

Geometria A
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2024/2025
Terzo Appello - XX Settembre 2025

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ uno spazio vettoriale euclideo munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Si consideri la forma quadratica $Q_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$Q_k(x_1, x_2, x_3) = kx_1^2 + 2x_1x_2 + 2kx_1x_3 + kx_2^2 + 2x_2x_3 + kx_3^2$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare la matrice M_k associata alla forma bilineare $f_k : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ associata a Q_k .
2. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma bilineare f_k è degenere? Per tali valori, determinare il nucleo di f_k .
3. Determinare la segnatura di Q_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.
4. Si considerino i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 2)$. Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ i due vettori risultano ortogonali rispetto a f_k .

Esercizio 2.

Si studino le seguenti coniche. Nel caso di conica non degenere, trovare il centro, l'angolo formato dagli eventuali asintoti e la si porti nella forma canonica. Nel caso di conica degenere, calcolare l'angolo compreso tra le rette che la formano, o spiegare perché non esiste.

$$\begin{aligned}C_1 &= x^2 + y^2 + 6xy + 2y + 2 = 0 \\C_2 &= x^2 - xy - 2y^2 + x + y = 0\end{aligned}$$

Soluzione 1:

- (1) La matrice simmetrica associata alla forma quadratica Q_k è data da:

$$M_k = \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

- (2) La forma bilineare f_k è degenere se e solo se il determinante della sua matrice associata M_k è nullo.

$$\det(M_k) = k(k^2 - 1) - 1(k - k) + k(1 - k^2) = k(k^2 - 1) - k(k^2 - 1) = 0$$

Il determinante è sempre zero per ogni $k \in \mathbb{R}$. Questo significa che la forma è sempre degenere. Per determinare il nucleo, risolviamo $M_k x = 0$:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

La prima e la terza equazione sono identiche. Dalla prima equazione, $x_2 = -kx_1 - kx_3$. Sostituendo nella seconda equazione:

$$x_1 + k(-kx_1 - kx_3) + x_3 = 0$$

$$x_1 - k^2x_1 - k^2x_3 + x_3 = 0$$

$$(1 - k^2)x_1 + (1 - k^2)x_3 = 0$$

$$(1 - k^2)(x_1 + x_3) = 0$$

- Se $k = 1$ o $k = -1$: L'equazione diventa $0 = 0$, il che significa che $x_1 + x_3$ può essere qualsiasi cosa. In questo caso, il sistema si riduce a $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (per $k = 1$) o $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$ (per $k = -1$). Il nucleo è un piano. Per $k = 1$: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Il nucleo è $\text{Span}\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$. Per $k = -1$: $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Il nucleo è $\text{Span}\{(1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$.
- Se $k \neq 1$ e $k \neq -1$: Allora $x_1 + x_3 = 0 \implies x_3 = -x_1$. Sostituendo in $x_2 = -kx_1 - kx_3 = -kx_1 - k(-x_1) = -kx_1 + kx_1 = 0$. Quindi, $x_2 = 0$. Il nucleo è $\text{Span}\{(1, 0, -1)\}$.

- (3) Possiamo usare il metodo degli autovalori. $\det(M_k) = 0$ per ogni k . Quindi dobbiamo considerare altri metodi, come gli autovalori. Il polinomio caratteristico è

$$\det(M_k - \lambda I) = \begin{vmatrix} k - \lambda & 1 & k \\ 1 & k - \lambda & 1 \\ k & 1 & k - \lambda \end{vmatrix}.$$

Espandendo, otteniamo $(k - \lambda)((k - \lambda)^2 - 1) - 1(k - \lambda - k) + k(1 - k(k - \lambda)) = 0$
 $(k - \lambda)(k^2 - 2k\lambda + \lambda^2 - 1) + \lambda + k - k^3 + k^2\lambda = 0$
 $k^3 - 2k^2\lambda + k\lambda^2 - k - k^2\lambda + 2k\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + \lambda + k - k^3 + k^2\lambda = 0$
 $-\lambda^3 + 3k\lambda^2 + (-2k^2 + 2)\lambda = 0$
 $-\lambda(\lambda^2 - 3k\lambda + (2k^2 - 2)) = 0$
 Un autovalore è $\lambda_1 = 0$. Gli altri autovalori sono le radici di $\lambda^2 - 3k\lambda + (2k^2 - 2) = 0$.

Usando la formula quadratica: $\lambda = \frac{3k \pm \sqrt{(3k)^2 - 4(2k^2 - 2)}}{2} = \frac{3k \pm \sqrt{9k^2 - 8k^2 + 8}}{2} = \frac{3k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{2}$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{3k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{3k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}$.

Partiamo dal primo autovalore non nullo λ_2 .

- $k > 0$, autovalore ovviamente positivo. $k < 0$, allora $-3k > 0$ e pertanto entrambi i membri di $\sqrt{k^2 + 8} > -3k$ sono positivi. Di conseguenza, possiamo elevare al quadrato ottenendo

$$k^2 + 8 > 9k^2 \iff 8 > 8k^2 \iff 1 > k^2$$

Pertanto, $\lambda_2 > 0$ per $-1 < k < 0$.

- $k = -1$ dà ovviamente $\lambda_2 = 0$.
- Per monotonia della funzione, abbiamo $\lambda_2 < 0$ per $k < -1$.

Procedendo analogamente per λ_3 si ottiene:

- $\lambda_3 < 0$ per $k < 1$.
- $\lambda_3 = 0$ per $k = 1$.
- $\lambda_3 > 0$ per $k > 1$.

E concludiamo lo studio della segnatura, mettendo insieme i vari intervalli, così da ottenere:

- $k < -1 \rightarrow (0, 2)$
- $k = -1 \rightarrow (0, 1)$
- $-1 < k < 1 \rightarrow (1, 1)$
- $k = 1 \rightarrow (1, 0)$
- $k > 1 \rightarrow (2, 0)$

(4) Dobbiamo calcolare $v_1^T M_k v_2$.

$$v_1^T M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $v_1^T M_1 v_2 = \begin{pmatrix} k+1 & k+1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3k + 3 = 0 \iff k = -1$. Pertanto, v_1 e v_2 sono ortogonali rispetto a f_{-1} .

Soluzione 2:

(1) Vediamo subito che la matrice corrispondente alla conica risulta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per capire di che conica si tratti, calcoliamo anzitutto il determinante della matrice. Risulta

$$\det(A) = 2(1 - 9) + 1(-1) = -19 \neq 0$$

Pertanto la conica non è degenere.

Studiamo gli autovalori della matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Risulta

$$\det(A_0 - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

Risultano due autovalori discordi $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$, pertanto siamo di fronte ad un'iperbole.

Possiamo calcolare il centro impostando il sistema:

$$A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{2,1} \\ -a_{3,1} \end{pmatrix}$$

Risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

Il sistema è risolto per $C(-\frac{3}{8}; \frac{1}{8})$, che risulta il centro della conica.

Per portarla alla sua forma canonica, bisogna anzitutto effettuare la rotazione rispetto alla matrice data dagli autovettori normalizzati di A_0 . Risulta:

$$\begin{aligned} (A_0 - 4I)v &= 0 \iff v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (A_0 + 2I)v &= 0 \iff v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Risulta pertanto come matrice M di rotazione:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = (x + y)/\sqrt{2} \\ y' = (x - y)/\sqrt{2} \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della conica otteniamo:

$$C' : 4x'^2 - 2y'^2 + \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y + 2 = 0$$

Che è riscrivibile facilmente come:

$$(2x' + \frac{\sqrt{2}}{4})^2 - (\sqrt{2}y + \frac{1}{2})^2 = -2 \iff 2(x' + \frac{\sqrt{2}}{64})^2 - (y + \frac{\sqrt{2}}{4})^2 = -1$$

A questo punto basta definire la traslazione $\begin{cases} x' = X - \frac{\sqrt{2}}{64} \\ y' = Y - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ Per ottenere la forma canonica

$$\frac{X^2}{2} - Y^2 = -1$$

Ora, gli asintoti dell'iperbole sono dati dalle rette

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Che in questo caso risultano

$$y = \sqrt{2}x \quad y = -\sqrt{2}x$$

I vettori direzione dei due asintoti saranno pertanto:

$$v = (1, \sqrt{2}), \quad w = (-1, \sqrt{2})$$

Per cui il coseno dell'angolo risulta:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|} = \frac{1}{3}$$

E l'angolo si ottiene dall'arcocoseno corrispondente.

(2) La matrice corrispondente alla seconda conica risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Il determinante risulta:

$$\det A = -\frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = 0$$

Pertanto la conica è degenera. Siccome la matrice $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante minore di 0, possiamo concludere che la conica è formata da due rette reali incidenti. Per trovare l'equazione delle due rette, cominciamo riscrivendo l'equazione della conica in dipendenza da x . Risulta:

$$C_2 : x^2 + (1 - y)x - 2y^2 + y = 0$$

Da cui risulta $\Delta = (1 - y)^2 - 4(-2y^2 + y) = 9y^2 - 6y + 1 = (y - 3)^2$. Abbiamo pertanto:

$$x = \frac{-(1 - y) \pm \sqrt{(3y - 1)^2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ x = -y \end{cases}$$

Abbiamo pertanto trovato le due rette che costituiscono la conica degenera:

$$r_1 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad r_2 : y = -x$$

Per trovare l'angolo formato dalle due rette vi sono molteplici metodi, qui applichiamo la formula:

$$\theta = \arctan \frac{m_{r_1} - m_{r_2}}{1 + m_{r_1}m_{r_2}}$$

Risulta:

$$\theta = \arctan \frac{-1 - 1/2}{1 - 1/2} = \arctan \frac{-3/2}{1/2} = \arctan(-3)$$