

Geometria A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2023/2024

Secondo appello - 4 luglio 2024

Esercizio 1. Sia $V = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, con base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$. Sia $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la mappa definita da:

$$b(f, g) = f(1)g(1) + f(0)g(0) - f(-1)g(-1).$$

- (1) Dimostrare che b è bilineare e simmetrica;
- (2) Sia $q(f) = b(f, f)$ la forma quadratica associata a b . Scrivere q in coordinate rispetto a \mathcal{B} come $q(a_0, a_1, a_2) = q(a_0 + a_1t + a_2t^2)$ e trovare la sua matrice associata \mathcal{M} ;
- (3) Sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ il piano affine reale. Si consideri la conica $\Gamma_{a_0} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}^2 \mid q(a_0, a_1, a_2) = 0\}$ al variare di $a_0 \in \mathbb{R}$ fissato. Classificare la conica Γ_{a_0} per ogni $a_0 \in \mathbb{R}$;
- (4) Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ il piano proiettivo reale e sia $Q = \{[a_0, a_1, a_2] \in \mathbb{P}^2 \mid q(a_0, a_1, a_2) = 0\}$. Trovare una proiettività $\varphi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tale che $\varphi(Q) = \{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0\}$ (*hint: q è somma di quadrati e opposti di quadrati*). Dedurre la segnatura di q ;
- (5) Dire se la proiettività φ ha un punto fisso.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ il piano affine reale. Si consideri la seguente quintica in \mathbb{A}^2 :

$$\Gamma: f(x, y) = x^4y + y^4 - x^4 = 0.$$

Sia $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ il piano proiettivo reale con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si identifichi $\mathbb{A}^2 \cong \{x_0 \neq 0\}$.

- (1) Si scriva l'equazione della chiusura proiettiva $\bar{\Gamma} \subset \mathbb{P}^2$ di Γ ;
- (2) Si dimostri che la curva $\bar{\Gamma}$ ha un unico punto singolare P e si scrivano le equazioni delle tangenti affini reali a Γ in P nelle coordinate $(x, y) \in \mathbb{A}^2$;
- (3) Si scrivano le equazioni affini nelle coordinate (x, y) degli asintoti di Γ ;
- (4) Sia F il polinomio omogeneo che definisce l'equazione di $\bar{\Gamma}$. Si consideri la quartica:

$$\mathcal{C}: G(x_0, x_1, x_2) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Si calcolino i punti singolari e i flessi di \mathcal{C} ;

- (5) Siano $P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2$ i due punti all'infinito di Γ e sia $P_3 = [1, 2, -\sqrt{2}] \in \mathbb{P}^2$. Si dimostri che i punti $\{P, P_1, P_2, P_3\}$, dove P è definito al punto (2), sono in posizione generale.

Soluzione Esercizio 1. (1) La funzione b è chiaramente simmetrica. Ci basta dimostrare la linearità in una sola entrata. Inoltre, $b = b_1 + b_0 + b_{-1}$, dove $b_i(f, g) = f(i)g(i)$. Ci basta dimostrare che b_i è lineare nella prima variabile per ogni i . Infatti, si ha che, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $f, g, h \in V$:

$$b_i(\lambda f + \mu g, h) = (\lambda f(i) + \mu g(i))h(i) = \lambda f(i)h(i) + \mu g(i)h(i) = \lambda \cdot b_i(f, h) + \mu \cdot b_i(g, h).$$

(2) Scriviamo la forma quadratica q in coordinate rispetto alla base \mathcal{B} :

$$q(a_0, a_1, a_2) = q(a_0 + a_1t + a_2t^2) = (a_0 + a_1 + a_2)^2 + a_0^2 - (a_0 - a_1 + a_2)^2. \quad (1)$$

Possiamo scrivere la matrice $\mathcal{M} = (Q_{ij})_{ij}$ associata a q in due modi. Possiamo espandere i quadrati nell'Equazione (1) e ottenere:

$$q(a_0, a_1, a_2) = a_0^2 + 4a_0a_1 + 4a_1a_2$$

oppure scrivere i coefficienti della matrice Q sfruttando la forma bilineare b :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= b(1, 1) = 1, & Q_{12} &= b(1, t) = 2, & Q_{13} &= b(1, t^2) = 0 \\ Q_{21} &= Q_{12} = 2, & Q_{22} &= b(t, t) = 0, & Q_{23} &= b(t, t^2) = 2 \\ Q_{31} &= Q_{13} = 0, & Q_{32} &= Q_{23} = 2, & Q_{33} &= b(t^2, t^2) = 0. \end{aligned}$$

In entrambi i casi, si conclude che:

$$\mathcal{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

(3) La matrice associata a Γ_{a_0} è molto simile a quella di q nell'Equazione (2), con l'accortezza che ora $a_0 \in \mathbb{R}$ non è più una variabile, ma una costante. La matrice associata a Γ_{a_0} è quindi:

$$\mathcal{M}_{a_0} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & a_1 & a_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_0^2 & 2a_0 & 0 \\ 2a_0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Notiamo che $\det(\mathcal{M}_{a_0}) = -4a_0^2$. In particolare, Γ_{a_0} è riducibile per $a_0 = 0$ e irriducibile per $a_0 \neq 0$. Se $a_0 \neq 0$, il determinante della sottomatrice quadrata:

$$(\mathcal{M}_{a_0})_0 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

è uguale a -4 , dunque negativo. Questo ci dice che per $a_0 \neq 0$, Γ_{a_0} è una iperbole. La conica Γ_0 è definita dall'equazione:

$$\Gamma_0: \quad 4a_1a_2 = 0$$

e in particolare è unione dei due assi $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$. Ne segue che Γ_0 è unione di due rette. Riassumendo:

$$\Gamma_{a_0} : \begin{cases} \text{conica degenera, unione di due rette} & \text{se } a_0 = 0 \\ \text{conica non-degenera, iperbole} & \text{se } a_0 \neq 0 \end{cases}.$$

(4) Usiamo l'Equazione (1). Eseguiamo un cambio di coordinate della forma:

$$x_0 = a_0 - a_1 + a_2, \quad x_1 = a_0, \quad x_2 = a_0 + a_1 + a_2.$$

Questo ci dà la proiettività $\varphi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ della forma:

$$\varphi([a_0, a_1, a_2]) = [a_0 - a_1 + a_2, a_0, a_0 + a_1 + a_2]$$

che è ben definita in quanto la matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ha determinante 2 e rispetta $\varphi(Q) = \{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0\}$. La segnatura è invariante sotto trasformazioni invertibili, quindi q ha segnatura $(2, 1)$, dove 2 è il numero di autovalori positivi e 1 è il numero di autovalori negativi.

(5) Sia A la matrice associata a φ come nell'Equazione (3). Essa è tale che $\varphi([\mathbf{x}]) = [A\mathbf{x}]$. Dunque, si ha che:

$$\varphi([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x}] \iff [A\mathbf{x}] = [\mathbf{x}] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

In altre parole, φ ha un punto fisso se e solo se la matrice A (o un suo multiplo per uno scalare reale non nullo) ha un autovalore reale. Ricordiamo che l'insieme degli autovalori è determinato dagli zeri del polinomio caratteristico, che è un polinomio a coefficienti reali in una variabile di grado uguale all'ordine della matrice. In questo caso, A è una matrice 3×3 . Dunque, il polinomio caratteristico ha grado 3. Pertanto, esso ha almeno uno zero reale. Questo ci dice che esiste almeno un autovalore reale, e dunque φ ha almeno un punto fisso. In effetti, il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ si scrive come:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 1 - \lambda + \lambda - \lambda(1 - \lambda)^2 + 1 = 2 - \lambda(1 - \lambda)^2$$

e si nota che $p_A(2) = 2 - 2 \cdot (-1)^2 = 0$.

Soluzione Esercizio 2. (1) L'equazione della chiusura proiettiva è data attuando la sostituzione $x \rightarrow x_1, y \rightarrow x_2$ e omogeneizzando il polinomio f rispetto alla nuova variabile x_0 . Si ottiene, dunque:

$$\bar{\Gamma}: F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 x_2 + x_0 x_2^4 - x_0 x_1^4 = 0.$$

- (2) Dall'equazione affine si deduce che l'origine di \mathbb{A}^2 , che corrisponde al punto $P = [1, 0, 0] \in \mathbb{P}^2$, è un punto singolare di ordine 4, e la curva $\bar{\Gamma}$ ha grado 5. Pertanto, per il teorema di Bézout, P è l'unico punto singolare (si guardi la soluzione dell'Esercizio 2 della provetta 2023/2024 per una spiegazione più dettagliata).

In alternativa, possiamo calcolare il gradiente di F :

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (x_2^4 - x_1^4, 4x_1^3(x_2 - x_0), x_1^4 + 4x_0x_2^3) \quad (4)$$

e controllare quando questo si annulla. Questo succede se vale il seguente sistema non-lineare:

$$\begin{cases} x_2^4 - x_1^4 = 0 \\ 4x_1^3(x_2 - x_0) = 0 \\ x_1^4 + 4x_0x_2^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^4 = x_2^4 \\ 4x_1^3 = 0 \\ x_1^4 + 4x_0x_2^3 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1^4 = x_2^4 \\ x_0 = x_2 \\ x_1^4 + 4x_0x_2^3 = 0 \end{cases}$$

e si vede che il primo sistema ha soluzione $P = [1, 0, 0]$, che è un punto della curva, mentre il secondo non ha soluzioni nel proiettivo.

Sempre dall'equazione affine, si ottengono le retti tangenti alla curva nelle coordinate affini. Queste si ottengono fattorizzando la parte omogenea di grado più basso:

$$x^4 - y^4 = 0 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2).$$

Pertanto, le uniche tangenti reali sono $y = \pm x$.

- (3) Le equazioni degli asintoti sono ottenute deomogeneizzando le equazioni proiettive delle tangenti alla curva $\bar{\Gamma}$ nei suoi punti all'infinito. Calcoliamo, dunque, innanzitutto i punti all'infinito di Γ :

$$\bar{\Gamma} \cap \{x_0 = 0\}: \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^4 x_2 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo i due punti coordinati:

$$P_1 = [0, 1, 0], \quad P_2 = [0, 0, 1]. \quad (5)$$

La tangente proiettiva a $\bar{\Gamma}$ nel punto $Q \in \bar{\Gamma}$ ha equazione:

$$T_Q \bar{\Gamma}: \frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) \cdot x_2 = 0.$$

Nel caso dei due punti all'infinito, si ha che:

$$T_{P_1} \bar{\Gamma}: -x_0 + x_2 = 0, \quad T_{P_2} \bar{\Gamma}: x_0 = 0$$

Nel secondo caso si ottiene come asintoto la retta all'infinito, quindi Γ è tangente alla retta all'infinito. Nel primo caso, si ottiene un asintoto di equazione affine $y = 1$.

(4) Usando l'Equazione (4), otteniamo che la curva \mathcal{C} ha equazione:

$$\mathcal{C}: G(x_0, x_1, x_2) = 4x_0x_2^3 + x_1^4 = 0.$$

Andando a deomogeneizzare con $x_0 = 1$ e attuando la sostituzione $x_0 \rightarrow 1, x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow y$, otteniamo che l'origine, corrispondente al punto proiettivo $P = [1, 0, 0]$, è un punto singolare di ordine 3. Visto che la curva \mathcal{C} ha grado 4, applicando ancora il teorema di Bézout si ha che P è l'unico punto singolare. Per calcolare i punti di flesso, dobbiamo calcolare il determinante Hessiano \mathcal{H}_G del polinomio G e metterlo a sistema con G , ricordandoci di escludere i punti singolari (in questo caso, l'unico punto è $[1, 0, 0]$). Calcoliamo, pertanto, il gradiente e poi le derivate parziali seconde di G . Usiamo la notazione $G_i = \partial G / \partial x_i$ per ogni $i \in \{0, 1, 2\}$ e $G_{ij} = \partial^2 G / \partial x_i \partial x_j$ per ogni $i, j \in \{0, 1, 2\}$. Allora:

$$\nabla G = (G_0, G_1, G_2) = (4x_2^3, 4x_1^3, 12x_0x_2^2),$$

$$\begin{array}{lll} G_{00} = 0, & G_{01} = 0, & G_{02} = 12x_2^2 \\ G_{10} = G_{01} = 0, & G_{11} = 12x_1^2, & G_{12} = 0 \\ G_{20} = G_{02} = 12x_2^2, & G_{21} = G_{12} = 0, & G_{22} = 24x_0x_2. \end{array}$$

Quindi, il determinante Hessiano è dato da:

$$\mathcal{H}_G(x_0, x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12x_2^2 \\ 0 & 12x_1^2 & 0 \\ 12x_2^2 & 0 & 24x_0x_2 \end{pmatrix} = -12^3 x_1^2 x_2^4.$$

Mettendo a sistema con l'equazione della curva e con la condizione di non essere singolare, otteniamo il sistema non-lineare:

$$\begin{cases} 4x_0x_2^3 + x_1^4 = 0 \\ x_1^2x_2^4 = 0 \\ [x_0, x_1, x_2] \neq [1, 0, 0] \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_0x_2^3 + x_1^4 = 0 \\ x_1^2 = 0 \\ [x_0, x_1, x_2] \neq [1, 0, 0] \end{cases} \vee \begin{cases} 4x_0x_2^3 + x_1^4 = 0 \\ x_2^4 = 0 \\ [x_0, x_1, x_2] \neq [1, 0, 0] \end{cases}.$$

Il secondo sistema non ha soluzione, ma il primo ci dà l'unico punto di flesso:

$$F_1 = [0, 0, 1].$$

(5) Per verificare che $\{P, P_1, P_2, P_3\}$ sono in posizione generale, possiamo verificare che esistono dei rappresentanti $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tali che $P = [\mathbf{p}]$, $P_i = [\mathbf{p}_i]$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$ e $P_3 = [\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2]$. Notiamo che basta scegliere:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$