GEOMETRIA A 2017/18 – Esercizi 23-25 Ottobre 2017

**Esercizio 1.** Risolvere se possibile, i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 13x - 5y - 3z - w = 12 \\ 2x - y + w = 3 \\ 3x - y - z - w = 2 \\ 5x - 2y - z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 5z - w = 1 \\ x + y - z - 2w = 2 \\ x - 4y + 6z + w = -1 \\ 4x + 6y + 10z - 2w = 2. \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Risolvere i seguenti sistemi lineari parametrici in $\mathbb{R}$, con $k, h$ parametri definiti in $\mathbb{R}$:

$$(i) \begin{cases} x + 2y + kz - w = 1 \\ (k-1)y + (1-k)w = k \\ x + 3y - 2z - kw = 3 \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} kx + hy = 1 \\ x + y = k \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} 2x + ky = -3 \\ 6x + 3ky = k \\ 2x - y = -2 \end{cases} \qquad (iv) \begin{cases} kx + z = 1 \\ x + z = 1 \\ hx + kz = h + k \\ hx + y = h \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} ky + 3z - kw = 2 \\ kx + 2ky - z = k \\ kx + ky - 4z + kw = k - 1 \end{cases} \qquad (vi) \begin{cases} kx + ky - z - w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \\ kx + y + w = -k \\ x + ky - kz = k^2. \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Si consideri il seguente sistema lineare al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} hx + (h^2 - h)z = 3 \\ -3hy + (h^2 - h)z = -2h - 7 \\ x - y + (h-1)z = 0. \end{cases}$$

(i) Si scriva la matrice $A_h$ associata al sistema.

(ii) Si risolva il sistema al variare di $h \in \mathbb{R}$, utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan.

(iii) Si calcoli il rango di $A_h$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4.** Trovare tutte le soluzioni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ dei sistemi lineari $A\boldsymbol{x} = b_i$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/3 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 5.** Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

*(i)* Determinare per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ ha rango massimo.

*(ii)* Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$, una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a $A_k$.

*(iii)* Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$, una base dello spazio vettoriale $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\}$.

*(iv)* Determinare le soluzioni del sistema $A_k\boldsymbol{x} = (k, 1, k+1)^T$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 6.** Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & k & 3k-2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

*(i)* Determinare per quali valori di $k$ la matrice $A_k$ invertibile. Per questi valori, ricavare l'inversa.

*(ii)* Determinare, al variare di $k$, una base per lo spazio vettoriale $V_k = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3 \mid A_k\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$.

*(iii)* Per ogni $k$ fissato e per ogni $\boldsymbol{b} \in V_k$ scrivere le soluzioni del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

**Esercizio 7.** Si consideri, al variare dei parametri reali $h$ e $k$, la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & \frac{1}{2h^2} \\ 2 & -1 & 2h^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

e il vettore $\boldsymbol{b} = (3, 6 - 1 - h)^T$.

*(i)* Determinare per quali valori di $k$ e $h$ il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è risolubile (determinandone anche i gradi di libertà).

*(ii)* Si scriva una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

**Esercizio 8.** Si considerino i sistemi lineari

$$(1)\begin{cases} ax + y + (2-a)z + aw = 2 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad\qquad (2)\begin{cases} 2x + y + bz + w = -1 \\ (b+3)x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

con $a$ e $b$ parametri reali.

*(i)* Descrivere le soluzioni dei due sistemi al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

*(ii)* Determinare per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ le soluzioni comuni ai due sistemi.

*(iii)* Siano $U_a$ e $V_b$ i sottospazi vettoriali delle soluzioni dei sistemi omogenei associati ai sistemi (1) e (2). Determinare per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ una base di $U_a + V_b$.

**Esercizio 9.** Si considerino i sottospazi vettoriali:

- $A = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4;$

- $B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$;

Si calcoli la dimensione di $A$, $B$, $A \cap B$ e $A + B$. Si stabilisca se la somma $A + B$ è diretta.

**Esercizio 10.** Si considerino i sottospazi vettoriali:

- $A = \langle 1 + t - t^2, 2 + 3t, t + 2t^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$;
- $B = \{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 \mid p_2 = p_0 - \pi p_1\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$.

Si calcoli la dimensione di $A$ e $B$. Si stabilisca se la somma $A + B$ è diretta.

**Esercizio 11.** Sia dato

$$U = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, \deg(f) \leq 2,\ f(-2) = 0\} \cup \{0\}.$$

Verificare che $U$  un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Dimostrare che ha dimensione finita, determinare una sua base e scrivere il polinomio $g(x) = (x + 2)(3x - 1)$ come combinazione lineare di tale base.

**Esercizio 12.** Si considerino i polinomi $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = -kx^2 + 1$ e $h(x) = kx^2 + k$ di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ e sia $W$ il sottospazio da essi generato. Per quali valori di $k$ i polinomi $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ sono una base di $W$? Calcolare la dimensione di $W$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $k$ il polinomio $a(x) = 2 - kx + kx^2$ appartiene a $W$?

**Esercizio 13.** Si considerino le seguenti matrici di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $Z$ il sottospazio vettoriale generato da $A_1$ e $A_2$: $Z = \langle A_1, A_2 \rangle$.

(i) Per quali valori di $k$ la matrice $A_3$ appartiene a $Z$?

(ii) Si ponga $k = 1$ e si consideri il sottospazio vettoriale $W = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$. Ricavare la dimensione di $W$ e una base di $W$ contenente $A_1$ e $A_2$.

(iii) Sia $B$ la base ricavata al punto precedente. Ricavare, se possibile, le coordinate di $A_4$ rispetto a $B$.

**Esercizio 14.** Sia $k \in \mathbb{R}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, sia

$$U_k = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e sia $W_k$ il sottospazio vettoriale dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ kx_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

(i) Si determinino le dimensioni di $U_k$ e $W_k$ e si scriva una base per essi.

(ii) Si determinino le dimensioni di $U_k + W_k$ e $U_k \cap W_k$. Si trovi una base per essi.

(iii) Si trovino i valori di $k \in \mathbb{R}$ (se esistono) per cui esiste un sottospazio vettoriale $Z \subseteq \mathbb{R}^4$ tale che:

$$U_k \oplus Z = \mathbb{R}^4 \quad \text{e} \quad W_k \cap U_k \subset Z, \quad \text{ma} \quad W_k \cap U_k \neq Z.$$