Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2021/2022

Provetta - 1 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^2$ lo spazio euclideo dotato di coordinate x, y. Si consideri il fascio di coniche al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_k : x^2 + kxy + y^2 + kx + ky + k - 2 = 0.$$

(1) Classificare le coniche del fascio al variare del parametro k.

(2) Per i $k \in \mathbb{R}$ tali per cui Φ_k è una parabola non degenere, scrivere l'isometria $f_k : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ che manda Φ_k nella sua forma canonica.

(3) Calcolare la lunghezza del segmento PQ, dove P, Q sono le intersezioni della parabola trovata al punto precedente con la retta $2y - x = 0$.

Esercizio 2. Si consideri la quintica Q nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ data dall'equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = \left(x_0^2 - x_2^2\right)^2 x_1 - \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 x_0 = 0.$$

(1) Sia $Q_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la quartica definita dall'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Provare che Q_2 è riducibile e che le sue componenti irriducibili sono una conica irriducibile C e due rette L_1, L_2.

(2) Trovare le coordinate dei punti appartenenti a $Q \cap C$.

(3) Provare che i punti singolari di Q formano un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Soluzione 1. (1) Per prima cosa le matrici associate al fascio di coniche sono

$$A(k) = \begin{pmatrix} k-2 & k/2 & k/2 \\ k/2 & 1 & k/2 \\ k/2 & k/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_0(k) = \begin{pmatrix} 1 & k/2 \\ k/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coniche degeneri si ottengono dall'annullarsi del determinante di $A(k)$:

$$\det A(k) = k - 2.$$

Otteniamo che l'unica conica degenere del fascio si ottiene per $k = 2$:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = (x+y)^2 + 2(x+y) = (x+y)(x+y+2) = 0$$

e si vede che sono due rette parallele (quindi parabola degenere). Supponiamo $k \neq 2$ e studiamo il segno del determinante di $A_0(k)$:

$$\det A_o(k) = \frac{(2+k)(2-k)}{4}.$$

- Se $k = -2$ otteniamo la parabola non degenere Φ_{-2}.
- Se $k < -2$ oppure $k > 2$, allora $\det A_o(k) < 0$ e otteniamo delle iperboli.
- Se $-2 < k < 2$, $\det A_0(k) > 0$ e si tratta di ellissi. Rimane da capire se siano a punti reali o non reali. Si ha che
$$\operatorname{tr} A_o(k) \det A(k) = 2(k-2) < 0$$
per ogni $k \in]-2, 2[$, quindi gli ellissi sono tutti a punti reali.

(2) L'unico valore di k che soddisfa tutte le richieste è $k = -2$. La parabola in questione è data da

$$\Phi_{-2} : x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0.$$

Rotazione: Vogliamo diagonalizzare la matrice

$$A_0(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $A_0(-2)$ sono dati da $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$. Gli autovettori associati $v = (v_1, v_2)^t$ sono dati dalle soluzioni di

$$A_0(-2)v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_1 - v_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A_0(-2) - 2I)v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -v_1 - v_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v = v_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia M la matrice 2×2 le cui colonne sono date dagli autovettori normalizzati di $A_0(-2)$:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e imponiamo la condizione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x = (x' - y')/\sqrt{2} \\ y = (x' + y')/\sqrt{2} \end{cases} .$$

Sostituendo nell'equazione di Φ_{-2} si ottiene

$$\Phi'_{-2} : 2y'^2 - 2x'\sqrt{2} - 4 = 0.$$

Traslazione: Riscriviamo Φ'_{-2} come

$$2y'^2 - 2\sqrt{2}(x' + \sqrt{2}) = 0.$$

A questo punto non rimane che definire la traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' - \sqrt{2} \\ y' = y'' \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica

$$2y''^2 - 2x''\sqrt{2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y''^2 - x''\sqrt{2} = 0.$$

L'isometria $f_{-2} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ è la rototraslazione che manda le coordinate x, y nelle coordinate x'', y'':

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = M \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Per trovare le coordinate di P, Q, mettiamo a sistema le equazioni di retta e parabola:

$$\begin{cases} y^2 - x\sqrt{2} = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad P = (0,0) \text{ e } Q = (4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$$

Immediatamente si ha che la lunghezza del segmento è

$$\overline{PQ} = d(P,Q) = \sqrt{32 + 8} = 2\sqrt{10}.$$

□

Soluzione 2. (1) Iniziamo calcolando il polinomio che ci serve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) &= -4x_1x_2\left(x_0^2 - x_2^2\right) + 4x_0x_2\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \\ &= 4x_2\left(x_0\left(x_1^2 - x_2^2\right) - x_1\left(x_0^2 - x_2^2\right)\right) = \\ &= 4x_2\left(x_0x_1^2 - x_0x_2^2 - x_0^2x_1 + x_1x_2^2\right) = \\ &= 4x_2\left(x_1 - x_0\right)\left(x_0x_1 + x_2^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Dalla fattorizzazione del polinomio otteniamo subito chi sono le componenti irriducibili di Q_2:

$$C = \left\{x_0x_1 + x_2^2 = 0\right\}, \quad L_1 = \{x_2 = 0\}, \quad L_2 = \{x_1 - x_0 = 0\}.$$

La conica C è irriducibile perché il determinante della matrice associata è

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

(2) I punti di $Q \cap C$ si ottengono come soluzioni del sistema

$$(\star) \quad \begin{cases} x_0x_1 + x_2^2 = 0 \\ \left(x_0^2 - x_2^2\right)^2 x_1 - \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 x_0 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_2^2 = -x_0x_1 \\ \left(x_0^2 + x_0x_1\right)^2 x_1 - \left(x_1^2 + x_0x_1\right)^2 x_0 = 0 \end{cases}.$$

La seconda equazione si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \left(x_0^2 + x_0x_1\right)^2 x_1 - \left(x_1^2 + x_0x_1\right)^2 x_0 &= x_0^2x_1\left(x_0 + x_1\right)^2 - x_0x_1^2\left(x_0 + x_1\right)^2 = \\ &= x_0x_1\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 + x_1\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Ora possiamo procedere per casi alla soluzione del sistema $(\star)$ usando la fattorizzazione del polinomio appena ottenuta:

$$\begin{aligned} &x_0 = 0 &&\rightsquigarrow && x_2 = 0 &&\rightsquigarrow && P_1 = [0,1,0], \\ &x_1 = 0 &&\rightsquigarrow && x_2 = 0 &&\rightsquigarrow && P_2 = [1,0,0], \\ &x_0 = x_1 &&\rightsquigarrow && x_2^2 = -x_1^2 &&\rightsquigarrow && \text{non ci sono soluzioni reali}, \\ &x_0 = -x_1 &&\rightsquigarrow && x_2^2 = x_1^2 &&\rightsquigarrow && P_3 = [1,-1,-1],\ P_4 = [1,-1,1]. \end{aligned}$$

(3) Procediamo al calcolo dei punti singolari di Q, che sono i punti di Q che si annullano lungo le derivate parziali $F_i := \partial F / \partial x_i$ per $i = 0,1,2$:

$$(\star\star) \quad \begin{cases} \left(x_0^2 - x_2^2\right)^2 x_1 - \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 x_0 = 0 \\ F_0(x_0,x_1,x_2) = 4x_0x_1\left(x_0^2 - x_2^2\right) - \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 = 0 \\ F_1(x_0,x_1,x_2) = \left(x_0^2 - x_2^2\right)^2 - 4x_0x_1\left(x_1^2 - x_2^2\right) = 0 \\ F_2(x_0,x_1,x_2) = 4x_2\left(x_1 - x_0\right)\left(x_0x_1 + x_2^2\right) = 0 \end{cases}.$$

Usiamo la fattorizzazione dell'ultima equazione di $(\star\star)$ per risolvere il sistema. Se $x_2 = 0$, le prime tre equazioni di $(\star\star)$ si scrivono come

$$\begin{cases} x_0^2x_1 - x_0x_1^4 = 0 \\ 4x_0^3x_1 - x_1^4 = 0 \\ x_0^4 - 4x_0x_1^3 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_0x_1\left(x_0^3 - x_1^3\right) = 0 \\ x_1\left(4x_0^3 - x_1^3\right) = 0 \\ x_0\left(x_0^3 - 4x_1^3\right) = 0 \end{cases}.$$

Possiamo quindi procedere per casi usando la fattorizzazione della prima equazione dell'ultimo sistema di equazioni considerato:

$$x_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{nessun punto nel piano proiettivo,}$$

$$x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{nessun punto nel piano proiettivo,}$$

$$x_0^3 = x_1^3 \quad \rightsquigarrow \quad x_0 = x_1 \quad \rightsquigarrow \quad x_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{nessun punto nel piano proiettivo.}$$

Concludiamo che non si sono soluzioni se $x_2 = 0$. Se $x_1 = x_0$, allora riscriviamo le prime tre equazioni di $(\star\star)$ come

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 4x_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) - \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 = 0 \\ \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 - 4x_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) = 0 \end{cases},$$

quindi possiamo ridurci a studiare le soluzioni dell'equazione

$$4x_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) - \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 = \left(x_1^2 - x_2^2\right)\left(3x_1^2 + x_2^2\right) = 0.$$

Quest'ultima equazione ha soluzioni reali solo nel caso in cui $x_1^2 = x_2^2$, da cui otteniamo i punti

$$P_5 = [1, 1, 1], \quad P_6 = [1, 1, -1].$$

Infine, se $x_0x_1 + x_2^2 = 0$, le soluzioni devono essere contenute nei punti P_1, P_2, P_3, P_4 trovati al punto precedente dell'esercizio. Notiamo che P_1 non è soluzione della seconda equazione di $(\star\star)$, mentre P_2 non risolve la terza. Invece, P_3 e P_4 risolvono tutte le equazioni del sistema $(\star\star)$, dunque sono punti singolari per Q.

Vogliamo provare che P_3, P_4, P_5, P_6 formano un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Ci basta dimostrare che sono in posizione generale, dunque non esistono tre punti tra i quattro che sono allineati. Visto che tutti e quattro i punti stanno nella carta affine $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, possiamo guardare alla loro configurazione nella carta:

$$P_{3,0} = (-1, -1), \quad P_{4,0} = (-1, 1), \quad P_{5,0} = (1, 1), \quad P_{6,0} = (1, -1).$$

Si vede subito che sono i vertici di un quadrato, dunque non esistono tre punti tra questi che sono allineati. La stessa cosa varrà nel piano proiettivo e possiamo concludere la dimostrazione. $\square$