova $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1})$ ossia $x = 4$.

Bombelli, dunque, mediante l'introduzione della regola $\sqrt{-1}^2 = -1$ ovvero $i^2 = -1$, riuscì a trovare un metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado anche nel caso di radicandi negativi, ottenendo soluzioni in accordo col metodo di sostituzione diretta.

A Bombelli spetta quindi il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le regole di calcolo con essi oltre a quello di aver svolto la teoria completa delle equazioni di terzo grado, discutendo e risolvendo tutti i casi che si possono presentare.

1.3 Rappresentazione dei numeri complessi

Nonostante il successo di Bombelli nell'uso dei numeri complessi, essi continuavano ad essere considerati, da molti matematici, come dei numeri non reali, tanto che tutt'oggi utilizziamo il termine "numeri immaginari" per denotare i numeri complessi e rappresentiamo con i l'unità immaginaria $\sqrt{-1}$.

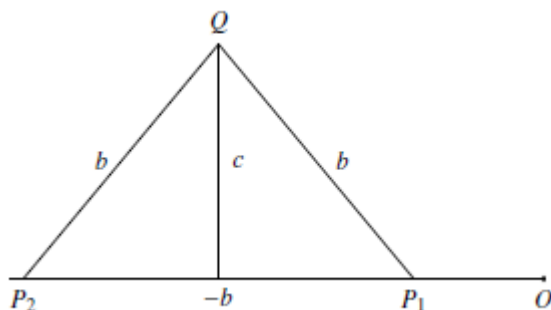
Il primo tentativo di dare ai numeri complessi un'interpretazione concreta fu compiuto da Wallis nel 1673.

Egli considerò quindi l'equazione generica di secondo grado:

$$x^2 + 2bx + c^2 = 0 \quad \text{con } b, c > 0 \quad (3)$$

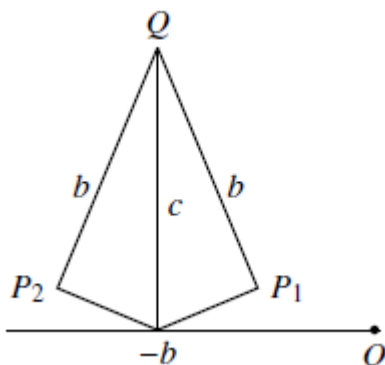
che ha soluzioni $x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$.

Nel caso in cui $b \geq c$, le soluzioni sono reali per cui le radici possono essere rappresentate da punti $P_1 := -b + \sqrt{b^2 - c^2}$ e $P_2 := -b - \sqrt{b^2 - c^2}$ nell'asse reale come nella figura sottostante:



Quando però $b < c$, le linee di lunghezza b , che partono da Q , sono troppo corte per raggiungere l'asse reale.

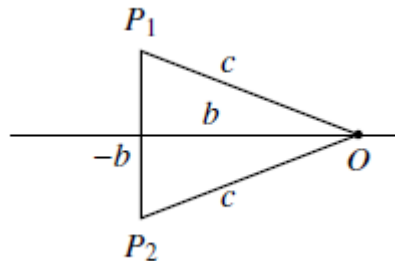
Wallis dunque, propose di rappresentare le soluzioni complesse $P_1 := -b + i\sqrt{c^2 - b^2}$ e $P_2 := -b - i\sqrt{c^2 - b^2}$ nel seguente modo:



L'errore di Wallis fu quello di rimanere troppo fedele alla costruzione del caso reale, continuando a pensare che "destra" e "sinistra" fossero le rappresentazioni grafiche dei simboli $+$ e $-$.

Tale soluzione portava infatti ad una contraddizione: nel caso in cui $b \rightarrow 0$, le due soluzioni tendono a $\pm ic$. Perchè queste quantità siano uguali dovrebbe valere l'uguaglianza $i = -i$, non verificata!

La rappresentazione corretta delle soluzioni complesse P_1 e P_2 è, invece,



rappresentazione che noi oggi utilizziamo.

Pur essendo un matematico eminente, non ci sorprende molto l'errore compiuto da Wallis nella costruzione della sua rappresentazione.

A quei tempi vi era infatti una difficoltà generale, nel mondo matematico, nel trattare con i numeri negativi. Pensatevi con le radici di numeri negativi! A tale confusione si aggiunse il fatto che nel 1700 Eulero, nella sua “Algebra”, diede una dimostrazione della relazione $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$.

Tale affermazione è falsa se pensiamo alla $\sqrt{6}$ come radice positiva di 6, quale la intendiamo noi oggi. Se però assumiamo che la $\sqrt{6}$ denoti la coppia di radici $\pm\sqrt{6}$, l'affermazione di Eulero diventa vera.

Per riuscire a trattare in maniera corretta con tali numeri “immaginari” è necessario prendere maggiore familiarità con essi: vediamo allora quali sono le proprietà fondamentali dei numeri complessi.

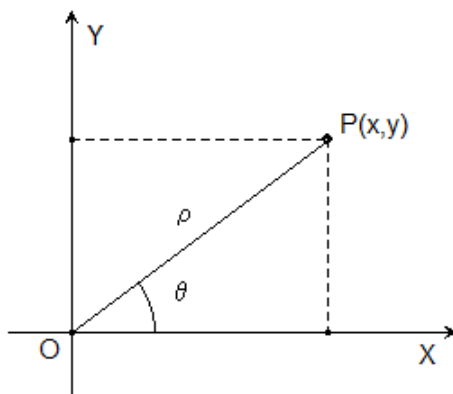
1.4 Proprietà fondamentali dei numeri complessi

Definiamo il numero complesso $z = a + ib$, con $a, b \in \mathfrak{R}$, dove i due addendi, a e ib , rappresentano rispettivamente la parte reale e immaginaria di z . Allora il complesso coniugato è definito come quel numero, indicato con \bar{z} , che ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta, i.e. $\bar{z} = a - ib$. Valgono in tal caso le seguenti operazioni:

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ (addizione)
- $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ (moltiplicazione)

Fissiamo ora un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con assi X e Y, e consideriamo il numero complesso z definito sopra.

Allora la coppia di numeri reali x e y si possono interpretare come coordinate cartesiane del punto P. Il piano ottenuto è quello rappresentato in figura sottostante e viene definito piano di Argand-Gauss o piano di Gauss.



In questo modo, così come aveva intuito Wallis, viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i numeri complessi.

L'asse delle ascisse viene anche chiamato *asse reale* e quello delle ordinate *asse immaginario*.

Dal punto di vista geometrico il modulo di un numero complesso $|z|$ rappresenta la distanza del punto z dall'origine. Inoltre il valore assoluto della differenza tra due numeri complessi $|z_1 - z_2|$ rappresenta la distanza del punto z_1 da z_2 .

Geometricamente il numero complesso coniugato, sopra definito, non è altro che il simmetrico di z rispetto all'asse delle X.

Dalla figura sopra riportata si nota come il numero complesso z si possa scrivere anche in forma trigonometrica, i.e. $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza tra il punto P e l'origine degli assi ed è quindi il *modulo* del numero complesso z , mentre l'angolo θ è detto *argomento* del numero complesso e rappresenta l'angolo formato tra il segmento \overline{OP} e l'asse delle ascisse.

Dalla formula di moltiplicazione introdotta in questo paragrafo, possiamo ricavare, nel caso di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica, la seguente:

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned} \quad (4)$$

Sfruttando tale formula, è possibile ora dimostrare per induzione la formula per calcolare la potenza con esponente intero di un numero complesso, detta

formula di De Moivre.

Se $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, la potenza n -esima di z è data da:

$$z^n = \rho^n [\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)]. \quad (5)$$

Utilizzando la formula di De Moivre si può dimostrare che ogni numero complesso non nullo z e per ogni numero naturale n , esistono esattamente n radici n -esime di z , ovvero esistono n numeri complessi w tali che $w^n = z$.

In generale è possibile dimostrare che, dato un polinomio di grado n , $P_n(x)$, avente coefficienti appartenenti a \mathbb{C} (campo dei complessi), esso ha n radici in \mathbb{C} , ciascuna contata con la dovuta molteplicità. Vediamo come ...

2 Teorema fondamentale dell'algebra

Esistono varie dimostrazioni del Teorema fondamentale dell'algebra. Tuttavia, il primo vero tentativo di provare questo teorema fu compiuto da d'Alembert nel 1746. La dimostrazione del matematico francese, però, presentava delle lacune: egli infatti aveva fatto uso di un teorema ausiliario non dimostrato.

Sarà poi grazie ad un impiegato bancario svizzero, J.R.Argand, che nel 1806 sarà provato in maniera definitiva il teorema, divenuto noto, in seguito, come "Lemma di d'Alembert".

Lemma 1 (di d'Alembert) *Sia $p(z) \in \mathbb{C}(z)$ non costante.*

Allora la funzione $|p(z)|$ non ha minimo locale i.e. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ con $p(z_0) \neq 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists z \in \mathbb{C}$ con $|z_0 - z| < \delta$ t.c. $|p(z_0)| > |p(z)|$.

Dimostrazione: Sia $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$.

Allora si ha:

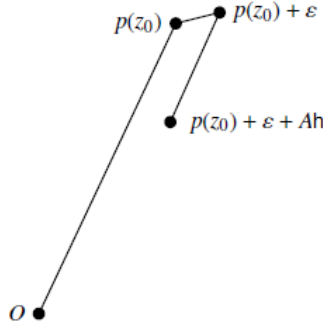
$$\begin{aligned} p(z_0 + h) &= a_0 + a_1(z_0 + h) + a_2(z_0 + h)^2 + \dots + a_n(z_0 + h)^n \\ &= a_0 + a_1z_0 + \dots + a_nz_0^n + (a_1 + 2a_2z_0 + \dots + na_nz_0)h + \\ &\quad + \frac{1}{2}(2a_2 + 6a_3z_0 + \dots)h^2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Ciò che abbiamo ottenuto è lo sviluppo in serie di Taylor: $p(z_0 + h) = p(z_0) + p'(z_0)h + p''(z_0)h^2 + \dots$

Denotando con $A = p'(z_0)$ possiamo scrivere $p(z_0 + h) = p(z_0) + Ah + \epsilon$ con $\epsilon \in \mathbb{C}$ t.c. $\frac{|\epsilon|}{|h|} \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$.

Intuitivamente il Lemma di d'Alembert richiede di cercare un numero complesso z della forma $z = z_0 + h$ con $|h| < \delta$ e $h \in \mathbb{C}$ in modo tale che $|p(z)| < |p(z_0)|$.

Scegliamo $h = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ con θ tale che l'angolo di Ah sia opposto a quello di $p(z_0)$ e ρ tale che $|\epsilon| \ll |Ah|$. In questo modo, come mostrato in figura sottostante, otteniamo la relazione voluta $p(z_0 + h) < p(z_0)$.



Per una dimostrazione più rigorosa procediamo nel seguente modo:

Definiamo $p(z_0+h) = A_0 + A_1h + \dots + A_nh^n$ con $A_0 = p(z_0)$, $A_1 = p'(z_0)$, $A_2 = p''(z_0) \dots \in \mathbb{C}$.

Sia m il più piccolo intero positivo tale che $A_m \neq 0$; m esiste perchè $A_n \neq 0$. Osservando che $A_0 = p(z_0)$ e dividendo per $p(z_0)$ primo e secondo membro, otteniamo l'identità:

$$\frac{p(z_0+h)}{p(z_0)} = 1 + B_m h^m + \dots + B_n h^n \quad (7)$$

dove abbiamo posto $B_i = \frac{A_i}{A_0}$. Poichè $B_m \neq 0$ possiamo esprimerlo come:

$$B_m = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \quad (8)$$

dove $r = |B_m| > 0$. Analogamente scriviamo:

$$h = \rho(\cos(\psi) + i \sin(\psi)). \quad (9)$$

Pertanto si ricava la seguente:

$$B_m h^m = r \rho^m (\cos(\phi + m\psi) + i \sin(\phi + m\psi)). \quad (10)$$

Scegliendo ψ in modo tale che si abbia $\phi + m\psi = \pi$, si ottiene:

$$B_m h^m = -r \rho^m. \quad (11)$$

Con questa scelta di h la -(7) diventa:

$$\frac{p(z_0+h)}{p(z_0)} = 1 - r \rho^m + h^m [B_{m+1}h + \dots + B_n h^{n-m}] \quad (12)$$

Scegliendo inoltre $\rho > 0$ tale che $0 < r \rho^m < 1$, cioè $0 < \rho <^m \sqrt{\frac{1}{r}}$, si ottiene $0 < 1 + B_m h^m = 1 - r \rho^m < 1$.

Pertanto dalla -(12) deduciamo:

$$\frac{|p(z_0 + h)|}{|p(z_0)|} \leq 1 - r\rho^m + h^m |B_{m+1}h + \cdots + B_n h^{n-m}|. \quad (13)$$

Ora, l'espressione $B_{m+1}h + \cdots + B_n h^{n-m}$ è una funzione di h che tende a 0 al tendere di h a 0; quindi è possibile scegliere un valore $\rho = |h|$ sufficientemente piccolo perchè si abbia:

$$|B_{m+1}h + \cdots + B_n h^{n-m}| < r \quad (14)$$

Ma allora, dalla -(13), si ottiene:

$$\frac{|p(z_0 + h)|}{|p(z_0)|} < 1 - r\rho^m + r\rho^m \quad (15)$$

da cui $|p(z_0 + h)| < |p(z_0)|$ come volevasi dimostrare.

Teorema 1 (fondamentale dell'algebra) Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con grado di p , $\delta p \geq 1$. Allora $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tale che $p(\alpha) = 0$.

Dimostrazione:

Sia $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$.

Consideriamo ora il modulo di $p(z)$:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| \\ &= |a_n z^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \end{aligned} \quad (16)$$

Possiamo dunque affermare che esiste una costante k reale positiva tale che $\forall z$ con $|z| > k$, $|p(z)|$ cresce al crescere di z .

Sia allora $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $|p(z_0)| = \min_{z \in \overline{B}(0,k)} (|p(z)|)$. Si noti che tale z_0 esiste per il teorema di Weierstrass.

Ora, se $p(z_0) = 0$, allora abbiamo concluso: basta porre $\alpha = z_0$.

Se invece fosse $p(z_0) \neq 0$, allora vi sono due possibilità:

- $|z_0| < k$ ma questo contraddice il Lemma di d'Alembert;
- $|z_0| = k$ ma, per il Lemma di d'Alembert, in un intorno di z_0 esiste z tale che $|p(z)| < |p(z_0)|$. Questo porta ad una contraddizione perchè z non può essere nè $\leq k$ in quanto $|p(z_0)| = \min_{z \in \overline{B}(0,C)} (|p(z)|)$ e neanche $> k$ poichè $|p(z)|$ cresce al crescere di z .

Questo ci permette di concludere la dimostrazione: abbiamo trovato una radice α del polinomio $p(z)$.

Dal Teorema fondamentale dell'algebra seguono alcuni importanti risultati. Vediamoli qui di seguito.

Teorema 2 (di Ruffini) *Sia α una radice di $p(z)$ i.e. $p(\alpha) = 0$. Allora $p(z) = (z - \alpha)q(z)$ con $\delta q = \delta p - 1$*

Corollario 1 *Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, con $\delta p = n$. Allora esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ (eventualmente ripetuti) tali che $p(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$*

Dimostrazione

Se α è una radice, allora per il teorema di Ruffini vale $p(z) = (z - \alpha)q(z)$ con $\delta q = \delta p - 1$. La dimostrazione segue ora dal teorema fondamentale dell'algebra.

Corollario 2 *Sia $p(z) \in \mathfrak{R}(z)$. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora*

$$p(z) = \prod_i (z - \alpha_i) \prod_j (z^2 + p_j z + q_j) \quad \text{con } \alpha_i, p_j, q_j \in \mathfrak{R} \quad (17)$$

Dimostrazione

Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora anche $\bar{\alpha}$ lo è ($\overline{p(z)} = p(\bar{z})$). La dimostrazione segue allora da:

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z - \alpha\bar{\alpha} \quad \text{con } \alpha + \bar{\alpha} \text{ e } \alpha\bar{\alpha} \in \mathfrak{R} \quad (18)$$

3 Funzioni complesse

Quando Bombelli introdusse i numeri complessi, egli implicitamente introdusse anche le funzioni complesse.

La soluzione dell'equazione cubica $y^3 = py + q$, infatti,

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (19)$$

includeva la radice cubica di un argomento complesso quando $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

In generale, data una funzione $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, definita da $f(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$ con $x, y \in \mathfrak{R}$, è possibile pensare ad f come funzione nel campo dei complessi nel seguente modo:

Consideriamo il numero complesso z con $z = x + iy = (x, y)$, allora la funzione $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è definita come $f(z) = v(z) + iu(z)$.

Il bisogno di comprendere le funzioni complesse divenne fondamentale, in seguito, per lo studio e la risoluzione di integrali che fino ad allora non avevano trovato soluzione.

Fu grazie a Bernoulli che nel 1702, verrà introdotto il *logaritmo complesso*. Egli infatti aveva notato che:

$$\frac{dz}{1+z^2} = \frac{dz}{2(1+iz)} + \frac{dz}{2(1-iz)} \quad (20)$$

Grazie a questa relazione fu possibile calcolare in maniera più semplice l'integrale

$$\int \frac{dz}{1+z^2} \quad (21)$$

da cui ottenne la soluzione $\frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-z}{i+z} \right)$.

Allo stesso tempo Cotes scoprì una relazione tra i logaritmi complessi e le funzioni trigonometriche:

$$\log(\cos(x) + i \sin(x)) = ix. \quad (22)$$

Riconoscendo l'importanza del risultato, egli decise di intitolare il suo lavoro "Harmonia mensarum" ("Armonia delle misure").

Ancora più importante sarà poi il risultato di Eulero, il quale spostò l'attenzione dalla funzione logaritmo alla sua inversa, la funzione esponenziale,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad (23)$$

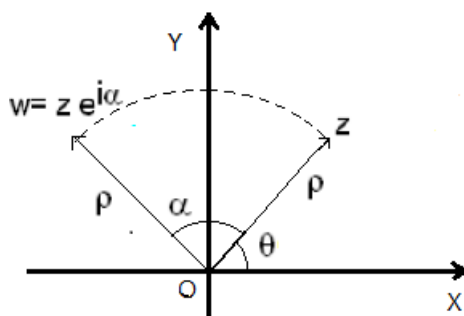
che permise di rendere più chiare le formule di De Moivre e le regole di addizione di sin e cos, derivandole dalla più semplice $e^{uv} = e^u e^v$.

Una delle più celebri equazioni della matematica, trovata anch'essa da Eulero, stabilisce una relazione tra le cinque più importanti costanti matematiche $(0, 1, \pi, e, i)$:

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (24)$$

Per provare tale relazione, supponiamo di avere un numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$, allora il prodotto $z e^{i\alpha}$ è dato da $z e^{i\alpha} = \rho e^{i\theta} e^{i\alpha} = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$.

La figura sottostante suggerisce che tale moltiplicazione determina una rotazione del vettore che rappresenta il numero z , di un angolo α in senso antiorario (se $\alpha > 0$).



Si può dunque pensare al numero complesso $e^{i\alpha}$ come ad un operatore che determina una rotazione attorno all'origine di un angolo α .

Con questa interpretazione dei numeri complessi diventa dunque facile spiegare l'equazione $e^{i\pi} + 1 = 0$. Il numero complesso $e^{i\pi}$ rappresenta la rotazione del vettore 1 di un angolo π : si ottiene quindi il numero complesso -1 .

3.1 Applicazioni all'idrodinamica

Nel Settecento, soprattutto con d'Alembert ed Eulero, e nell'Ottocento si ha un grande sviluppo dell'analisi complessa e delle sue applicazioni alla fisica e all'ingegneria.

Fu nel 1752 che D'Alembert scoprì che molte funzioni, in natura, si comportavano come la parte reale e immaginaria delle funzioni complesse.

Egli studiò in particolare il caso dell'idrodinamica trovando interessanti risultati. Vediamoli...

Teorema

Supponiamo che \mathfrak{R}^2 ruoti attorno all'origine O con velocità angolare $w(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$. Consideriamo un fluido che si muove nel piano con (v_x, v_y) componenti della sua velocità nel punto (x, y) . Definiamo inoltre

$$rot(v) := \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (25)$$

e

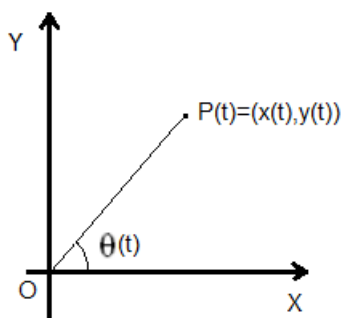
$$div(v) := \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}. \quad (26)$$

Allora valgono:

- Se $rot(v) = 0$, allora il fluido è irrotazionale, ovvero ha velocità di rotazione w nulla.
- Se $div(v) = 0$, allora il fluido è incomprimibile, ovvero la quantità che entra in una regione è uguale a quella che esce.

Dimostrazione

La dimostrazione della prima proposizione è banale.



Consideriamo infatti un punto materiale

$$P(t) = (x(t), y(t)) = (\rho \cos(\theta(t)), \rho \sin(\theta(t))), \quad (27)$$

da cui

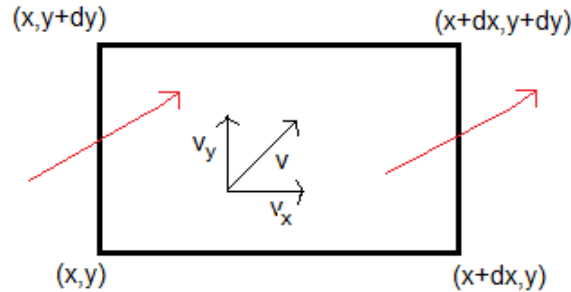
$$P'(t) = (-\rho \sin(\theta(t))\theta'(t), \rho \cos(\theta(t))\theta'(t)) = (-y(t)w, x(t)w) = w(-y(t), x(t)).$$

Dal fatto che $P' = (v_x, v_y) = (-y(t)w, x(t)w)$, ne segue che

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = -2w, \quad (28)$$

da cui se vale $rot(v) = 0$ si ha che anche $w = 0$.

Per dimostrare il secondo enunciato, consideriamo la figura sottostante:



Definiamo Q la quantità che passa attraverso il rettangolo in un certo intervallo di tempo:

$$\begin{aligned} Q &= (v_x(x, y) - v_x(x + dx, y))dy + (v_y(x, y) - v_y(x, y + dy))dx \\ &= -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dx dy \end{aligned} \quad (29)$$

dove l'ultimo passaggio deriva dal fatto che

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v_x(x + dx, y) - v_x(x, y)}{dx} \quad (30)$$

e

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{v_y(x, y + dy) - v_y(x, y)}{dy}. \quad (31)$$

Integrando ora su tutto il dominio U , aperto di \mathbb{R}^2 , si ottiene che la quantità di fluido che entra più quello che esce, è dato dall'espressione

$$\phi(U) = \iint_U \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dx dy, \quad (32)$$

da cui se $\text{div}(v) = 0$ allora anche $\phi(U) = 0$, come volevasi dimostrare.

E' possibile dimostrare che vale anche il viceversa del teorema enunciato:

Proposizione

Si consideri un fluido nel piano che sia irrotazionale e incomprimibile e sia $(v_x, v_y) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}$ il campo vettoriale delle velocità.

Allora valgono:

- $\text{rot}(v) = 0$;
- $\text{div}(v) = 0$.

3.2 Funzioni olomorfe

Le equazioni che aveva scoperto D'Alembert nel caso dell'idrodinamica, divennero successivamente note, in generale, come equazioni di Cauchy-Riemann. Esse rappresentano condizione di esistenza di *funzioni olomorfe*.

- Supponiamo, infatti, che f sia una funzione complessa definita da $f(z) = v(z) + iu(z)$ con $z = x + iy = (x, y)$. Allora f è olomorfa i.e. \exists

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (33)$$

dove $h \in \mathbb{C}$, se e solo se valgono:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

- Supponiamo inoltre che g sia una funzione integrabile e che D , rettangolo, sia un dominio per g (connesso, limitato e semplicemente connesso). Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, valgono:

$$\begin{cases} \iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D} g dx \\ \iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} g dy \end{cases}$$

A partire da questi due enunciati è possibile dimostrare il seguente:

Teorema di Cauchy

Sia V campo vettoriale su \mathbb{R}^2 :

$$V = (v, u) = v \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y} \quad (34)$$

Allora, posto $f(t) = u(t) + iv(t)$ e $dt = dx + idy$, si ha che, se il campo vettoriale è irrotazionale e incomprimibile, vale:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f(t)dt &= \int_{\partial D} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\partial D} (udx - vdy) + i \int_{\partial D} (vdx + udy) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{35}$$

Ne segue quindi che, supponendo f funzione olomorfa, l'integrale $\int_{\gamma} f(z)dz$, con γ cammino da z_0 a z , non dipende dalla scelta del cammino ma solo dai punti di partenza e arrivo.

La funzione $F(z) := \int_{\gamma} f(z)dz$ è dunque ben definita e derivabile con $F'(z) = f(z)$.

In questo modo, come affermato all'inizio del capitolo, le funzioni complesse divennero sempre più importanti per lo studio del calcolo integrale e per la soluzione di problemi che fino ad allora non avevano trovato risposta.

4 Numeri ipercomplessi

Nei capitoli precedenti abbiamo visto cosa accade passando dal caso unidimensionale a quello bidimensionale, vale a dire passando dai numeri reali \mathbb{R} ai numeri complessi \mathbb{C} .

Questi due sistemi numerici hanno in comune fondamentali proprietà algebriche e geometriche: la proprietà algebrica comune è il fatto di essere entrambi dei campi (per def. vedi Appendice), mentre quella geometrica riguarda l'esistenza di un valore assoluto, $|u|$, che misura la distanza di u dall'origine O , e soddisfa la proprietà tale per cui $|uv| = |u||v|$.

Ci chiediamo allora “Cosa succede se cerchiamo di generalizzare il concetto di numero reale alla dimensione n ”? In questo capitolo vedremo che esistono solo altri due casi in cui quest'idea funziona bene: il caso $n = 4$ e il caso $n = 8$.

Furono i matematici Hamilton e Graves a scoprire, tra il 1830 e il 1840, che le uniche algebre soddisfacenti la richiesta generalizzazione dei numeri reali erano quelle dei quaternioni e degli otteti. Essendo passati dalla dimensione $n = 2$ a dimensioni maggiori, tali numeri vennero chiamati appunto “ipercomplessi”.

4.1 Da dove nascono i numeri ipercomplessi?

Nel libro III della sua “Arithmetica”, Diofanto scrive che il numero 65 può essere scritto come somma di due quadrati in due diversi modi: $7^2 + 4^2$ oppure $8^2 + 1^2$.

Questo, dice, è dovuto al fatto che 65 è dato dal prodotto di 13 e 5, ognuno dei quali è somma di due quadrati: $13 = 2^2 + 3^2$ e $5 = 2^2 + 1^2$.

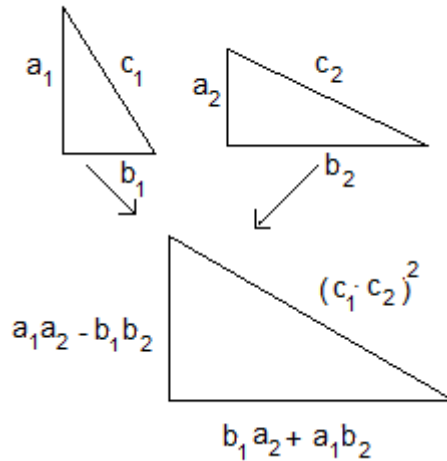
Sembrerebbe dunque che Diofanto fosse a conoscenza dell'identità:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 \mp b_1b_2)^2 + (b_1a_2 \pm a_1b_2)^2. \quad (36)$$

In realtà tale formula generale verrà osservata da al-Khazin per primo nel 950 e provata solo nel 1225 da Fibonacci in “Book of Squares”.

Ciò a cui Diofanto pensava, parlando di somme di quadrati $a^2 + b^2$, era il quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo rettangolo avente coppia (a, b) di misura dei cateti. Se prendiamo, ad esempio, la coppia di segni superiori nella formula, egli sta descrivendo una regola per produrre, a partire da due triangoli rettangoli, di coppie (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , un triangolo rettangolo avente come ipotenusa il prodotto delle ipotenuse dei triangoli di partenza.

Il triangolo ottenuto aveva coppia di cateti $(a_1a_2 - b_1b_2, b_1a_2 + a_1b_2)$.



Ora, se interpretiamo la coppia di numeri (a, b) come $a + ib$ invece che come misure dei cateti di un triangolo, la formula di Diofanto non è altro che la formula di moltiplicazione dei numeri complessi:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2). \quad (37)$$

L'ipotenusa $\sqrt{a^2 + b^2}$ è ciò che noi chiamiamo *valore assoluto* di $a + ib$, denotato con $|a + ib|$; l'identità trovata rappresenta la *proprietà moltiplicativa* del valore assoluto:

$$|a_1 + ib_1||a_2 + ib_2| = |(a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)|. \quad (38)$$

Sebbene Diofanto dedusse la moltiplicazione complessa, egli non definì alcuna regola di addizione tra numeri complessi. Sarà solo con Hamilton nel 1835, che, alla domanda "Che cos'è un numero complesso?" si riuscì a rispondere nel seguente modo:

Un numero complesso è una coppia ordinata (a, b) di numeri reali tali che vengano soddisfatte le seguenti regole:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2); \quad (39)$$

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, b_1a_2 + a_1b_2). \quad (40)$$

A differenza di Diofanto, Hamilton si rese conto dell'importanza della formula moltiplicativa tra coppie di numeri reali. Di fatto egli era interessato a trovare una regola moltiplicativa anche per le terne, le quaterne e così via.

Ovviamente la formula di addizione, da lui introdotta per le coppie di numeri reali, poteva essere estesa banalmente alle terne $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ e in generale per $n \forall n$.

Ma come fare per moltiplicare delle terne?

Diofanto non ebbe molto da dire sulle somme di tre quadrati: per lui era probabilmente ovvio che le somme di tre quadrati non potessero soddisfare una qualche formula moltiplicativa.

Egli notò ad esempio che 3 e 5 erano entrambi somme di tre quadrati, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$ e $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2$, ma il loro prodotto, 15, non lo era.

Seguiva che non poteva esistere una formula del tipo:

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = A^2 + B^2 + C^2 \quad (41)$$

con A, B, C combinazioni di a_i, b_i, c_i per $i = 1, 2$, con coefficienti interi.

Di conseguenza risultava che non poteva essere verificata neppure la proprietà moltiplicativa del valore assoluto per le terne:

$$|a_1, b_1, c_1| |a_2, b_2, c_2| = |A, B, C| \quad (42)$$

con A, B, C combinazioni di a_i, b_i, c_i per $i = 1, 2$.

Hamilton però, non notando queste e altre evidenze, continuò per anni a cercare una formula risolutiva per il prodotto di terne.

Seguendo l'esempio dei numeri complessi decise quindi di scrivere la terna (a, b, c) come $a + ib + jc$. In questo modo il problema si riduceva a determinare i prodotti i^2, j^2 e ij . Imponendo inoltre $i^2 = j^2 = -1$, era sufficiente trovare coefficienti α, β, γ tali che $ij = \alpha + i\beta + j\gamma$.

Tale problema però sembrava non avere alcuna soluzione. In particolare risultava impossibile conciliare la legge distributiva della moltiplicazione, con quella commutativa.

4.2 I quaternioni

Risale al 1853 lo scritto di Hamilton in cui dichiara che fu grazie alla supposizione $ij = -ji$, ovvero $ij = +k, ji = -k$, che comprese la necessità di pensare alle terne $a + ib + jc$ come forme imperfette di quaternioni ossia forme del tipo $a + ib + jc + kd$ o (a, b, c, d) , dove il simbolo k rappresenta una quantità da determinare.

Nel 1865, in una lettera al figlio, scrisse:

“But on the 16th day of the month [namely, October 1843] which happened to be a Monday and a council day of the Royal Irish Academy—I was walking along to preside, and your mother was walking with me, along the Royal Canal . . . and although she talked with me now and then, yet an undercurrent of thought was going on in my mind, which gave at last a result . . . An electric current seemed to close, and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work . . . I pulled out on the spot a pocket-book, which still exists, and made an entry there and then. Nor could I resist the impulse unphilosophical as it may have been—to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge the fundamental formula with the symbols i, j, k :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 1$$

which contains the solution of the Problem, but of course, as an inscription it has long since mouldered away.”

Hamilton, dunque, aveva rinunciato alla proprietà commutativa del prodotto, ma era riuscito in questo modo a trovare una formula generale per i quaternioni, il cui insieme era denotato con \mathbb{H} , tale per cui:

$$\begin{aligned} (a + ib + jc + kd)(\alpha + i\beta + j\gamma + k\delta) := & (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta) + \\ & + i(a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma) + \\ & + j(a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta) + \\ & + k(a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha). \end{aligned} \quad (43)$$

Ciò a cui Hamilton era interessato era la proprietà moltiplicativa del valore assoluto: “the modulus of a product is equal to the product of the moduli of the factors.”

Egli mostrò che il prodotto di due quaternioni diversi da zero era non nullo. In particolare valeva:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) := & (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta)^2 + \\ & + (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)^2 + \\ & + (a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta)^2 + \\ & + (a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha)^2. \end{aligned} \quad (44)$$

In realtà, a sua insaputa, tale formula era già stata scoperta da Eulero nel 1748 ed era stata utilizzata da Eulero e Lagrange per mostrare che ogni numero naturale può essere scritto come somma di quattro quadrati.

A prima vista tali espressioni appaiono come mere formule matematiche senza alcun risvolto pratico. Esistono invece molte applicazioni dei quaternioni alla fisica e all'astrodinamica.

Di fondamentale importanza in tal senso è l'enunciato seguente, dimostrato da Gauss:

- Ogni rotazione sferica può essere espressa da una funzione complessa della forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}} \quad (45)$$

Ogni funzione di questo tipo può essere rappresentata dalla matrice dei coefficienti:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

e può essere facilmente provato che la matrice di $f_1 f_2$ è il prodotto delle matrici f_1 e f_2 . Quindi le rotazioni della sfera possono essere studiate attraverso prodotti di matrici del tipo appena visto. E' possibile esprimere tali matrici in termini di quattro parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ con $a = \alpha + i\beta$ e $b = \gamma + i\delta$.

In questo modo possiamo riscrivere la -(46) in:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -\gamma + i\delta & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{i} + \gamma \mathbf{j} + \delta \mathbf{k} \end{aligned}$$

Le quattro matrici speciali $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ hanno lo stesso ruolo che svolgono $1, i, j, k$ nei quaternioni in quanto vale anche in questo caso:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1. \quad (47)$$

I quaternioni, dunque, sono esattamente le rotazioni di S^2 .

Oggi tali matrici speciali vengono chiamate *matrici di Pauli* e vengono utilizzate in particolare in fisica, ad esempio nella teoria quantistica.

4.3 Gli otteti

Nel dicembre del 1843 l'amico di Hamilton, Graves, scoprì un sistema di ot-tuple che soddisfaceva la proprietà moltiplicativa del valore assoluto. Ancora una volta però, un altro matematico, Cayley, anticipò Graves nella pubblicazione della scoperta. Oggi tali numeri vengono chiamati *otteti* e l'insieme degli otteti viene denotato con \mathbb{O} .

Le basi vettoriali standard $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, \dots

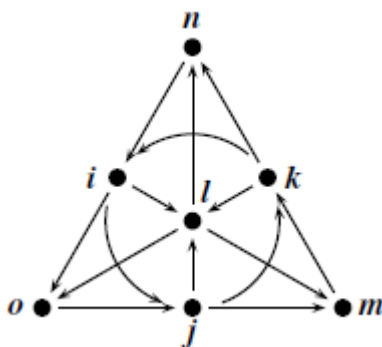
$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ sono denotate rispettivamente con $\mathbf{1}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{o} .

Quindi ogni otteto può essere scritto nella forma:

$$\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k + \epsilon l + \xi m + \eta n + \theta o \quad (48)$$

con $i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1$.

La figura sottostante mostra una rappresentazione di tutti i prodotti tra le varie basi vettoriali:



Il prodotto di due qualsiasi basi vettoriali è dato dal terzo vettore che si trova nella stessa “linea” che contiene gli altri due. Il segno $+$ o $-$ dipende dal verso delle frecce e dalla posizione dei due vettori del prodotto. Ad esempio, dalla figura, possiamo ricavarci le seguenti: $il = m = -li$, $mi = l = -im$, $oj = m = -jo$, $mo = j = -om$, \dots

Dalla definizione di otteto, $p = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k + \epsilon l + \xi m + \eta n + \theta o$, si ottiene che il quadrato del suo valore assoluto è dato da:

$$p\bar{p} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \epsilon^2 + \xi^2 + \eta^2 + \theta^2. \quad (49)$$

Quindi il prodotto della somma di otto quadrati si può esprimere come somma di otto quadrati.

Siamo dunque riusciti ad estendere la definizione di “numero reale” anche alla dimensione 8.

Passando a dimensioni superiori, però, si perdono alcune proprietà: il prodotto sui quaternioni abbiamo visto non essere commutativo, mentre il prodotto sugli otteti non è nè commutativo nè associativo.

E' possibile dimostrare che quelle viste sono le uniche strutture di campo su \mathfrak{R}^n con somma vettoriale e prodotto tale che rispetti la norma.

5 Conclusione

Nel 1914 Dickson diede una definizione di moltiplicazione tra otteti che prevedeva una stessa costruzione per produrre \mathbb{C} da \mathfrak{R} , \mathbb{H} da \mathbb{C} e \mathbb{O} da \mathbb{H} .

Ogni sistema consiste in una coppia ordinata (a, b) tale che valga:

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - \bar{b}_2 b_1, b_2 a_1 + b_1 \bar{a}_2). \quad (50)$$

In particolare, ogni otteto può essere descritto come coppia di quaternioni, ogni quaternione come coppia di numeri complessi.

Nel caso dei quaternioni, ad esempio, grazie alla relazione $k = ij = -ji$, si ricava:

$$q = a + ib + jc + kd = a + ib + jc - jid = a + ib + j(c - id). \quad (51)$$

Quindi $q = z + jw$, dove $z = a + ib$ e $w = c - id$ sono due numeri complessi.

\mathbb{C} , \mathbb{H} e \mathbb{O} rappresentano dunque delle strutture speciali, uniche: se definiamo un sistema di numeri ipercomplessi come delle n -uple di numeri reali (con $n \geq 2$) in cui valgano l'addizione vettoriale, la proprietà distributiva della moltiplicazione e siano tali che il valore assoluto sia moltiplicativo, allora:

- \mathbb{C} è l'unico sistema di numeri ipercomplessi in cui la moltiplicazione sia commutativa e associativa;
- \mathbb{H} è l'unico sistema di numeri ipercomplessi in cui la moltiplicazione sia solo associativa;
- \mathbb{O} è l'unico sistema di numeri ipercomplessi in cui la moltiplicazione non sia nè commutativa nè associativa.

La prima affermazione verrà verificata da Weierstrass nel 1884, la seconda da Frobenius nel 1878 e, per ultimo, Hurwitz dimostrò il terzo enunciato nel 1898.

In realtà le strutture presentate in questa trattazione, non hanno una valenza solo dal punto di vista algebrico, ma rivestono un ruolo fondamentale anche nella geometria proiettiva: il teorema di Pappo infatti è verificato se e solo se il sistema in considerazione è commutativo, mentre quello di Desargues è provato solamente nel caso in cui il sistema sia associativo (per enunciati vedi Appendice).

I numeri complessi, gli otteti e i quaternioni non rappresentano, inoltre, solamente dei concetti matematici, ma sono di primaria importanza anche nello studio della realtà fisica, dell'astrodinamica, della grafica computer e della teoria dei segnali.

“La matematica è alla base di tutta la realtà che ci circonda: compito dell'uomo è quello di studiare tutti i meccanismi che la governano allo scopo di diventare più consapevole di sé e delle sue capacità di plasmare il mondo a proprio piacimento”.

Appendice

cap. 1.1:

La soluzione dell'equazione cubica $y^3 = py + q$, viene trovata ponendo $y = u + v$, da cui

$$(u^3 + v^3) + 3uv(u + v) = 3uv + (u^3 + v^3),$$

che equivale all'equazione iniziale se e solo se valgono:

$$\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 + v^3 = q \end{cases}$$

Ora, ricavandoci v dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, otteniamo:

$$u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q.$$

Da questa si ricava $27u^6 - 27qu^3 + p^3 = 0$, che ha soluzione

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Nello stesso modo si ricava anche

$$v^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Senza perdita di generalità supponiamo

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

da cui

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

allora

$$v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

da cui

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Perciò la soluzione dell'equazione $y^3 + py = q$ è:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

cap. 4:

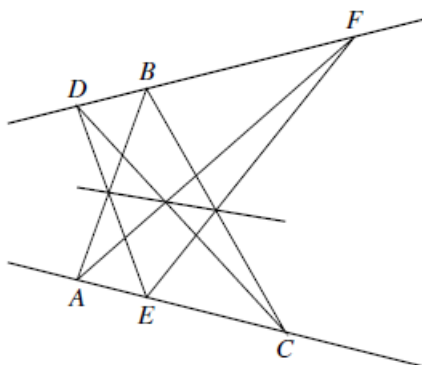
Un insieme K di elementi, dotato di due operazioni binarie $+$ e $*$, si definisce **campo** se valgono le seguenti proprietà:

- K , insieme all'operazione $+$, è un gruppo abeliano con elemento neutro 0 , i.e. $\forall a, b, c \in K$ valgono:
 - $a + (b + c) = (a + b) + c$;
 - $a + b = b + a$;
 - $a + 0 = a$;
 - $\forall a, \exists -a$ tale che $a + (-a) = -a + a = 0$.
- K privato dello 0 , insieme all'operazione $*$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 1 , i.e. $\forall a, b, c \in K$ valgono:
 - $(a * b) + c = a * (b * c)$;
 - $a * b = b * a$;
 - $1 * a = a * 1 = a$;
 - $\forall a \neq 0, \exists a^{-1}$ tale che $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$.
- La moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma, i.e. $\forall a, b, c \in K$ vale:
 - $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$.

cap. 5:

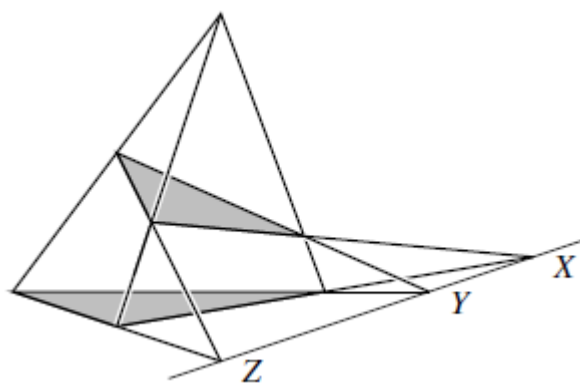
Teorema di Pappo

Se i vertici di un esagono $ABCDEF$ giacciono alternativamente su due linee rette, allora i punti di intersezione tra le linee che congiungono i vertici opposti sono allineati.



Teorema di Desargues

Se due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto, e se le parti dei lati corrispondenti si intersecano, allora i tre punti di intersezione sono allineati.



Riferimenti bibliografici

- [1] Stillwell J., *Mathematics and Its History*, San Francisco, Springer, 2010.
- [2] Cartan H., *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables* *Introduzione*, Paris, Editions Scientifiques Hermann Paris, 1963.
- [3] Freitag E., Busam R., *Complex Analysis*, Berlin, Springer, 2009.
- [4] Stein E., Shakarchi R., *Complex Analysis*, Princeton Editore, 2002.