

Geometria A
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2024/2025
Primo Appello - 16 Giugno 2025

Esercizio 1.

Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V = \mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si consideri la forma quadratica

$$Q_a(x_1, x_2, x_3) = 2ax_1x_2 + 4ax_1x_3 + ax_2^2 + 2x_2x_3$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

- (1) Determinare la matrice M_a associata alla forma bilineare $f_a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ associata a Q_a .
- (2) Per quali valori di $a \neq 0$ si ha che 0 è un autovalore di Q_a ? Per tali valori, studiare la segnatura della matrice risultante.
- (3) Siano l, m due rette definite come

$$l : \begin{cases} 3x - z - 7 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad m : \begin{cases} x - 5z + \pi = 0 \\ y - z + 11 = 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori di $a \neq 0$ si ha che le due rette risultano perpendicolari rispetto a f_k . Per quali valori di a si ha che (V, f_a) risulta essere uno spazio euclideo?

- (4) Posto $a = 1$ si scriva, una matrice C ortonormale tale che $C^T M_1 C = D$ con D diagonale.

Esercizio 2.

Si consideri il fascio di coniche in $\mathbb{E}^2$ dato da:

$$\mathcal{Q}_{[\lambda, \mu]} = 3(2\lambda - \mu)x^2 + 3\mu y^2 - (\lambda + \mu)xy - 2\mu x - 2\lambda y - 1 = 0$$

Al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

- (1) In corrispondenza del punto proiettivo $[1 : 1]$ si studi la conica, se ne trovi l'eventuale centro e assi di simmetria.
- (2) Sempre posti $[\lambda, \mu] = [1, 1]$, scrivere esplicitamente un'isometria $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ che manda C nella sua forma canonica.
- (3) Supposti alternativamente $\lambda, \mu = 0$, studiare il tipo di conica di $\mathcal{Q}_{[0, \mu]}$, $\mathcal{Q}_{[\lambda, 0]}$ al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Soluzione 1:

(1) Risulta $M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 2a \\ a & a & 1 \\ 2a & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Impostiamo il calcolo del polinomio caratteristico di M_a :

$$\det(M_a - \lambda I) = \det \left(\begin{pmatrix} -\lambda & a & 2a \\ a & a - \lambda & 1 \\ 2a & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + (1 + 5a^2)\lambda + 4a^2 - 4a^3$$

Notiamo come, per $a = 1$, il termine noto scompare ed è possibile raccogliere un fattore λ a moltiplicare. Questo ci assicura l'esistenza di un autovalore nullo. Studiamo quindi la segnatura di

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ponendo uguale a zero il polinomio caratteristico precedentemente calcolato, nel caso $a = 1$, si ottiene

$$\det(M_1 - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 6) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

Risulta pertanto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ e la segnatura risulta $\text{Segn}(M_1) = (1, 1)$.

(3) Per prima cosa, conviene trasformare le due rette dalla forma cartesiana a quella parametrica, così da ottenere le corrispondenti giaciture. Per la retta l risulta:

$$l : \begin{cases} 3x - z - 7 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3t - 7 \end{cases}$$

Pertanto la giacitura della retta risulta $\mathbf{u}_l = \langle (1, 0, 3) \rangle$. Analogamente, per la retta m risulta:

$$m : \begin{cases} x - 5z + \pi = 0 \\ y - z + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5t - \pi \\ y = t - 11 \\ z = t \end{cases}$$

Da cui ovviamente $\mathbf{u}_m = \langle (5, 1, 1) \rangle$.

Imponiamo ora la condizione di perpendicolarità, ossia $f_k(u_l, u_m) = 0$. In linguaggio matriciale, questo equivale a chiedere $u_l^T M_a u_m = 0$. Pertanto:

$$(1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 0 & a & 2a \\ a & a & 1 \\ 2a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff (1 \ 0 \ 3) \begin{pmatrix} 3a \\ 6a + 1 \\ 10a + 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 3a + 3(10a + 1) = 0$$

L'ultima condizione è verificata per $a = -\frac{1}{11}$. Per rispondere all'altro quesito del punto in questione, ricordiamo anzitutto che (V, f_a) è uno spazio euclideo se f_a è

simmetrica e definita positiva. Ricordando la matrice M_a calcolata all'inizio del punto precedente, vediamo subito come il primo minore di testa sia uguale a 0. Questo implica che la matrice non può mai essere definita positiva e quindi abbiamo che (V, f_a) non è mai uno spazio euclideo $\forall a \in \mathbb{R}$.

- (4) Nel caso $a = 1$, gli autovalori sono quelli ricavati al punto 2. Esplicitiamo i conti per il calcolo degli autovettori corrispondenti.

- $\lambda = 0$

$$A_1 - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta pertanto di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

Ponendo quindi $z = 1$, otteniamo $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)$.

- $\lambda = -2$.

$$A_1 - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ponendo la terza riga uguale a zero sottraendovi la prima, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ponendo quindi $z = 1$, otteniamo $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$.

- $\lambda = 3$.

$$A_1 - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Sottraendo dalla seconda riga la terza e sommandovi la prima così da mandarla a zero, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Ponendo quindi $z = 1$, otteniamo $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$.

Siccome gli autovettori di una matrice sono già di per sé ortogonali, per ottenere la base richiesta basta normalizzarli. Siccome $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$, si ha

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Soluzione 2:

(1) Posto $[\lambda : \mu] = [1 : 1]$ la conica risulta:

$$\mathcal{Q}_{[1:1]} = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$$

Le matrici associate alla conica risultano:

$$A : \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_0 : \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Da cui segue $\det(A) = -1(9-1) + 1(-3-1) - 1(1+3) = -16 \neq 0$, per cui la conica non è degenere. D'altro canto, studiando gli autovalori di A_0 abbiamo:

$$A_0 - tI = \begin{pmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{pmatrix} \Rightarrow (3-t)^2 - 1 = 0 \iff (t-4)(t-2) = 0$$

Da cui seguono due autovalori distinti non nulli $t_1 = 4, t_2 = 2$. Siccome abbiamo due autovalori concordi, la conica in questione è un'ellisse. Per identificare se l'ellisse sia a punti reali o complessi, studiamo il segno del terzo autovalore di A . Per farlo, è sufficiente studiare il segno di $f(A) = \text{tr}(A_0) \det(A) = 9 \cdot (-16) < 0$, che essendo discorde rispetto ai segni dei due autovalori precedenti, identifica un ellisse a punti reali.

Per trovare il centro dell'ellisse, è sufficiente impostare il sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - y = 1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato il punto $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ come centro dell'ellisse. Per trovare ora le due rette che corrispondono agli assi di simmetria dell'ellisse, cerchiamo anzitutto gli autovettori di A_0 . Risulta

$$\begin{aligned} A_0 - t_1 I &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A_0 - t_2 I &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Di conseguenza, gli assi di simmetria dell'ellisse sono le rette aventi direzione parallela agli autovettori e passanti per C . Si ha

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + c_1 = 0 \\ x - y + c_2 = 0 \\ 1 + c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Pertanto le due rette risultano $r_1 : x + y - 1 = 0$ $r_2 : x - y = 0$.

- (2) Troviamo ora l'isometria che trasforma la conica nella sua forma canonica. Questa si ottiene semplicemente impostando come colonne gli autovettori normalizzati della matrice A . Abbiamo pertanto

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo dunque effettuare il cambio di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = (x' + y')/\sqrt{2} \\ y = (-x' + y')/\sqrt{2} \end{cases}$$

Inserendo le incognite all'interno dell'equazione della conica si ottiene

$$3\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 3\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} - 2\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} - 2\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} - 2\frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} - 1 = 0$$

Da cui segue

$$C' : x'^2 + 2y'^2 - 2\sqrt{2}y' - 1 = 0$$

Infine, riscrivendo la conica come

$$C' : x'^2 + (\sqrt{2}y' - 1)^2 = 2 \iff \frac{x'^2}{2} + (y' - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$$

È sufficiente operare la traslazione

$$\begin{cases} x' = X \\ y' = Y + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

per ottenere la forma canonica:

$$\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1$$

- (3) Posti $[\lambda : \mu] = [0 : \mu]$, la conica diventa:

$$C_{[0:\mu]} : -3\mu x^2 + 3\mu y^2 - \mu xy - 2\mu x - 1 = 0$$

Le corrispondenti matrici risultano:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\mu & 0 \\ -\mu & -3\mu & -\mu/2 \\ 0 & -\mu/2 & 3\mu \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} -3\mu & -\mu/2 \\ -\mu/2 & 3\mu \end{pmatrix}$$

Studiamo anzitutto il determinante della matrice per capire in che casi la conica risulta degenerare. Risulta:

$$\det(A) = -1\left(-9\mu^2 - \frac{\mu^2}{4}\right) + \mu(-3\mu^2) = -3\mu^3 + \frac{37}{4}\mu^2 = 0 \iff \mu^2\left(-3\mu + \frac{37}{4}\right) = 0$$

La conica risulta pertanto degenerare nei casi $\mu = 0$, $\mu = \frac{37}{12}$. In più, $\det(A) > 0 \iff \mu < \frac{37}{12}$.

Studiamo per prima cosa il caso $\mu = \frac{37}{12}$ per trovare il tipo di conica degenera. Siccome la sottomatrice ottenuta rimuovendo la seconda riga e la seconda colonna

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 37/4 \end{pmatrix}$$

ha determinante $\det(A') = -\frac{37}{4} \neq 0$, la matrice A ha rango 2 e la conica corrispondente è semplicemente degenera. Studiando ora il determinante di A_0 risulta

$$\det(A_0) = -9 \cdot \frac{37^2}{12^2} - \frac{1}{4} \frac{37^2}{12^2} < 0$$

la conica si spezza in due rette reali non parallele.

Studiamo ora gli autovalori di A_0 per capire a che tipo appartenga la conica nei casi in cui non è degenera. Si ha

$$A_0 - tI = \begin{pmatrix} -3\mu - t & -\mu/2 \\ -\mu/2 & 3\mu - t \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_0 - tI) = (-3\mu - t)(3\mu - t) - \frac{\mu^2}{4} = t^2 - \frac{37}{4}\mu^2$$

Risultano di conseguenza come autovalori $t_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}\mu$. Siccome gli autovalori sono discordi, siamo sempre nel caso di un'iperbole.

Posti ora $[\lambda, \mu] = [\lambda, 0]$ procediamo come sopra. Le corrispondenti matrici risultano:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 3\lambda & -\lambda/2 \\ -\lambda & -\lambda/2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} -3\lambda & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Studiamo anzitutto il determinante della matrice per capire in che casi la conica risulta degenera. Risulta:

$$\det(A) = -1\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right) - \lambda(3\lambda^2) = -3\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{4} = 0 \iff \lambda^2\left(-3\lambda + \frac{1}{4}\right) = 0$$

La conica risulta pertanto degenera nei casi $\lambda = 0, \lambda = \frac{1}{12}$. In più, $\det(A) > 0 \iff \lambda < \frac{1}{12}$.

Come prima, studiamo anzitutto il caso $\lambda = 1/12$ per capire il tipo di conica degenera. Si ha nuovamente, rimuovendo la seconda riga e la seconda colonna, $\det(A') = -1/144 \neq 0$, pertanto la conica non è doppiamente degenera. Dallo studio della sottomatrice A_0 , risulta $\det(A_0) = -\frac{1}{144 \cdot 4} < 0$, di nuovo la conica si spezza in due rette distinte reali non parallele.

Studiamo ora gli autovalori di A_0 per capire a che tipo appartenga la conica nei casi in cui non è degenera. Si ha

$$A_0 - tI = \begin{pmatrix} -3\lambda - t & -\lambda/2 \\ -\lambda/2 & -t \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_0 - tI) = (-3\lambda - t)(-t) - \frac{\lambda^2}{4} = t^2 - 3\lambda t - \frac{\lambda^2}{4}$$

Risultano di conseguenza come autovalori $t_{1,2} = \frac{3\lambda \pm \lambda\sqrt{10}}{2}$. Anche in questo caso, siccome gli autovalori sono discordi, siamo sempre di fronte a un'iperbole.