Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2020/2021

17 Febbraio 2022

Esercizio 1. Si considerino le seguenti quaterne di punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$P_1 = [1:0:0], \quad P_2 = [0:1:-1], \quad P_3 = [0:0:1], \quad P_4 = [1:-1:2];$$

$$Q_1 = [3:1:-1], \quad Q_2 = [1:3:-3], \quad Q_3 = [-1:1:3], \quad Q_4 = [1:-1:5].$$

(1) Si costruisca, se esiste, una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

(2) Per un'eventuale proiettività φ trovata al punto precedente, studiarne i punti fissi e provare che essi sono un punto P e una retta r tale che $P \notin r$.

(3) Sia s una retta passante per P e sia $Q = r \cap s$. Descrivere le coordinate di Q al variare di s nel fascio delle rette passanti per P.

Esercizio 2. Si consideri la curva algebrica $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ data dall'equazione

$$f(x,y) = x^3(x^2 + a) + y(x^3 - x^2y + by + c) = 0$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calcolare:

(1) La molteplicità del punto $O = (0,0)$ e le tangenti principali a $\mathcal{C}$ in O al variare dei parametri.

(2) I punti impropri e gli asintoti di $\mathcal{C}$.

(3) I valori a, b, c tali che $Q = (0,2)$ sia un punto singolare di $\mathcal{C}$ e, per tali valori, la molteplicità di Q in $\mathcal{C}$.

Soluzione Esercizio 1. (1) Per prima cosa proviamo che i punti P_1, P_2, P_3, P_4 e Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 formano dei riferimenti proiettivi in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. La retta per P_1 o P_2, che indichiamo con $r(P_1, P_2)$, è data dall'equazione $x_1 + x_2 = 0$ e non contiene P_3 o P_4. D'altra parte la retta $r(P_3, P_4)$ è data dall'equazione $x_0 + x_1 = 0$, che non contiene P_1 e P_2. A questo punto, se supponiamo che la retta tra P_1 e P_3 contenga uno degli altri due punti, allora deve coincidere con $r(P_1, P_2)$ o con $r(P_3, P_4)$, ma questo è impossibile per costruzione. L'argomento precedente si generalizza alle altre combinazioni di punti, quindi P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale e formano un riferimento proiettivo.

Nello stesso modo si dimostra che Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 formano un altro riferimento proiettivo in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Quindi una proiettività φ esiste!

Cerchiamo una base v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $P_i = [v_i]$ per $i = 1, 2, 3$ e $P_4 = [v_1 + v_2 + v_3]$. Riscriviamo

$$P_1 = [\lambda : 0 : 0], \quad P_2 = [0 : \mu : -\mu], \quad P_3 = [0 : 0 : \tau], \quad P_4 = [\sigma : -\sigma : 2\sigma],$$

da cui imponiamo che debba valere

$$\begin{cases} \lambda = \sigma \\ \mu = -\sigma \\ -\mu + \tau = 2\sigma \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \lambda = \sigma \\ \mu = -\sigma \\ \tau = \sigma \end{cases} .$$

Scegliendo $\sigma = 1$ otteniamo

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, -1, 1), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Di nuovo, cerchiamo una base w_1, w_2, w_3 di $\mathbb{R}^3$ tale che $Q_i = [w_i]$ per $i = 1, 2, 3$ e $Q_4 = [w_1 + w_2 + w_3]$. Abbiamo

$$Q_1 = [3\lambda : \lambda : -\lambda], \quad Q_2 = [\mu : 3\mu : -3\mu], \quad Q_3 = [-\tau : \tau : 3\tau], \quad Q_4 = [\sigma : -\sigma : 5\sigma]$$

e imponiamo che valgano

$$\begin{cases} 3\lambda + \mu - \tau = \sigma \\ \lambda + 3\mu + \tau = -\sigma \\ -\lambda - 3\mu + 3\tau = 5\sigma \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \tau = \lambda \\ \sigma = \lambda \end{cases}$$

Scegliamo $\lambda = 1$ e otteniamo i vettori

$$w_1 = (3, 1, -1), \quad w_2 = (-1, -3, 3), \quad w_3 = (-1, 1, 3).$$

A questo punto cerchiamo una trasformazione lineare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$. A questa trasformazione sarà associata una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

che vogliamo determinare, a meno di una costante moltiplicativa, per costruire φ. Le condizioni

$\varphi(v_1) = w_1$ e $\varphi(v_3) = w_3$ diventano, rispettivmente,

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\f\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Rimane da far valere la condizione $\varphi(v_2) = w_2$ che si traduce in

$$A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & b & -1\\1 & e & 1\\-1 & h & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b-1\\-e+1\\-h+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad b = h = 0, e = 4.$$

Finalmente otteniamo la matrice A che ci dà la proiettività φ che cerchiamo:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\1 & 4 & 1\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi[x_0 : x_1 : x_2] = [3x_0 - x_2 : x_0 + 4x_1 + x_2 : -x_0 + 3x_2].$$

(2) Per trovare i punti fissi di φ, dobbiamo guardare agli autovettori della matrice A trovata al punto precedente. Troviamo il polinomio caratteristico di A:

$$\det A - t\mathrm{Id} = \det\begin{pmatrix}3-t & 0 & -1\\1 & 4-t & 1\\-1 & 0 & 3-t\end{pmatrix} = (3-t)^2(4-t) - (4-t) = (4-t)^2(2-t).$$

Per $t = 2$, un autovettore è dato dall'equazione

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases}v_1 = v_3\\v_2 = -v_3\end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad P = [1 : -1 : 1].$$

Per $t = 4$, avremo l'equazione

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\1 & 0 & 1\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 + v_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r = \{x_0 + x_2 = 0\}.$$

È immediato verificare che $P \notin r$ come richiesto.

(3) Per trovare l'equazione del fascio di rette passante per P ci servono per prima cosa le equazioni di due rette distinte passanti per P, ad esempio

$$x_0 + x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 = 0.$$

Allora il fascio di rette si può descrivere attraverso l'equazione

$$\lambda(x_0 + x_1) + \mu(x_1 + x_2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda x_0 + (\lambda + \mu)x_1 + \mu x_2 = 0, \quad [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

A questo punto Q è dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases}\lambda x_0 + (\lambda + \mu)x_1 + \mu x_2 = 0\\x_0 + x_2 = 0\end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases}x_2 = -x_0\\(\lambda + \mu)x_1 = (\mu - \lambda)x_0\end{cases}.$$

Procediamo per casi. Se $[\lambda : \mu] = [1 : 1]$, allora otteniamo il punto $Q = [1 : 0 : -1]$. D'altra parte, se $\lambda \neq \mu$, allora avremo

$$Q = \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu-\lambda} : 1 : \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right] = [\lambda+\mu : \lambda-\mu : -\lambda-\mu]. \qquad \square$$

Notiamo che l'ultima scrittura di Q comprende anche il caso precedente.

Soluzione Esercizio 2. (1) Per prima cosa riscriviamo i monomi di f:

$$f(x,y) = cy + by^2 + ax^3 - x^2y(x-y) + x^5.$$

In questo modo possiamo descrivere la molteplicità di O al variare di a, b, c. Se $c \neq 0$, allora O è un punto semplice con tangente $y = 0$.

Se $c = 0$ e $b \neq 0$, allora O è un punto doppio con un'unica tangente principale $y = 0$, contata due volte (ottenuta fattorizzando la parte omogenea di grado minimo di f).

Ancora, se $c = b = 0$ e $a \neq 0$, segue che O è un punto triplo con tangente principale $x = 0$ contata tre volte.

In ultimo, se $a = b = c = 0$, allora O è un punto quadruplo e le sue tangenti principali sono date dai fattori lineari di $x^2y(x-y)$ per cui otteniamo le rette

$$x = 0 \text{ (contata due volte)} \quad \text{e} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad x = y.$$

(2) Per prima cosa scriviamo la chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ della curva:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^3(x_1^2 + ax_0^2) + x_0x_2(x_1^3 - x_1^2x_2 + bx_0^2x_2 + cx_0^3) = 0.$$

I punti impropri di $\mathcal{C}$ si ottengono intersecando $\overline{\mathcal{C}}$ con la retta $x_0 = 0$, per cui saranno i punti della forma $[0 : x_1 : x_2]$ che risolvono l'equazione $x_1^5 = 0$, da cui troviamo solo il punto $P = [0 : 0 : 1]$. A questo punto gli asintoti di $\mathcal{C}$ sono dati dalle tangenti principali a P nella carta $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ (in questa carta usiamo le coordinate $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$). Visto che P vive nella carta $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ (e possiamo supporre senza problemi $x_2 = 1$), qui l'equazione della curva diventa

$$F(x_0, x_1, 1) = x_1^3(x_1^2 + ax_0^2) + x_0(x_1^3 - x_1^2 + bx_0^2 + cx_0^3) = 0.$$

Le tangenti principali saranno date dalla fattorizzazione della parte omogenea di grado minimo, $x_0(bx_0^2 - x_1^2)$, da cui segue che le tangenti principali sono:

- Se $b = 0$, allora $x_0 = 0$ (che è la retta all'infinito, quindi non può essere un asintoto) oppure $x_1 = 0$ contato due volte, che diventa l'asintoto $x = 0$ nella carta U_0.
- Se $b \neq 0$, allora le tre tangenti principali sono $x_0 = 0$ (che scartiamo ancora una volta), $x_1 = \pm x_0\sqrt{b}$, che diventano gli asintoti $x = \pm\sqrt{b}$ quando ci mettiamo nella carta U_0.

(3) Per richiedere che $Q = (0, 2)$ sia un punto singolare per $\mathcal{C}$, allora questo deve contemporaneamente appartenere a $\mathcal{C}$ ed essere soluzione di

$$\nabla f(x,y) = (3ax^2 - 3x^2y + 2xy^2 + 4x^4, c + 2by - x^3 + 2x^2y) = (0,0).$$

Inserendo le coordinate di Q otteniamo il sistema nelle variabili a, b, c:

$$\begin{cases} 2c + 4b = 0 \\ 0 = 0 \\ c + 4b = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad b = c = 0.$$

Per $b = c = 0$ la curva diventa

$$f(x, y) = x^3(x^2 + a) + x^2 y(x - y) = 0.$$

Per studiare la molteplicità di Q, dobbiamo per prima cosa operare una traslazione $\tau : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ data da $\tau(x, y) = (x, y + 2)$ in modo che $\tau(0, 0) = Q$. Allora $f(Q) = f(\tau(0, 0)) = g(0, 0)$ dove

$$g(x, y) = x^3(x^2 + a) + x^2(y + 2)(x - y - 2).$$

La parte omogenea di grado minimo di g è data da $-4x^2$, da cui segue che la molteplicità di $(0, 0)$ è 2, per cui $m_Q(\mathcal{C}) = 2$. $\square$