Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2019/2020
13 Luglio 2020 - Secondo Appello

Il tempo per la prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ rispetto al riferimento proiettivo standard. Sia $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ la proiettività tale che la matrice rappresentativa rispetto al riferimento proiettivo standard è

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Si trovino i punti fissati dalla proiettività φ.

Si consideri ora $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il piano proiettivo complesso di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e si consideri la curva $\mathcal{C}$ definita dal polinomio

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_0x_1^3 - 2x_0^2x_2^2 + 2x_0^3x_1 = 0.$$

(ii) Si trovino i punti singolari della curva $\mathcal{C}$.

(iii) Si stabilisca la natura dei punti singolari, calcolando le tangenti principali e la molteplicità di intersezione tra la curva $\mathcal{C}$ e le tangenti principali nei punti singolari.

Soluzione dell'Esercizio 1. (i) I punti fissi della proiettività sono dati dagli autovettori della matrice $M = M_{\mathscr{E}}(T)$. Quindi calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2\lambda + \lambda^2 - 3) - 2(-\lambda - 3) + 2(9 + \lambda) =$$
$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27 = 27 - \lambda^3 + 3\lambda(3 - \lambda) =$$
$$= (3 - \lambda)(9 + 3\lambda + \lambda^2) + 3\lambda(3 - \lambda) =$$
$$= (3 - \lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = (3 - \lambda)(\lambda + 3)^2.$$

Abbiamo quindi due autovalori: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$. Consideriamo l'autospazio relativo al primo autovalore, esso è formato dai punti che soddisfano

$$\begin{cases} -2x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 - 5x_1 + x_2 = 0x_0 + x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 2x_1 \\ x_2 = 3x_1 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{[2, 1, 3].}$$

Per quanto riguarda il secondo autospazio, notiamo che esso è formato dai punti che soddisfano

$$\begin{cases} 2x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_0 + 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{x_0 + x_1 + x_2 = 0.}$$

Abbiamo quindi una retta di punti fissi puntuali.

(ii) Per trovare i punti singolari, calcoliamo il gradiente del polinomio F:

$$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = \left(-2x_1^3 - 4x_0x_2^2 + 6x_0^2x_1, 4x_1^3 - 6x_0x_1^2 + 2x_0^3, 4x_2^3 - 4x_0^2x_2\right)$$

e controlliamo per quali valori esso si annulla

$$\begin{cases} -x_1^3 - 2x_0x_2^2 + 3x_0^2x_1 = 0 \\ 2x_1^3 - 3x_0x_1^2 + x_0^3 = 0 \\ x_2(x_2^2 - x_0^2) = 0. \end{cases}$$

L'ultima equazione si annulla solo per $x_2 = 0$, oppure $x_2 = x_0$, oppure $x_2 = -x_0$.

- $\underline{x_2 = 0}$:
  In questo caso il sistema diventa

  $$\begin{cases} x_1(3x_0^2 - x_1^2) = 0 \\ 2x_1^3 - 3x_0x_1^2 + x_0^3 = 0, \end{cases}$$

  Tuttavia se $x_1 = 0$, allora anche $x_0 = 0$, ma questo non dà origine a nessun punto del piano proiettivo. Possiamo quindi supporre $x_1 = \pm\sqrt{3}x_0$ e sostituire questa relazione nell'ultima equazione, ottenendo

  $$\pm 6\sqrt{3}x_0^3 - 27x_0^3 + x_0^3 = 0 \rightsquigarrow x_0 = 0,$$

  che, come abbiamo notato prima, non dà origine a nessun punto sul piano proiettivo.

- $\underline{x_2 = \pm x_0}$:
  Il sistema in questo caso diventa

  $$\begin{cases} -x_1^3 - 2x_0^3 + 3x_0^2x_1 = 0 \\ 2x_1^3 - 3x_0x_1^2 + x_0^3 = 0. \end{cases}$$

  Sommando queste due equazioni otteniamo

  $$x_1^3 - 3x_0x_1^2 + 3x_0^2x_1 - x0^3 = (x_1 - x_0)^3 = 0,$$

  cioè $x_1 = x_0$. Otteniamo quindi due punti singolari:

  $$\boxed{P_1 = [1, 1, 1]} \qquad \text{e} \qquad \boxed{P_2 = [1, 1, -1]}.$$

(iii) Per trovare la molteplicità dei punti singolari, consideriamo la disomogeneizzazione della curva $\mathcal{C}$ rispetto la variabile x_0, cioè $\mathcal{D} = j_0^{-1}(\mathcal{C})$ sul piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di coordinate (x, y):

$$\mathcal{D} : f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^2 + 2x = 0$$

ed i punti $Q_1 = j_0^{-1}(P_1) = (1, 1)$ e $Q_2 = j_0^{-1}(P_2) = (1, -1)$. Applichiamo la traslazione per portare i punti Q_1 e Q_2 nell'origine, cioè

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \pm 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' \mp 1, \end{cases}$$

quindi

$$f(x', y') = (x' + 1)^4 + (y' \mp 1)^4 - 2(x' + 1)^3 - 2(y' \mp 1)^2 + 2(x' + 1) = 0.$$

Per trovare $m_{Q_1}(\mathcal{D})$ e $m_{Q_2}(\mathcal{D})$, dobbiamo trovare i termini di grado più basso di questo polinomio non nulli, che corrisponderanno anche alle equazioni cartesiane delle tangenti principali nei punti singolari:

- grado 0:
$$1 + 1 - 2 - 2 + 2 = 0.$$
- grado 1:
$$4x' \mp 4y' - 6x' \pm 4y' + 2x' = 0.$$
- grado 2:
$$6(x')^2 + 6(y')^2 - 6(x')^2 - 2(y')^2 = 4(y')^2.$$

Quindi

$$\boxed{m_{Q_1}(\mathcal{D}) = m_{Q_2}(\mathcal{D}) = 2}$$

con tangenti principali rispettivamente

$$t_1 : y = 1 \qquad \text{e} \qquad t_2 : y = -1,$$

che omogeneizzate nel proiettivo corrispondono a

$$\boxed{\overline{t_1} : x_2 = 1} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\overline{t_2} : x_2 = -1.}$$

Per completare la classificazione dei punti singolari, calcoliamo la molteplicità di intersezione $I(\mathcal{D}, t_i; Q_i)$. Notiamo che una parametrizzazione per le rette t_1 e t_2 è data da $(t, \pm 1)$, che sostituita all'interno di f, dà come risultato

$$\begin{aligned} f(t, \pm 1) &= t^4 + 1 - 2t^3 - 2 + 2t = t^4 - 1 - 2t(t^2 - 1) = \\ &= (t^2 - 1)(t^2 + 1 - 2t) = (t - 1)^3(t + 1), \end{aligned}$$

quindi $t = 1$ è una soluzione di molteplicità 3 e quindi

$$\boxed{I(\mathcal{C}, \overline{t_1}; P_1) = 3} \qquad \text{e} \qquad \boxed{I(\mathcal{C}, \overline{t_2}; P_2) = 3}$$

e quindi P_1 e P_2 sono due $\boxed{\text{cuspidi.}}$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo di coordinate (x, y, z). Sia definita la quadrica

$$\mathcal{Q}_k : x^2 + 2kxy + y^2 + kz^2 - 2kz + 1 = 0$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Trovare i valori reali di k per cui $\mathcal{Q}_k$ è non degenere. Si classifichi la quadrica in corrispondenza di tali valori.

(ii) Sia $k = 2$. Si consideri il centro $C = (0, 0, 1)$ di $\mathcal{Q}_2$, e si trovi un'isometria $\varphi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che porta $\mathcal{Q}_2$ in forma canonica.

(iii) Sia π il piano passante per C ed ortogonale alla retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - z = \sqrt{7} \\ y + z = 2020. \end{cases}$$

Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k = \mathcal{Q}_k \cap \pi$ al variare di $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Soluzione dell'Esercizio 2. (i) La matrice A_k associata alla quadrica $\mathcal{Q}_k$ e la sottomatrice B_k relativa ai termini di grado 2 sono

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Per trovare i valori di k per cui $\mathcal{Q}_k$ è non degenere è sufficiente trovare i valori per cui si annulla il determinante di A_k. Sviluppando questo secondo la prima riga otteniamo che:

$$\begin{aligned} \det(A_k) &= \det(B_k) + k \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ -k & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= k(1-k^2) - k^2(1-k^2) = \\ &= k(1-k^2)(1-k) = k(1-k)^2(1+k), \end{aligned}$$

che si annulla per $k = 0 \lor k = 1 \lor k = -1$.

Quindi $\boxed{\mathcal{Q}_k \text{ è non degenere per } k \neq \pm 1 \land k \neq 0.}$ Per procedere con la classificazione della quadrica, dobbiamo studiare il segno del determinante di A_k e la segnatura di B_k. Il segno del determinante di A_k è

$$\det(A_k) \begin{cases} > 0 & \text{se } k < -1 \lor k > 0 \land k \neq 1 \\ < 0 & \text{se } -1 < k < 0 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la segnatura di B_k, notiamo subito che il determinante di B_k è $k(1-k)(1+k)$, che si annulla solo per i valori per cui si annulla anche

$\det(A_k)$ e quindi, per i casi di nostri interesse, $r(B_k) = 3$. Per calcolare la segnatura, conviene considerare la forma quadratica associata a B_k:

$$\begin{aligned} x^2 + 2kxy + y^2 + kz^2 &= 0 \\ x^2 + 2kxy + k^2y^2 + y^2 - k^2y^2 + kz^2 &= 0 \\ (x + ky)^2 + (1 - k^2)y^2 + kz^2 &= 0. \end{aligned}$$

Risulta quindi che la segnatura di B_k è

$$\begin{cases} (3,0) & \text{se } 0 < k < 1 \\ (2,1) & \text{se } -1 < k < 0 \vee k > 1 \\ (1,2) & \text{se } k < -1. \end{cases}$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{cases} \text{se } 0 < k < 1 & \det(A_k) > 0 \text{ e segnatura}(B_k) = (3,0) \\ \text{se } -1 < k < 0 & \det(A_k) < 0 \text{ e segnatura}(B_k) = (2,1) \\ \text{se } k < -1 & \det(A_k) > 0 \text{ e segnatura}(B_k) = (1,2) \\ \text{se } k > 1 & \det(A_k) > 0 \text{ e segnatura}(B_k) = (2,1). \end{cases}$$

Possiamo quindi completamente classificare la quadrica $\mathcal{Q}_k$ con queste informazioni:

$$\boxed{\mathcal{Q}_k \text{ è } \begin{cases} \text{ellissoide immaginario} & \text{se } 0 < k < 1 \\ \text{iperboloide ellittico} & \text{se } -1 < k < 0 \\ \text{iperboloide iperbolico} & \text{se } k < -1 \vee k > 1. \end{cases}}$$

(ii) Per $k = 2$, la quadrica assume l'equazione

$$\mathcal{Q}_2 : x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy - 4z + 1 = 0$$

e le matrice A_2 corrispondente è

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Operiamo quindi una traslazione per portare il centro nell'origine:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z - 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' + 1 \end{cases}$$

e otteniamo l'equazione:

$$\mathcal{Q}'_2 : (x')^2 + (y')^2 + 2(z')^2 + 4x'y' - 1 = 0.$$

Per eliminare il termine misto attraverso isometrie, troviamo una matrice ortogonale che diagonalizza la matrice

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per farlo, calcoliamo il polinomio caratteristico di B_2:

$$\begin{aligned} \det(B_2 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-4) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi tre autovalori distinti: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$ e possiamo calcolare una base per i loro autospazi per trovare i corrispendenti autospazi:

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} -x+2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

La matrice ortogonale che porta quindi B_2 in forma diagonale è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che corrisponde all'isometria

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'' \\ z' = x''. \end{cases}$$

Applicando questa alla quadrica $\mathcal{Q}_2'$ otteniamo

$$\mathcal{Q}_2'' : 2(x'')^2 + 3(y'')^2 - (z'')^2 - 1 = 0,$$

che corrisponde alla forma canonica di un iperboloide iperbolico, come ci aspettavamo. Pertanto, l'isometria cercata è

$$\boxed{\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(iii) Per calcolare l'intersezione della quadrica con π, abbiamo bisogno di trovare l'equazione cartesiana del piano: procediamo trovando la giacitura della retta r, risolvendo il sistema associato:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z, \end{cases}$$

cioè $\text{Giac}(r) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Sappiamo che $\text{Giac}(\pi) = \text{Giac}(r)^\perp$, che è quindi

$$\text{Giac}(\pi) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Per trovare le equazioni del piano, scriviamo le sue equazioni parametriche imponendo il passaggio per C e poi otteniamo da esse l'equazione cartesiana:

$$\pi : \begin{cases} x = -u + v \\ y = v \\ z = 1 + u \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad x - y + z = 1.$$

Possiamo adesso trovare l'equazione di $\mathcal{C}_k$ come

$$\mathcal{C}_k : \begin{cases} x^2 + 2kxy + y^2 + kz^2 - 2kz + 1 = 0 \\ z = 1 - x + y \end{cases} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow x^2 + 2kxy + y^2 + k(1 - x + y)^2 - 2k(1 - x + y) + 1 = 0 \quad \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow (1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + 1 - k = 0.$$

Questa conica ha matrice associata M_k e sottomatrice dei termini quadratici D_k, dove

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 - k & 0 & 0 \\ 0 & 1 + k & 0 \\ 0 & 0 & 1 + k \end{pmatrix} \qquad D_k = \begin{pmatrix} 1 + k & 0 \\ 0 & 1 + k \end{pmatrix}$$

Notiamo che $\det(D_k) = (1 + k)^2 > 0$ per ogni $k \neq -1$, mentre $\det(A_k) = (1 - k)(1 + k)^2 \neq 0$ se e solo se $k \neq 1 \wedge k \neq -1$. Inoltre possiamo stabilire che la segnatura di A_k è

$$\begin{cases} (3, 0) & \text{se } -1 < k < 1 \\ (2, 1) & \text{se } k > 1 \\ (1, 2) & \text{se } k < -1 \\ (2, 0) & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

Possiamo quindi classificare completamente la conica, come

$$\boxed{\mathcal{C}_k \text{ è } \begin{cases} \text{ellisse a punti non reali} & \text{se } -1 < k < 1 \\ \text{ellisse degenere} & \text{se } k = 1 \\ \text{ellisse a punti reali} & \text{se } k < -1 \vee k > 1. \end{cases}}$$