# Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

16 Luglio 2018
Appello di Luglio

Il tempo per la prova è di 3 ore. Durante la prova non è permesso l'uso di appunti e libri.

**Esercizio 1**
Sia dato il sistema in $\mathbb{R}^4$ nelle incognite $x, y, z, w$

$$\begin{cases} x + 2y + hz - w = 1 \\ (h-1)y + (1-h)w = h \\ x + 3y + 2z - hw = 3, \end{cases}$$

con $h \in \mathbb{R}$.

(i) Si descrivano le soluzioni del sistema al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Sia $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ lo spazio affine reale con riferimento affine $Oe_1, e_2, e_3, e_4$, con $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Siano $x, y, z, w$ le coordinate rispetto tale riferimento. Si consideri, al variare di $h \in \mathbb{R}$, il sottospazio affine $U_h$, con equazioni cartesiane date dal sistema precedente. Sia $\bar{h}$, l'unico valore reale per cui $U_{\bar{h}}$ ha dimensione 2.

(ii) Si verifichi che $U_0$ ed $U_{\bar{h}}$ sono sghembi. Quale è il più piccolo sottospazio affine che contiene entrambi?

(iii) Sia dato il piano affine di equazioni cartesiane:

$$W : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - w = -1. \end{cases}$$

Si stabilisca la posizione reciproca tra $U_{\bar{h}}$ e $W$ e si forniscano equazioni cartesiane ed equazioni parametriche del più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^4$ che contiene entrambi.

**Esercizio 2**
Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_2 + e_3, v_3 = e_2 - e_3, v_4 = e_4\}$ un'altra base per $\mathbb{R}^4$ e definiamo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ come l'automorfismo lineare tale che:

$$\begin{aligned} F(v_1) &= -e_1 + ke_2 \\ F(v_2) &= (2+k)e_2 + 2e_4 \\ F(v_3) &= (2-k)e_2 + 2e_3 + 2e_4 \\ F(v_4) &= (1-k)e_4, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(i) Si scrivano le matrici $M_{\mathcal{E}}(F)$ e $M_{\mathcal{B}}(F)$.

(ii) Si calcoli, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}(F)$ e si discuta la molteplicità algebrica degli autovalori al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(iii) Si discuta la diagonalizzabilità dell'applicazione lineare $F$ per i valori di $k$ pari a $k_1 = -6$, $k_2 = -2$ e $k_3 = 0$.

**Esercizio 3**
Si considerino in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ il piano $\pi$, di equazioni cartesiane

$$\pi : \begin{cases} x + y - 2z + w + 2 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - w - 2 = 0 \end{cases}$$

e la retta $r$, passante per i punti $A = (1, 0, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0, 3)$.

(i) Si determini l'equazione cartesiana dell'iperpiano $\Lambda$, contenente $\pi$ e parallelo a $r$.

(ii) Si determini la minima distanza tra $\pi$ e $r$.

(iii) Siano $\Pi$ e $R$ le chiusure proiettive di $\pi$ e $r$. Si determinino le equazioni di $\Pi \cap R$ e del più piccolo spazio contenente $\Pi$ e $R$.

**Esercizio 4**
Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si consideri la quadrica $Q$ descritta dall'equazione

$$4x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 8 = 0.$$

(i) Si classifichi Q e si scriva l'isometria che la porta in forma canonica.

(ii) Si classifichi la conica tagliata da Q sul piano di equazione $y + z - 2 = 0$ e si trovino le sue intersezioni con la conica di equazione

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y + z = 2 \\ 2x^2 + 4y^2 - 8y + 6 = 0 \end{cases}$$

.

Si consideri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con sistema di coordinate $(x_0, x_1, x_2)$ la curva definita da

$$\mathcal{D} : x_1^5 + x_0^2 x_1^2 x_2 - x_0^3 x_2^2 = 0.$$

(iii) Si trovino i punti singolari (specificando la loro molteplicità) di $\mathcal{D}$, le tangenti principali e la molteplicità di intersezione tra la curva e le tangenti principali in tali punti.

# Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015

Appello di luglio 2016

**Esercizio 5**

Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ e si consideri la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, se $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in X$ sono sulla stessa retta verticale allora $d(P, Q) = |y_Q - y_P|$ mentre in caso contrario si ha $d(P, Q) = |y_P| + |y_Q| + |x_P - x_Q|$.

- Dimostrare che $(X, d)$ è uno spazio metrico e che su ogni semiretta verticale la distanza indotta è quella euclidea;
- Descrivere le palle aperte di centro $(0, 0)$ e $(0, 1)$;
- Si considerino le successioni $(P_n)_{n\geq1}$ e $(Q_n)_{n\geq1}$ con $P_n = (1/n, 1)$ e $Q_n = (1, 1/n)$. Si dica se le successioni convergono in $(X, d)$;
- Chiamando $\tau$ la topologia definita dalla metrica, dire se $(X, \tau)$ è $T_2$ e compatto.

**Esercizio 6**

Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ si consideri la quadrica $Q$ descritta dall'equazione

$$4x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz - 8 = 0.$$

(i) Si classifichi Q e si scriva l'isometria che la porta in forma canonica.

(ii) Si classifichi la conica tagliata da Q sul piano di equazione $y + z - 2 = 0$ e si trovino le sue intersezioni con la conica di equazione

$$\mathcal{C}' : \begin{cases} y + z = 2 \\ 2x^2 + 4y^2 - 8y + 6 = 0 \end{cases}$$

.

(iii) Si consideri in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con sistema di coordinate $(x_0, x_1, x_2)$ curva definita da $\mathcal{C} : x_1^5 + x_0^2x_1^2x_2 - x_0^3x_2^2 = 0$. Si trovino i punti singolari (specificando la loro molteplicità) di $\mathcal{C}$, le tangenti principali e la molteplicità di intersezione tra la curva e le tangenti principali in tali punti.

**Soluzione dell'esercizio 1** (i) Per risolvere il primo punto è sufficiente risolvere il sistema, utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, riducendo la matrice del sistema per righe:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & h & -1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h & h \\ 1 & 3 & 2 & -h & 3 \end{array}\right) \to$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & h & -1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h & h \\ 0 & 1 & 2-h & -h+1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & h & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-h & -h+1 & 2 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h & h \end{array}\right) \to$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - (h-1)R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & h & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-h & -h+1 & 2 \\ 0 & 0 & (2-h)(1-h) & (1-h)(2-h) & 2-h \end{array}\right)$$

Abbiamo quindi 3 casi diversi:

- Se $h \neq 2 \wedge h \neq 1$.
  In questo caso il sistema ha rango massimo, cioè 3, quindi abbiamo $\infty^1$ soluzioni, che sono

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{h-1} + (h-1)t \\ y = \frac{h}{h-1} + t \\ z = -\frac{1}{h-1} - t \\ w = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

- Se $h = 2$.
  In questo caso abbiamo il sistema che diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  Quindi il sistema è compatibile e possiede $\infty^2$ soluzioni, che sono

$$\begin{cases} x = -3 - 2u - v \\ y = 2 + v \\ z = u \\ w = v, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

- Se $h = 1$.
  In questo caso il sistema diventa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

  allora il sistema è incompatibile e non abbiamo soluzioni.

(ii) Dal punto precedente sappiamo che il sottospazio di dimensione 2, è quello corrispondente ad $\bar{h} = 2$. Quindi le equazioni cartesiane e parametriche di $U_2$ sono:

$$U_2 : \begin{cases} y - w = 2 \\ x + 2z + w = -3, \end{cases} \qquad U_2 : \begin{cases} x = -3 - 2u - v \\ y = 2 + v \\ z = u \\ w = v, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Mentre sappiamo che $U_0$ ha dimensione 1, quindi corrisponde ad una retta di equazioni parametriche:

$$U_0 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ w = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi studiamo la posizione reciproca di questi due sottospazi, studiando le loro giaciture:

$$\text{Giac}(U_2) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{Giac}(U_0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per farlo, possiamo creare una matrice che ha per righe i vettori generatori delle due giaciture, ottenendo

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha rango 3, come è possibile verificare considerando il minore $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$. Per verificare che i due sottospazi sono sghembi, ci manca solo di controllare che i due spazi non hanno punti in comune. Per fare questo, sostituiamo le equazioni parametriche della retta $U_0$, nelle equazioni cartesiane del piano $U_2$, ottenendo:

$$\begin{cases} t - t = 2 \\ 1 - t + 2 - 2t + t = -3, \end{cases}$$

che è chiaramente un sistema incompatibile. Quindi non esistono punti in comune. Allora i due spazi sono sghembi. Ovviamente in questo caso, abbiamo che il più piccolo sottospazio che contiene entrambi è l'intero spazio $\mathbb{R}^4$.

(iii) Per studiare la posizione dei due spazi, trasformiamo l'equazione cartesiana di $W$, per trovarne la giacitura:

$$W : \begin{cases} x = 2 - 2u - v \\ y = -1 + v \\ z = u \\ w = v, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\text{Giac}(W) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Giac}(U_2).$$

Quindi i due piani o sono coincidenti oppure sono paralleli. Per distinguere i due casi, verifichiamo se il punto $P = (-3, 2, 0, 0) \in U_2$ appartiene anche al piano $W$, sostituendo i suoi valori nelle equazioni cartesiane di $W$, ma $2 \neq -1$. Quindi $P \notin W$, allora non ci sono punti in comune e quindi i due piani sono paralleli. Per trovare le equazioni parametriche dell'iperpiano $H$ che contiene entrambi, possiamo prendere il punto $Q = (2, -1, 0, 0) \in W$ e come vettori della giacitura, i vettori comuni alle due giaciture ed il vettore che unisce due punti tra i due piani, quindi:

$$H : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v.$$

Mentre per trovare l'equazione cartesiana, possiamo o invertire queste relazioni, oppure considerare la seguente matrice ed uguagliare il suo determinante a 0:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z & w \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & w \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -6z - [5(y+1-w) + 3(x-2+w)] = \\ &= -6z - 5y - 5 + 5w - 3x + 6 - 3w = \\ &= -3x - 5y - 6z + 2w + 1 = 0. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che $H$ ha equazione cartesiana $3x + 5y + 6z - 2w - 1 = 0$.

**Soluzione dell'esercizio 2** (i) Con le informazioni fornite dal problema, possiamo scrivere la matrice

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 2+k & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1-k \end{pmatrix}$$

Per trovare le due matrici richieste possiamo invertire le relazioni fino a trovare le due matrici richieste, oppure possiamo calcolare la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right)$, in modo da ottenere le due relazioni:

$$M_{\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(F) \cdot M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right)$$

e

$$M_{\mathcal{B}}(F) = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right) \cdot M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(F).$$

Per calcolare la matrice del cambio di base, dobbiamo prima calcolare la matrice $M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right)$ e poi calcolarne l'inversa, usando l'uguaglianza $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right) = \left(M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right)\right)^{-1}$. Quindi

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che è formata dalle coordinate dei vettori della base $\mathcal{B}$ in colonna rispetto la base $\mathcal{E}$. Quindi possiamo calcolarne l'inversa ed ottenere che:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right) = \left(M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Adesso possiamo trovare le due matrici richieste:

$$M_{\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(F) \cdot M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 2+k & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}(F) = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}\left(I_{\mathbb{R}^4}\right) \cdot M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(F) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 2+k & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1-k \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1+k & 2+k & 4-k & 0 \\ k-1 & 2+k & -k & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2-2k \end{pmatrix}$$

(ii) Calcoliamo adesso il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}(F)$:

$$P_F(\lambda) = \left|\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & k & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1-k-\lambda \end{pmatrix}\right| = (-1-\lambda)\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & k & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-k-\lambda \end{pmatrix}\right| =$$

$$= (-1-\lambda)(1-k-\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-k) = (\lambda+1)(\lambda+k-1)(\lambda^2-\lambda-2-k).$$

Calcoliamo adesso le radici del polinomio caratteristico che corrispondono agli autovalori della matrice:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 1-k \qquad \lambda_3 = \frac{1+\sqrt{9+4k}}{2} \qquad \lambda_4 = \frac{1-\sqrt{9+4k}}{2}.$$

Innanzitutto notiamo che perché esistano almeno 4 autovalori reali, non necessariamente distinti, è necessario che $9+4k \geq 0 \iff k \geq -\frac{9}{4}$. Uguagliamo infine gli autovalori a due e due per domandarci per quale valore di $k$ essi hanno una molteplicità maggiore di 1. Supponiamo che:

- $\underline{\lambda_1 = \lambda_2.}$
  Allora in questo caso abbiamo che $-1 = -k+1$, cioè $k = 2$.
- $\underline{\lambda_1 = \lambda_3 \text{ o } \lambda_1 = \lambda_4.}$
  In questo caso abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1 \pm \sqrt{9+4k}}{2} = -1 &\iff 1 \pm \sqrt{9+4k} = -2 \\ &\iff \pm\sqrt{9+4k} = -3 \\ &\iff 9+4k = 9 \iff k = 0. \end{aligned}$$

- $\underline{\lambda_2 = \lambda_3 \text{ o } \lambda_2 = \lambda_4.}$
  In questo caso, otteniamo che

$$\begin{aligned} \frac{1 \pm \sqrt{9+4k}}{2} = 1-k &\iff 1 \pm \sqrt{9+4k} = 2-2k \\ &\iff \pm\sqrt{9+4k} = 1-2k \\ &\iff 9+4k = 1+4k^2-4k \\ &\iff 4k^2-8k-8 = 0 \\ &\iff k = 1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

- $\underline{\lambda_3 = \lambda_4.}$

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{9+4k}}{2} = \frac{1-\sqrt{9+4k}}{2} \\ &\iff 1+\sqrt{9+4k} = 1-\sqrt{9+4k} \\ &\iff 9+4k = 0 \iff k = -\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Riassumiamo tutti i risultati ottenuti.

- $\underline{k < -\frac{9}{4}.}$

| Autovalori | Molteplicità algebrica |
|---|---|
| $\lambda_1 = -1$ | 1 |
| $\lambda_2 = 1 - k$ | 1 |

- $\underline{k = -\frac{9}{4}.}$

| Autovalori | Molteplicità algebrica |
|---|---|
| $\lambda_1 = -1$ | 1 |
| $\lambda_2 = \frac{13}{4}$ | 1 |
| $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ | 2 |

- $\underline{k = 0.}$

| Autovalori | Molteplicità algebrica |
|---|---|
| $\lambda_1 = -1$ | 2 |
| $\lambda_2 = 1$ | 1 |
| $\lambda_3 = 2$ | 1 |

- $\underline{k = 2.}$

| Autovalori | Molteplicità algebrica |
|---|---|
| $\lambda_1 = -1$ | 2 |
| $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ | 1 |
| $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ | 1 |

- $\underline{k = 1 + \sqrt{3}.}$

| Autovalori | Molteplicità algebrica |
|---|---|
| $\lambda_1 = -1$ | 1 |
| $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ | 2 |
| $\lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$ | 1 |

- $\underline{k = 1 - \sqrt{3}.}$

| Autovalori | Molteplicità algebrica |
|---|---|
| $\lambda_1 = -1$ | 1 |
| $\lambda_2 = \sqrt{3}$ | 2 |
| $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$ | 1 |

- $\underline{k > -\frac{9}{4} \wedge k \neq 0 \wedge k \neq 2 \wedge k \neq 1 \pm \sqrt{3}.}$

| Autovalori | Molteplicità algebrica |
|---|---|
| $\lambda_1 = -1$ | 1 |
| $\lambda_2 = 1 - k$ | 1 |
| $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{9+4k}}{2}$ | 1 |
| $\lambda_4 = \frac{1-\sqrt{9+4k}}{2}$ | 1 |

(iii)
- $\underline{k_1 = -6}$
  In questo caso, $k_1 < -\frac{9}{4}$, quindi esistono solo due autovalori reali, che non sono sufficienti per diagonalizzare una matrice definita su $\mathbb{R}^4$, quindi la matrice NON è diagonalizzabile.
- $\underline{k_2 = 0}$
  In questo caso, abbiamo tre autovalori distinti, di cui quello relativo a $\lambda = -1$ di molteplicità algebrica 2, quindi affinchè la matrice sia diagonalizzabile è necessario che la dimensione dell'autospazio relativo a questo autovalore, cioè la molteplicità geometrica, sia uguale a 2. Calcoliamo quindi il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

  ma questo risulta evidentemente essere 3, quindi la dimensione dell'autospazio $V_1(F)$ è $4 - 3 = 1$ e perciò la matrice NON è diagonalizzabile.
- $\underline{k_3 = -2}$
  Questo valore di $k_3$ dà origine, secondo quanto visto nel punto precedente, a 4 autovalori distinti ognuno di molteplicità algebrica 1, quindi sappiamo che la molteplicità geometrica di ognuno di questi autovalori è automaticamente 1 e quindi la matrice è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'esercizio 3** (i) **Primo Metodo**

Troviamo per prima cosa i vettori della giacitura del piano $\pi$ passando a coordinate parametriche.

$$\begin{cases} x = -2 - w + 2z - y \\ 6 - 3w + 6z - 3y + 3y + 2z - w - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -y \\ w = 2z - 2, \end{cases}$$

quindi le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = -u \\ y = u \\ z = v \\ w = -2 + 2v \end{cases}$$

e da queste equazioni si vede che il punto $C(0, 0, 1, 0) \in \pi$ e che

$$\text{Giac}(\pi) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Mentre per quanto riguarda la giacitura di $r$, essa è generata dal vettore $\text{Giac}(r) = \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Quindi per trovare $\Lambda$ imponiamo che sia nullo il determinante della seguente matrice, data dalle tre giaciture e da un generico vettore passante per il punto $C$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 & w \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} y & z-1 & w \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & z-1 & w \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 20 \end{vmatrix} = 0$$
$$2(z-1) - w + 3y - 2z + 2 + w + 3x = 0$$
$$x + y = 0.$$

Quindi l'equazione cartesiana di $\Lambda$ è $x + y = 0$.

**Secondo Metodo**

Consideriamo il fascio di iperpiani passanti per il piano $\pi$: questo è uguale a

$$\lambda(x + y - 2z + w + 2) + \mu(3x + 3y + 2z - w - 2) = 0,$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi riscrivere l'equazione precedente come

$$(\lambda + 3\mu)x + (\lambda + 3\mu)y + (-2\lambda + 2\mu)z + (\lambda - \mu)w + (2\lambda - 2\mu) = 0.$$

La direzione della retta $r$ sarà data da $\text{Giac}(r) = \langle \overrightarrow{AB} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$, quindi sappiamo che questo vettore è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione del fascio di iperpiani e sostituendo otteniamo che

$$\lambda + 3\mu - \lambda - 3\mu - 3\lambda + 3\mu = -3\lambda + 3\mu = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu.$$

Allora l'iperpiano cercato avrà equazione cartesiana

$$x + y - 2z + w + 2 + 3x + 3y + 2z - w - 2 = 4x + 4y = 0 \Longrightarrow x + y = 0.$$

(ii) **Primo Metodo**

Per trovare la distanza minima tra i due spazi, possiamo considerare la retta $s$ perpendicolare alla retta $r$ e perpendicolare al piano $\pi$ e trovare quali sono i due punti che vengono intersecati da $s$ sui due spazi $r$ e $\pi$. La distanza tra questi due punti sarà la distanza minima tra $\pi$ ed $r$. Quindi, troviamo la giacitura della retta $s$, perpendicolare a $\pi$ ed $r$, imponendo che $\text{Giac}(s) \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$, cioè è un vettore che soddisfa le equazioni

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ z + 2w = 0 \\ x - y - 3w = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \\ w = 0, \end{cases}$$

quindi $\mathrm{Giac}(s) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Adesso prendiamo un punto $P$ generico sulla retta $r$ che interseca la retta $s$, perciò esiste un $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che:

$$P : \begin{cases} x = 1 + \bar{t} \\ y = -\bar{t} \\ z = 0 \\ w = -3\bar{t} \end{cases}$$

e costruiamo tramite il parametro $k$, l'equazione parametrica di $s$, usando come punto della retta $s$ il punto $P$:

$$s : \begin{cases} x = 1 + \bar{t} + k \\ y = -\bar{t} + k \\ z = 0 \\ w = -3\bar{t}. \end{cases}$$

Adesso cerchiamo l'intersezione tra $s$ e il piano $\pi$, imponendo che soddisfi le equazioni cartesiane di $\pi$ e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} 1 + \bar{t} + k - \bar{t} + k = 0 \\ -3\bar{t} = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 + 2k = 0 \\ -3\bar{t} = -2, \end{cases}$$

che dà come soluzioni $k = -\frac{1}{2}$ e $\bar{t} = \frac{2}{3}$. Quindi il punto $P$ su $r$ cercato è $P\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0, -2\right)$, mentre il punto su $\pi$ è $Q\left(\frac{7}{6}, -\frac{7}{6}, 0, -2\right)$ e la loro distanza

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + \frac{7}{6}\right)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Secondo Metodo**

L'iperpiano $\Lambda$ è parallelo alla retta $r$ e contiene $\pi$. Dalla condizione di parallelismo segue che ogni punto dell'iperpiano $\Lambda$ ha la stessa distanza dalla retta $r$, quindi anche tutti i punti del piano $\pi$ (che sono contenuti in $\Lambda$), possiederanno tale distanza.
Allora

$$d(r,\pi) = d(r,\Lambda) = d(A,\Lambda) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(iii) Iniziamo scrivendo l'equazione cartesiana della retta $r$, che è data da

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 0 \\ w = -3t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -y + 1 \\ z = 0 \\ w = 3y \end{cases}.$$

Da questa possiamo ricavare l'equazione di $\mathbb{R}$ omogeneizzando le equazioni appena scritte

$$R : \begin{cases} x_1 = x_0 - x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3x_2 \end{cases},$$

allo stesso modo ricaviamo le equazioni di $\Pi$

$$\Pi : \begin{cases} 2x_0 + x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_0 + 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_0 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} .$$

Per ricavare $\Pi \cap R$ basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_0 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = x_0 - x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3x_2 \end{cases}$$

che facilmente si vede avere unica soluzione $(0,0,0,0,0) \notin \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$. Dalla formula di Grassman abbiamo direttamente che il più piccolo spazio contenente $\Pi$ e $R$ avrà dimensione

$$\dim L(\Pi, R) = \dim \pi + \dim R - \dim(\pi \cap R) = 2 + 1 - (-1) = 4$$

e di conseguenza lo spazio cercato sarà $\mathbb{P}^4$ stesso.

**Soluzione dell'esercizio 4** (i) La matrice associata alla quadrica è data da

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha determinante non nullo come la sua sottomatrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo quindi gli autovettori di $A$ per portare la quadrica in forma canonica, abbiamo che

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-8-\lambda)(4-\lambda)((3-\lambda)^3 - 1) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2)(\lambda + 8)$$

e di conseguenza gli autovalori di $A$ sono $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -8$ mentre per quanto riguarda gli autovettori:

($\lambda_1$)

$$A - \lambda_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

di conseguenza $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (che notiamo già essere ortogonali tra loro).

($\lambda_2$)

$$A - \lambda_2 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

di conseguenza $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(\lambda_3)$

$$A-\lambda_3\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\Longrightarrow\begin{cases}x_1=0\\5x_2-x_3=0\\-x_2+5x_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

di conseguenza $v_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Abbiamo quindi che la matrice associata agli autovettori (normalizzati) è data da

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$$

e di conseguenza l'isometria che porta in forma canonica sarà data dalla traformazione associata a $M^t$, mentre la sua forma canonica è data da

$$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2=1.$$

(ii) Sostituendo l'equazione del piano della quadrica otteniamo la quadrica di equazioni

$$\begin{cases}y+z=2\\x^2+2y^2-4y+1=0\end{cases}$$

. Chiaramente per classificare la conica in tale piano basta studiare la seconda equazione che la definisce. La matrice ad essa associata è data da

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$$

che ha e autovalori $\mu_1=1$, $\mu_2=\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})$, $\mu_3=\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})$. Da questo deduciamo che ci troviamo di fronte ad un'ellissi a valori reali. Per quanto riguarda le intersezioni affini con la conica $\mathcal{C}$ invece abbiamo banalmente che non ve ne sono (basta notare che la differenza tra i due polinomi che definiscono le coniche è una costante).

(iii) Possiamo subito verificare che la curva in questione non ha nessun punto sulla retta $x_0=0$ eccetto $Q_\infty=[0,0,1]$, e quindi possiamo deomogenizzare rispetto a tale coordinata per studiare i punti singolari della curva, ottenendo la sua traccia affine di equazione $\mathcal{D}: f=x^5+x^2y-y^2=0$. Se calcoliamo le derivate rispetto alle variabili affini

$$\frac{\partial f}{\partial x}=5x^4+2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-2y$$

otteniamo che $P_1=\mathcal{O}=(0,0)$ è chiaramente un punto singolare. Cerchiamo se ci sono altri punti singolari in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ annullando le due derivate. Dalla seconda derivata otteniamo $x^2=2y$ che, lavorando nel campo reale, ci impone la condizione $y\geq 0$. Andando a sostituire tale condizione nella derivata rispetto alla prima variabile otteniamo $5x^4+x^3=x^3(5x+1)=0$, che ha come soluzioni $x=0$ (già considerato) e $x=-\frac{1}{5}$. Questa seconda condizione ci porta alla soluzione $y=\frac{1}{50}$. Abbiamo quindi che il secondo punto candidato ad essere singolare è $P_2=(-\frac{1}{5},\frac{1}{50})$ che però non appartiene alla curva. Per trovare la molteplicità di $P_1$ basta notare che la forma di grado minimo del polinomio che definisce la curva ha grado 2, quindi $P_1$ è punto doppio e la sua unica tangente principale è data da $y = 0$. Calcoliamo la molteplicità di intersezione della tangente in $P_1$

$$f(t, 0) = t^5 = 0$$

di conseguenza $I(\mathcal{D}, y = 0, P_1) = 5$ e il punto è una cuspide ordinaria.

Studiamo ora la curva in $Q_\infty$ deomogenizzando rispetto a $x_2$, e considerando le variabili $y_1 = \frac{x_0}{x_2}$ e $y_2 = \frac{x_1}{x_2}$. $\mathbb{Q}_\infty$ corrisponderà all'origine e la curva avrà equazione affine

$$\hat{f}(y_1, y_2) = y_2^5 + y_1^2 y_2^2 - y_1^3 = 0.$$

Analogamente a quanto detto in precedenza avremo che quindi $Q_\infty$ sarà punto triplo e la sua unica tangente principale sarà $y_1 = 0$ (e quindi $x_0 = 0$ riportata al proiettivo). La molteplicità di intersezione tra tale retta e la curva si calcolerà come la molteplicità come radice di 0 in

$$\hat{f}(0, t) = t^5 = 0$$

e quindi sarà uguale a 5.

**Soluzione dell'esercizio 5**

L'annullamento e la simmetria sono ovvie dalla definizione. Bisogna dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i tre punti sono sulla semiretta verticale con origine sull'asse $x$ la funzione $d$ coincide con la distanza euclidea ristretta ai punti della semiretta (la cosa è ovvia dalla definizione di $d$) e quindi la disuguaglianza triangolare vale. Se tutti e tre i punti $P_i = (x_i, y_i)$ sono su semirette diverse si ha

$$d(P_1, P_3) = |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_1| \leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare tra i reali abbiamo $|x_3 - x_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2|$ da cui deduciamo

$$d(P_1, P_3) =\leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1| + |x_2 - x_1| = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Il caso in cui due punti sono sulla stessa semiretta e il terzo no si analizza in modo analogo.

Si consideri la palla aperta $B = B_r(O)$ di centro l'origine e raggio $r$. I punti della semiretta verticale passante per l'origine che appartengono a $B$ sono tutti e soli quelli con ordinata minore di $r$. Se invece consideriamo la semiretta verticale con i punti di ascissa $x_0$, abbiamo che un punto $P = (x_0, y_0)$ sulla semiretta appartiene a $B$ se e solo se $|x_0| + |y_0| < r$. Da questo si deduce che $B$ coincide con il triangolo con vertici $(-r, 0), (r, 0)$ e $(0, r)$ (i punti sui lati obliqui non sono nella palla). Sia ora $B$ la palla di centro $P = (0, 1)$ e raggio $r$. Supponiamo inizialmente $r \leq 1$. Un punto $Q = (x_0, y_0) \neq P$ che non sta sulla semiretta per $(0, 1)$ ha distanza da P uguale a $1 + |y_0| + |x_0|$ quindi non potrà mai appartenere a $B$. Per $r \leq 1$ si ha quindi che $B = \{0\} \times (1 - r, r + r)$. Supponiamo ora $r > 1$. Mostriamo che $B = B_r((0, 1)) = B_{r-1}((0, 0)) \cup (\{0\} \times [0, 1 + r))$. Che tutti i punti di $\{0\} \times [0, 1 + r))$ appartengano a $B$ e che questi sono tutti e soli quelli della semiretta per $P$ è chiaro. Se un punto $Q = (x_0, y_0)$ su un'altra semiretta appartiene a $B$ allora $|x_0| + |y_1| + 1 < r$ e quindi

$$|x_0| + |y_1| < r - 1$$

che sono proprio i punti di $B_{r-1}((0, 0))$.

Dimostriamo che la successione $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy (e quindi non può avere limite). Supponiamo per assurdo che sia di Cauchy. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > N$ si ha $d(P_n, P_m) < 1/2$. Per $n \neq m$ si ha che $P_n$ e $P_m$ sono su due semirette verticali distinte quindi

$$1/2 > d(P_n, P_m) = |1/n - 1/m| + |1| + |1| = 2 + |1/n - 1/m| > 2$$

che è assurdo. Di conseguenza la successione non è di Cauchy e non può avere limite in $(X, d)$. La successione $Q_n$ ha invece limite: il punto $(1, 0)$. Per dire che ha limite basta osservare che è contenuta in una semiretta per l'origine sulla quale abbiamo dimostrato che la distanza è quella euclidea.

Essendo $(X, \tau)$ uno spazio topologico metrizzabile si ha che è $T_2$. Non è compatto infatti la collezione di palle aperte

$$\{B_n(O)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti.

**Soluzione dell'esercizio 6**

Si veda la soluzione dell'esercizio 4.