Geometria A
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2024/2025
Secondo Appello - 7 Luglio 2025

Esercizio 1.

Si consideri la forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare corrispondente.

1. Determinare la matrice B associata a b.
2. Verificare che la forma bilineare sia degenere e calcolare lo spazio dei vettori isotropi.
3. Determinare la segnatura di q.
4. Determinare la matrice C associata a b nella base $\mathcal{B}' = \{e_1, e_1 - e_2, e_1 - e_2 - e_3\}$, con $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica.

Esercizio 2.

Sia $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la cubica affine di equazione

$$x^2y - y + 1 = 0$$

1. Determinare i punti singolari di C
2. Determinare gli asintoti di C.
3. Calcolare i punti di flesso di $\bar{C}$, dove $\bar{C}$ è la chiusura proiettiva di C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Provare inoltre che i punti trovati sono collineari e calcolare l'equazione della retta che li contiene.

Soluzione 1:

(1) La matrice associata alla forma bilineare risulta:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Per verificare che la forma sia degenere è sufficiente calcolare il nucleo della matrice. Poniamo quindi, per un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 & , x_3 \end{pmatrix}$ generico, il sistema $B^T x = 0$. Risulta:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0, 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

I vettori che risolvono il sistema sono quelli generati da $Span(v) = \langle \begin{pmatrix} 1, & 2, & -4 \end{pmatrix} \rangle$. Alternativamente, è possibile (e probabilmente più rapido) verificare $\det(B) = 0$. Risulta $\det(B) = -4(4-2) + 2(4) = 0$.

Per determinare lo spazio dei vettori isotropi, notiamo che la forma quadratica, per un generico vettore $v = (x_1, x_2, x_3)$, può essere riscritta come

$$q(v) = 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 4x_1(2x_2 + x_3) + x_3(2x_2 + x_3) = (4x_1 + x_3)(2x_2 + x_3)$$

I vettori che annullano la forma sono pertanto della forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ -4\alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ -2\beta_2 \end{pmatrix} \qquad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

(3) La segnatura della forma quadratica è determinata dai segni degli autovalori della matrice B. Il polinomio caratteristico è:

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 2 \\ 4 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Risolvendo $\det(B - \lambda I) = 0$, risulta

$$-\lambda(\lambda^2 - \lambda - 21) = 0$$

che ammette come soluzioni $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{85}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{85}}{2}$.
La segnatura risulta pertanto (1,1).

(4) Siccome la nuova base $\{f_1, f_2, f_3\}$ è tale che $f_1 = e_1, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = e_1 - e_2 - e_3$, risulta

$$e_1 = f_1 \quad e_2 = e_1 - f_2 = f_1 - f_2 \quad e_3 = e_1 - e_2 - f_3 = f_3 - f_2$$

da cui si ha

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1f_1 + x_2(f_1 - f_2) + x_3(f_2 - f_3) = (x_1 + x_2)f_1 + (x_3 - x_2)f_2 - x_3f_3$$

Ne segue la seguente relazione tra le coordinate rispetto alle due basi:

$$x_1' = x_1 + x_2 \quad x_2' = x_3 - x_2 \quad x_3' = -x_3$$

e ricavando le variabili note rispetto a quelle nuove si ha

$$x_1 = x_1' + x_2' - x_3' \quad x_2 = -x_2' - x_3' \quad x_3 = -x_3'$$

Applicando le nuove variabi all'equazione della forma quadratica si ha

$$\begin{aligned} q(v) &= 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = \\ &= 8(x_1' + x_2' + x_3')(-x_3' - x_2') + 4(x_1' + x_2' + x_3')(-x_3') + 2(-x_3' - x_2')(-x_3') + (-x_3')^2 = \\ &= -8x_1'x_2' - 12x_1'x_3' - 8x_2'^2 - 18x_2'x_3' - 9x_3'^2 \end{aligned}$$

Per cui la matrice corrispondente risulta

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -4 & -8 & -9 \\ -6 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

Alternativamente, definendo con M la matrice le cui colonne sono i vettori della base $\mathcal{B}'$, si ottiene facilmente $C = M^TBM$.

Soluzione 2:

(1) Troviamo anzitutto i punti singolari di C, che sono i punti $(x, y) \in C$ per cui vale l'equazione

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 - 1) = (0, 0)$$

Notiamo subito che gli unici valori che soddisfano la richiesta sono $(x, y) = (\pm 1, 0)$, ma per nessuno dei due punti trovati l'equazione si annulla - $f(\pm 1, 0) = 1 \neq 0$ - pertanto la curva C non ammette punti singolari su essa.

(2) Per trovare gli asintoti, occorre trovare le tangenti principali ai punti impropri nella chiusura proiettiva $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2x_2 - x_0^2x_2 + x_0^3$$

Per ottenere i punti impropri, intersechiamo la chiusura proiettiva $\bar{C}$ con la retta di equazione $x_0 = 0$, ottenendo l'equazione $x_1^2x_2 = 0$. Otteniamo di conseguenza due punti impropri per C: $P = [0 : 1 : 0]$ e $Q = [0 : 0 : 1]$.
Cominciamo dalle tangenti principali a P. Ponendoci nella carta $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ (e supponendo per comodità $x_1 = 1$) l'equazione della chiusura proiettiva risulta

$$F(x_0, 1, x_2) = x_2 - x_0^2x_2 + x_0^2$$

Siccome le tangenti principali si ottengono fattorizzando il termine omogeneo di grado minore in fattori lineari, risulta

$$x_2 = 0$$

Disomogeneizzando nuovamente (ponendoci nella carta affine $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ e ritornando al sistema di coordinate originario, troviamo che il primo asintoto è dato dalla retta $y = 0$. Quindi, l'asse delle ascisse è asintoto per la curva C.
Procediamo analogamente con Q. Ponendoci ora nella carta affine $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ otteniamo la curva

$$x_1^2 - x_0^2 + x_0^3$$

Ancora, fattorizzando il termine omogeneo di grado minore, otteniamo

$$x_1^2 - x_0^2 = (x_1 + x_0)(x_1 - x_0) = 0 \iff x_1 = \pm x_0$$

Tornando alla carta affine U_0, otteniamo come asintoti le rette $x = \pm 1$.

(3) Sappiamo che i punti di flesso della chiusura proiettiva $\bar{C}$ sono i punti non singolari della stessa curva che annullano il determinante dell'Hessiana. Risulta

$$0 = H_F(x_0, x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} -2x_2 + 6x_0 & 0 & -2x_0 \\ 0 & 2x_2 & 2x_1 \\ -2x_0 & 2x_1 & 0 \end{pmatrix} = 8(-x_0^2 x_2 + x_1^2 x_2 - 3x_0 x_1^2)$$

Possiamo mettere a sistema la condizione ottenuta con l'equazione della curva per ottenere i punti di flesso

$$\begin{cases} x_1^2 x_2 - x_0^2 x_2 + x_0^3 = 0 \\ -x_0^2 x_2 + x_1^2 x_2 - 3x_0 x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda membro a membro otteniamo la condizione $x_0(3x_1^2 + x_0^2) = 0$. Posto $x_0 = 0$, l'unico punto candidato ad essere flesso è P, che risolve entrambe le equazioni. Q va ovviamente scartato essendo punto singolare per la chiusura di C.
Posto ora $3x_1^2 + x_0^2 = 0$, la prima equazione del sistema risulta:

$$-\frac{x_0^2 x_2}{3} - x_0^2 x_2 + x_0^3 = -\frac{4}{3} x_0^2 x_2 + x_0^3 = 0 \iff x_0^2(-4x_2 + 3x_0) = 0$$

Se $x_0 = 0$ allora anche $x_2 = 0$ e torniamo al punto singolare P già escluso in precedenza. Supponendo ora $x_0 = \frac{4}{3} x_2$ riscriviamo $x_0^2 + 3x_1^2$ come

$$\frac{16}{9} x_2^2 + 3x_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm \frac{4i}{3\sqrt{3}} x_2$$

E troviamo i punti di flesso

$$\left[\frac{4}{3} : \pm \frac{4i}{3\sqrt{3}} : 1\right] = \left[4\sqrt{3} : \pm 4i : 3\sqrt{3}\right]$$

Notiamo infine che tutti e tre i punti di flesso (P e gli ultimi due) giacciono tutti sulla retta proiettiva $3x_0 - 4x_2 = 0$, e sono dunque collineari.