Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2021/2022

Secondo appello - 7 luglio 2022

Esercizio 1. Sia $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica data da

$$q(x, y, z, w) = xy - zw.$$

(1) Studiare la segnatura di q e trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che porta q nella sua forma canonica q'.

(2) Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata a q e sia

$$Q = \{q(x, y, z, w) = 0\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}).$$

Dati $S = [1, 1, 0, 0]$ e $T = [1, 0, 0, 0]$, trovare le equazioni di $S^\perp = \{X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : b(S, X) = 0\}$ e delle due rette contenute in Q e passanti per T.

(3) Sia P un punto di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ che non appartiene alla quadrica Q. Provare che $Q \cap P^\perp$ è una conica non degenere.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di coordinate omoegenee $[x_0, x_1, x_2]$ si considerino la quartica Q data dall'equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = \left(x_0^2 + x_1^2\right)^2 - 2x_1x_2\left(x_0^2 + x_1^2\right) - x_0^2x_2^2 = 0$$

e la conica D data da

$$G(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 - x_1x_2 = 0.$$

(1) Provare che le curve Q e D hanno esattamente tre punti di intesezione A, B, C.

(2) Provare che A, B, C sono punti singolari per Q e studiare il tipo di singolarità.

(3) Trovare le rette tangenti, se esistono, a D nei punti A, B, C.

Soluzione 1. (1) Per capire la segnatura di q, dobbiamo prima trovare gli autovalori della matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto possiamo calcolare

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -\lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

da cui segue che gli autovalori sono $\lambda = \pm 1/2$ (entrambi con molteplicità 2) e $\operatorname{sgn} q = (2, 2)$.

Una base per la forma canonica q' sarà data dagli autovettori di A. Un autovettore $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t$ associato a $\lambda = 1/2$ si ottiene dal sistema

$$\left(A - \frac{1}{2} I\right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ -v_3 - v_4 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, lo stesso conto per $\lambda = -1/2$ produce

$$\left(A + \frac{1}{2} I\right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_3 - v_4 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che possiamo riscrivere q come

$$xy - zw = (x' + y')(x' - y') - (z' + w')(z' - w') = x'^2 - y'^2 - z'^2 + w'^2.$$

Questa riscrittura altro non è che il cambio di base

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

che produce la base cercata a meno di normalizzare i coefficienti per un fattore $1/\sqrt{2}$.

(2) La forma bilineare associata alla matrice A è data da

$$b(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(x_1y_2 + y_1x_2 + z_1w_2 + w_1z_2\right).$$

Segue subito allora che, dato $S = [1, 1, 0, 0]$, si ha

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : b(S, X) = 0\} = \\ &= \{[x, y, z, w] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : \lambda y + \lambda x = 0\} = \\ &= \{x + y = 0\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Possiamo descrivere Q attraverso l'equazione $xy = zw$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Notiamo che i punti della forma $[\alpha, 0, \beta, 0]$ e $[\alpha, 0, 0, \beta]$ sono tutti contenuti nella quadrica perché le coordinate soddisfano l'equazione di Q, con $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e che T si ottiene per $\beta = 0$. Muovendo i punti sulla retta proiettiva, otteniamo le due rette cercate:

$$\begin{cases} y = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Alternativamente, consideriamo una retta passante per T, essa consisterà di punti della forma

$$\lambda[s_0, 0, 0, 0] + \mu[t_0, t_1, t_2, t_3] = [\lambda s_0 + \mu t_0, t_1, t_2, t_3]$$

per $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Per imporre che la retta sia contenuta in Q, per prima cosa dobbiamo avere che $[t_0, t_1, t_2, t_3] \in Q$, dunque $t_0t_1 = t_2t_3$. Secondo, dobbiamo imporre che il punto mobile soddisfi l'equazione di Q, dunque

$$\begin{cases} t_0t_1 = t_2t_3 \\ (\lambda s_0 + \mu t_0)\mu t_1 = \mu^2 t_2t_3 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} t_0t_1 - t_2t_3 = 0 \\ \lambda\mu s_0t_1 + \mu^2(t_0t_1 - t_2t_3) = 0 \end{cases}.$$

Combinando le due equazioni segue subito che $\lambda\mu s_0t_1 = 0$, da cui $t_1 = 0$ visto che $s_0 \neq 0$ e l'equazione deve essere verificata per ogni $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. La condizione $t_1 = 0$ impone, dalla prima equazione, che $t_2t_3 = 0$ e da qui ritroviamo i punti $[\alpha, 0, \beta, 0]$ oppure $[\alpha, 0, 0, \beta]$ di cui sopra.

(3) Sia $P = [a, b, c, d]$ tale che $ab \neq cd$. Ripetendo quanto fatto al punto precedente per S, otteniamo che

$$P^{\perp} = \{ax + by + cz + dw = 0\}.$$

Essendo un punto del proiettivo, almeno una coordinata di P sarà non nulla e possiamo supporre senza perdere di generalità che sia $a \neq 0$, Dunque $P^{\perp} = \{x = -(by + cz + dw)/a\}$. L'equazione dell'intersezione $Q \cap P^{\perp}$ sarà dunque data da

$$-y\left(\frac{by+cz+dw}{a}\right) = zw \quad \rightsquigarrow \quad azw + by^2 + cyz + dyw = 0.$$

La matrice associata è

$$A' = \begin{pmatrix} b & c/2 & d/2 \\ c/2 & 0 & a/2 \\ d/2 & a/2 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è dato da

$$\det A' = -\frac{a}{4}(ab - cd) \neq 0. \qquad \square$$

Soluzione 2. (1) I punti di intersezione tra Q e D si ottengono dalle soluzioni del sistema

$$(\star) \qquad \begin{cases} \left(x_0^2+x_1^2\right)^2 - 2x_1x_2\left(x_0^2+x_1^2\right) - x_0^2x_2^2 = 0 \\ x_0^2+x_1^2 - x_1x_2 = 0 \end{cases}.$$

Riscrivendo la seconda equazione di $(\star)$ come $x_0^2 + x_1^2 = x_1x_2$ e sostituendo questa relazione nella prima equazione di $(\star)$, questa si scriverà come

$$x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2^2 - x_0^2x_2^2 = -x_2^2(x_0^2+x_1^2) = 0.$$

Procediamo per casi:

$$x_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_0^2+x_1^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = \pm i x_0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} A = [1, i, 0] \\ B = [1, -i, 0] \end{cases},$$

$$x_0^2+x_1^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_1x_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad C = [0,0,1] \\ x_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A, B \end{cases}.$$

Concludiamo che questi sono proprio i punti di intersezione cercati.

I punti singolari di Q sono i punti che risolvono il sistema di equazioni dato da F e dalle sue derivate parziali $F_i := \partial F/\partial x_i$ per $i = 0, 1, 2$. Esplicitamente si tratta del sistema

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} \left(x_0^2+x_1^2\right)^2 - 2x_1x_2\left(x_0^2+x_1^2\right) - x_0^2x_2^2 = 0 \\ F_0(x_0,x_1,x_2) = 4x_0\left(x_0^2+x_1^2\right) - 4x_0x_1x_2 - 2x_0x_2^2 = 0 \\ F_1(x_0,x_1,x_2) = 4x_1\left(x_0^2+x_1^2\right) - 4x_1^2x_2 = 0 \\ F_2(x_0,x_1,x_2) = -2x_1\left(x_0^2+x_1^2\right) - 2x_0^2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo le coordinate di A, B, C nelle equazioni del sistema, si vede che queste risolvono sempre tutte le condizione, dunque i punti sono singolari per Q.

(2) Cominciamo calcolando le tangenti principali a Q nei punti A e B. Chiamiamo $P = [1, \pm i, 0]$. Mettiamoci nella carta affine $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ (e possiamo supporre senza perdere di generalità che $x_0 = 1$), allora P nella carta affine si scrive come $P_0 = (\pm i, 0)$ mentre la traccia affine di Q è

data dall'equazione

$$F(1,x_1,x_2) = \left(1+x_1^2\right)^2 - 2x_1x_2\left(1+x_1^2\right) - x_2^2 = 0.$$

La traslazione che porta P nell'origine è data da

$$\tau : \begin{cases} x_1 \mapsto x_1 \mp i \\ x_2 \mapsto x_2 \end{cases},$$

in particolare questa ci darà una nuova equazione:

$$\begin{aligned} F(1,\tau^{-1}(x_1,x_2)) &= \left(1+(x_1 \pm i)^2\right)^2 - 2\,(x_1 \pm i)\,x_2\left(1+(x_1 \pm i)^2\right) - x_2^2 = \\ &= x_1^2\left(x_1^2 \pm 4ix_1 - 4\right) - 2x_1x_2\,(x_1 \pm i)\,(x_1 \pm 2i) - x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Il termine omogeneo di grado minimo è dato da $-4x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2$ la cui fattorizzazione produce le equazione delle tangenti principali:

$$-4x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 = -(2x_1+x_2)^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad L_P = \{2x_1 + x_2 = 0\}.$$

Essendo un' unica retta tangente contata due volte, segue che A, B sono cuspidi per Q. Per calcolare le tangenti principali a Q nel punto C, mettiamoci nella carta affine $U_2 = \{x_2 = 0\}$ (come prima supponiamo per facilità $x_2 = 1$), allora nella carta affine il punto sarà $C_2 = (0,0)$ e la traccia affine di Q sarà

$$F(x_0,x_1,1) = \left(x_0^2 + x_1^2\right)^2 - 2x_1\left(x_0^2 + x_1^2\right) - x_0^2 = 0.$$

Essendo già il punto affine centrato nell'origine, ci basta guardare alla fattorizzazione del termine omogeneo di grado minimo di $F(x_0,x_1,1)$ che è dato $-x_0^2 = 0$, dunque le tangenti principali sono date dalla retta $L_C = \{x_0 = 0\}$ contata due volte, dunque anche C è una cuspide.

(3) Notiamo che D è una conica non degenere in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, infatti il determinante della matrice associata vale

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Allora D è liscia e ogni suo punto è semplice. In particolare, esisterà un'unica tangente a D nei punti A, B, C e sarà data dall'equazione

$$\nabla G(P) \cdot \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}^t = 0$$

con $P \in \{A, B, C\}$. Il gradiente di G è dato dal vettore delle derivate parziali $G_i := \partial G / \partial x_i$ per $i = 0, 1, 2$:

$$\nabla G(x_0,x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2x_1 - x_2 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo concludere quindi che

$$\begin{aligned}
\nabla G(A) &= \begin{pmatrix} 2 & 2i & -i \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad T_A = \{2x_0 + 2ix_1 - ix_2 = 0\}\,, \\
\nabla G(B) &= \begin{pmatrix} 2 & -2i & i \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad T_B = \{2x_0 - 2ix_1 + ix_2 = 0\}\,, \\
\nabla G(C) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad T_C = \{x_1 = 0\}\,.
\end{aligned}$$

□