Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2015/2016
Appello di luglio 2016

Esercizio 1
Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f_a\big((x, y, z)\big) = (x + y + (a - 1)z, ax + 2y, x - 3y - z), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(i) Determinare per ogni $a \in \mathbb{R}$, i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f_a(v) = (0, -1, 9a - 3)$, e indicarne la dimensione come sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calcolare la matrice associata all'endomorfismo f_a^2 rispetto alla base canonica.

(iii) Determinare per quali valori di a l'endomorfismo f_a^2 è iniettivo e per quali è suriettivo.

(iv) Calcolare il rango di f_a^2 per $a = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ descritta dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare una base del sottospazio vettoriale $f(W)$ con

$$W = \big\langle (1, -1, 1, 1), (-2, 5, 4, 1), (0, 1, 2, 1) \big\rangle.$$

(ii) Determinare se f è diagonalizzabile. In caso affermativo, esibire una base diagonalizzante, altrimenti determinare la forma canonica di Jordan di f.

(iii) Calcolare il rango della matrice $(A - 2I_4)^n$ per ogni intero n positivo.

Esercizio 3

Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V = \mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ e delle relative coordinate ortonormali (x, y, z). Si consideri la forma quadratica

$$Q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2 - 4xz + 4yz$$

dove a è un parametro reale.

(i) Si scriva la matrice A che rappresenta Q nelle coordinate (x, y, z). Esiste un vettore $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ per cui $Q(x_0, y_0, z_0) = 4/3$? Si dica per quali valori di a è definita positiva.

(ii) Posto $a = -1$, si scrivano, se esistono, una matrice C ortonormale e una matrice Δ diagonale tali che $C^T AC = \Delta$. In caso negativo dimostrare che non esistono.

Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo reale su V. Posto $a = -1$, si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q} = \{P = (x, y, z) \,|\, Q(x, y, z) - 27 = 0\}.$$

(iii) Si scriva la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ e si dica di che tipo di quadrica si tratta.

Esercizio 4

Si consideri, sul piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ munito di un sistema di coordinate (x, y), la curva $\mathcal{C}$ di equazione

$$\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 + x^3 + x^2y^2 - xy^2 + y^4 = 0$$

e i punti $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 0)$ e $P_3 = (-1, 0)$.

(i) Si ricavino le molteplicità $m_{P_i}(\mathcal{C})$ di P_i per la curva $\mathcal{C}$ e le tangenti principali a $\mathcal{C}$ in P_2 e P_3;

(ii) Per ogni tangente t ricavata nel punto precedente si calcolino le intersezioni tra t e la curva e, in ogni punto di intersezione, la molteplicità di intersezione tra $\mathcal{C}$ e t;

(iii) Si dimostri che P_2 è l'unico punto singolare della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015

Appello di luglio 2016

Esercizio 5
Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V = \mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard e della base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ e delle relative coordinate ortonormali (x, y, z). Si consideri la forma quadratica

$$Q(xe_1 + ye_2 + ze_3) = Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2 - 4xz + 4yz$$

dove a è un parametro reale.

(i) Si scriva la matrice A che rappresenta Q nelle coordinate (x, y, z). Esiste un vettore $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ per cui $Q(x_0, y_0, z_0) = 4/3$? Si dica per quali valori di a è definita positiva.

(ii) Posto $a = -1$, si scrivano, se esistono, una matrice C ortonormale e una matrice Δ diagonale tali che $C^T AC = \Delta$. In caso negativo dimostrare che non esistono.

Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo reale su V. Posto $a = -1$, si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q} = \{P = (x, y, z) \,|\, Q(x, y, z) - 27 = 0\}.$$

(iii) Si scriva la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ e si dica di che tipo di quadrica si tratta.

Esercizio 6
Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$ e si consideri la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, se $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in X$ sono sulla stessa retta verticale allora $d(P, Q) = |y_Q - y_P|$ mentre in caso contrario si ha $d(P, Q) = |y_P| + |y_Q| + |x_P - x_Q|$.

(i) Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico e che su ogni semiretta verticale la distanza indotta è quella euclidea;

(ii) Descrivere le palle aperte di centro $(0, 0)$ e $(0, 1)$;

(iii) Si considerino le successioni $(P_n)_{n\geq 1}$ e $(Q_n)_{n\geq 1}$ con $P_n = (1/n, 1)$ e $Q_n = (1, 1/n)$. Si dica se le successioni convergono in (X, d);

(iv) Chiamando τ la topologia definita dalla metrica, dire se (X, τ) è T_2 e compatto.

Soluzione dell'esercizio 1

Il punto i) richiede di risolvere un sistema lineare dipendente dal parametro a. Operiamo un'eliminazione di Gauss-Jordan sulla matrice completa associata.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 & 0 \\ a & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 9a-3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 2-a & -a^2+a & -1 \\ 0 & -4 & -a & 9a-3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & a & 3-9a \\ 0 & 4(2-a) & -4a^2+4a & -4 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & a & 3-9a \\ 0 & 0 & -a(3a-2) & -9a^2+21a-10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & a & 3-9a \\ 0 & 0 & a(3a-2) & (3a-5)(3a-2) \end{pmatrix}$$

Ne seguono 3 casi.

Se $a = 0$ allora la matrice dei coefficienti ha rango 2 mentre quella completa ha rango 3, per cui il sistema non ha soluzione e quindi $f_0^{-1}(0, -1, -3)$ è vuoto.

Se $a = \frac{2}{3}$ allora entrambe le matrici hanno rango 2 e quindi $f_{\frac{2}{3}}^{-1}(0, -1, 3)$ è una retta affine, e precisamente la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y - z/3 = 0 \\ 4y + \frac{2}{3}z = -3 \end{cases}$

Se $a \notin \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ posso dividere per $a(3a-2)$ e portare la matrice completa del sistema nella forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 4 & a & 3(1-3a) \\ 0 & 0 & 1 & 3-\frac{5}{a} \end{pmatrix}$$

calcolando la cui unica soluzione troviamo in questo caso il punto di coordinate $(x, y, z) = (6 - \frac{5}{a}, 2 - 3a, 3 - \frac{5}{a})$.

ii):

$$\begin{pmatrix} 2a & -3a+6 & 0 \\ 3a & a+4 & a^2-a \\ -3a & -2 & a \end{pmatrix}$$

iii) f_a^2 è un applicazione lineare tra due spazi della stessa dimensione e quindi è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è invertibile. Inoltre la composizione di due endomorfismi è invertibile se e solo se lo sono entrambi e quindi f_a^2 è invertibile se e solo se lo è f_a, cioé se e solo se la matrice dei coefficienti del sistema lineare appena risolto ha rango 3.

Quindi f_a^2 è è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se $a \notin \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$.

iv) Il rango di $f_{\frac{2}{3}}$ è 2 per il calcolo al punto i), quindi il rango di $f_{\frac{2}{3}}^2$ è al più 2. D'altronde la matrice di $f_{\frac{2}{3}}^2$, sostituendo nella soluzione del punto ii), è

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 4 & 0 \\ 2 & 4+\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ -2 & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

le cui prime due righe sono ovviamente indipendenti, quindi il rango di $f_{\frac{2}{3}}^2$ è 2.

Soluzione dell'esercizio 2
Calcolo il polinomio caratteristico dell matrice data

$$\det\begin{pmatrix} 2-T & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3-T & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1-T & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-T \end{pmatrix} = (2-T)(-1-T)[(3-T)(1-T)+1] =$$

$$= (T-2)(T+1)(T^2-4T+4) = (T+1)(T-2)^3.$$

i) I tre vettori dati sono linearmente dipendenti in quanto

$$2(1,-1,1,1)+(-2,5,4,1) = 3(0,1,2,1).$$

Inoltre il primo e l'ultimo (per esempio) sono evidentemente non proporzionali, e quindi formano una base di W. Dal momento che, essendo non nullo il termine noto del polinomio caratteristico, l'applicazione f è invertibile, deduco che le immagini di tali due vettori, ossia $(0,-4,-5,0)$ e $(0,2,4,2)$, formano una base di $f(W)$.

ii) Il polinomio caratteristico appena calcolato ci dice che gli autovalori sono -1, con molteplicità algebrica 1, e 2 con molteplicità algebrica 3. Quindi la molteplicità geometrica del primo è sicuramente 1, e per determinare la diagonalizzabilità ci resta da determinare se la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è anch'essa uguale a 3 o meno. Calcolando

$$A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

deduciamo immediatamente che ha rango almeno 2 in quanto il minore centrale vale $1\cdot(-3)-0\cdot 5 \neq 0$. Quindi m.g.$(2) \leq 4-2 = 2$ e la matrice non è diagonalizzabile.

In effetti il rango di $A-2I$ è proprio 2: per dimostrarlo basta ora far vedere, per esempio, che le colonne generano una spazio di dimensione al massimo 2, il che si può dedurre dal fatto che la prima è nulla, ed è nulla anche la somma tra la seconda, il doppio della terza e la quarta.

L'autovalore -1 ha molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1 e quindi impone un blocco di Jordan ad esso relativo di ordine 1.

L'autovalore 2 ha molteplicità geometrica uguale a 2 e quindi impone due blocchi di Jordan ad esso relativi. la somma degli ordini dei due blocchi è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore, quindi 3. Quindi i due blocchi hanno ordine rispettivo 1 e 2, e la forma di Jordan è la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

iii) La matrice di $(A-2I)^n$ rispetto alla base della forma di Jordan è $(J-2I)^n$:

$$J-2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J-2I)^2 = \begin{pmatrix} (-3)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

induttivamente

$$(J-2I)^n = (J-2I)^{n-1}(J-2I) \begin{pmatrix} (-3)^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il rango è sempre 2 per $n=1$, 1 altrimenti.

Soluzione dell'esercizio 3
La matrice che rappresenta Q rispetto alla base scelta è l'unica matrice simmetrica che permette di scrivere Q come $Q(x,y,z) = \underline{x}^T A \underline{x}$ ed è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

Dalla matrice o dall'espressione polinomiale della forma quadratica si vede che $Q(e_1) = 1$. Siccome Q è una forma quadratica e $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ basterà prendere $v = (2/\sqrt{3}) \cdot e_1$ per avere $Q(v) = 4/3$. Per vedere se A è definita positiva possiamo vedere quando i minori principali hanno tutti segno positivo. I minori principali sono

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = 1 \qquad m_3 = \det(A) = a - 8$$

quindi la matrice sarà definita positiva se e solo se $a - 8 > 0$ cioè se $a > 8$.

Indipendentemente dal valore di a, siccome A è reale e simmetrica le matrici C e Δ richieste esistono per il teorema spettrale reale. Inoltre, se $\{f_1, f_2, f_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ composta di autovettori di A allora possiamo porre $C = [f_1|f_2|f_3]$ e Δ la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di A (nell'ordine specificato dalla scelta della base). Ricaviamo gli autovalori di A dopo avere posto $a = -1$.

Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(t) = t^3 - t^2 - 9t + 9 = (t-1)(t+3)(t-3)$$

quindi gli autovalori saranno 1 e ± 3. Ricaviamo gli autovettori incominciando da quelli relativi a 1:

$$\begin{cases} x - 2z = x \\ y + 2z = y \\ -2x + 2y - z = z \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi una base l'autospazio V_1 è $(1,1,0)^T$. Per gli autovettori relativi a 3 avremo

$$\begin{cases} x - 2z = 3x \\ y + 2z = 3y \\ -2x + 2y - z = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x \\ z = y \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

quindi $V_3 = \langle(-1,1,1)\rangle$. Similmente si ottiene $V_{-3} = \langle(1,-1,2)\rangle$. Essendo 3 autovettori associati a 3 autovalori distinti sappiamo che sono ortogonali quindi ci basterà normalizzarli e inserirli come colonne della matrice C per ottenere una matrice ortogonale:

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6}. \end{bmatrix}.$$

La matrice Δ corrispondente sarà quindi la matrice diagonale con diagonale $(1, 3, -3)$.

Il luogo descritto dall'equazione $Q(x,y,z) - 27 = 0$ è una quadrica euclidea. Per quanto abbiamo appena mostrato esiste un'isometria di $\mathbb{E}^3$ che modifica il sistema di coordinate in modo che l'equazione di $\mathcal{Q}$ diventi

$$X^2 + 3Y^2 - 3Z^2 = 27.$$

Quindi la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ è la quadrica

$$\frac{X^2}{27} + \frac{Y^2}{9} - \frac{Z^2}{9} = 1$$

che rappresenta un iperboloide iperbolico.

Soluzione dell'esercizio 4
Se andiamo a sostituire le coordinate di P_i a f scopriamo che $f(1,0) \neq 0$, mentre $f(0,0) = f(-1,0) = 0$ quindi $P_1 \notin \mathcal{C}$. In particolare $m_{P_1}(\mathcal{C}) = 0$.

Per ricavare la molteplicità di $P_2 = (0,0)$ ci basta osservare che il monomio di grado minimo di f ha grado 3. Si ha quindi che P_2 è un punto singolare della quartica e vale $m_{P_2}(\mathcal{C}) = 3$. Inoltre, siccome

$$f(x,y) = (x^3 - xy^2) + p_4(x,y)$$

con p_4 omogeneo di grado 4, abbiamo che le tangenti principali in P_2 alla curva sono

$$l_1 : x = 0 \quad l_2 : y - x = 0 \quad l_3 : y + x = 0.$$

In particolare, P_2 è un punto triplo ordinario.

Per ricavare $m_{P_3}(\mathcal{C})$ possiamo effettuare un'affinità che porti P_3 nell'origine e poi ragionare come per P_2 ma, almeno in questo caso, conviene prima verificare se è singolare o meno per la quartica. Abbiamo infatti

$$\nabla(f)|_{P_3} = (4x^3 + 3x^2 + 2xy^2 - y^2, 2x^2y - 2xy + 4y^3)|_{P_3} = (7,0).$$

Siccome non è nullo (da cui si ha che il punto non è singolare e $m_{P_3}(\mathcal{C}) = 1$) possiamo anche dire che la tangente alla curva in P_3 ha equazione cartesiana

$$T : x = -1.$$

Partiamo dalla molteplicità di intersezione tra questa retta e la curva in P_3. Una parametrizzazione è data da $x = -1, y = t$ e, andando a sostituire nell'equazione della curva, abbiamo

$$f(-1,t) = t^4 + 2t^2$$

che si annulla al second'ordine in $t = 0$, il valore del parametro che corrisponde a P_3. Abbiamo quindi

$$I(\mathcal{C}, T, P_3) = 2$$

per cui P_3 è un punto liscio e non è un flesso. Procedendo in modo analogo per l_1, l_2 e l_3 abbiamo rispettivamente

$$f(0,t) = t^4 \quad f(t,t) = 3t^4 \quad f(t,-t) = 3t^4$$

per cui

$$I(\mathcal{C}, l_1, P_2) = I(\mathcal{C}, l_2, P_2) = I(\mathcal{C}, l_3, P_2) = 4.$$

Possiamo quindi concludere che l_1, l_2 e l_3 non intersecano la curva in altri punti oltre a P_2 per il Teorema di Bezout, mentre T la taglia in almeno un altro punto. Il sistema per ricavare i punti di intersezione è $f(x,y) = x + 1 = 0$ che è equivalente a $x + 1 = f(-1,y) = 0$. Poichè

$$f(-1,y) = y^4 + 2y^2 = y^2(y^2 + 2)$$

avremo altri due punti di intersezione (i punti $(-1, \pm i\sqrt{2})$) e in questi punti la molteplicità di intersezione tra T e $\mathcal{C}$ sarà necessariamente 1.

Supponiamo che Q sia un punto singolare per la quartica diverso da P_2. Sia L la retta per P_2 e Q. Allora abbiamo

$$I(\mathcal{C}, L, P_2) \geq m_{P_2}(\mathcal{C}) = 3 \qquad I(\mathcal{C}, L, Q) \geq m_Q(\mathcal{C}) \geq 2$$

da cui deduciamo, per il teorema di Bezout (possiamo supporre che non vi siano punti di intersezione tra la quartica e la retta all'infinito pur di fare un cambio di coordinate),

$$4 = 4 \cdot 1 = \sum_{P \in \mathcal{C} \cap L} I(\mathcal{C}, L, P) \geq 3 + 2 = 5$$

che è assurdo: non possono esserci altri punti singolari oltre al punto triplo P_2.

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'esercizio 3.

Soluzione dell'esercizio 6
L'annullamento e la simmetria sono ovvie dalla definizione. Bisogna dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i tre punti sono sulla semiretta verticale con origine sull'asse x la funzione d coincide con la distanza euclidea ristretta ai punti della semiretta (la cosa è ovvia dalla definizione di d) e quindi la disuguaglianza triangolare vale. Se tutti e tre i punti $P_i = (x_i, y_i)$ sono su semirette diverse si ha

$$d(P_1, P_3) = |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_1| \leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare tra i reali abbiamo $|x_3 - x_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2|$ da cui deduciamo

$$d(P_1, P_3) =\leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1| + |x_2 - x_1| = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Il caso in cui due punti sono sulla stessa semiretta e il terzo no si analizza in modo analogo.

Si consideri la palla aperta $B = B_r(O)$ di centro l'origine e raggio r. I punti della semiretta verticale passante per l'origine che appartengono a B sono tutti e soli quelli con ordinata minore di r. Se invece consideriamo la semiretta verticale con i punti di ascissa x_0, abbiamo che un punto $P = (x_0, y_0)$ sulla semiretta appartiene a B se e solo se $|x_0| + |y_0| < r$. Da questo si deduce che B coincide con il triangolo con vertici $(-r, 0), (r, 0)$ e $(0, r)$ (i punti sui lati obliqui non sono nella palla). Sia ora B la palla di centro $P = (0, 1)$ e raggio r. Supponiamo inizialmente $r \leq 1$. Un punto $Q = (x_0, y_0) \neq P$ che non sta sulla semiretta per $(0, 1)$ ha distanza da P uguale a $1 + |y_0| + |x_0|$ quindi non potrà mai appartenere a B. Per $r \leq 1$ si ha quindi che $B = \{0\} \times (1 - r, r + r)$. Supponiamo ora $r > 1$. Mostriamo che $B = B_r((0, 1)) = B_{r-1}((0, 0)) \cup (\{0\} \times [0, 1 + r))$. Che tutti i punti di $\{0\} \times [0, 1 + r))$ appartengano a B e che questi sono tutti e soli quelli della semiretta per P è chiaro. Se un punto $Q = (x_0, y_0)$ su un'altra semiretta appartiene a B allora $|x_0| + |y_1| + 1 < r$ e quindi

$$|x_0| + |y_1| < r - 1$$

che sono proprio i punti di $B_{r-1}((0, 0))$.

Dimostriamo che la successione $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy (e quindi non può avere limite). Supponiamo per assurdo che sia di Cauchy. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > N$ si ha $d(P_n, P_m) < 1/2$. Per $n \neq m$ si ha che P_n e P_m sono su due semirette verticali distinte quindi

$$1/2 > d(P_n, P_m) = |1/n - 1/m| + |1| + |1| = 2 + |1/n - 1/m| > 2$$

che è assurdo. Di conseguenza la successione non è di Cauchy e non può avere limite in (X, d). La successione Q_n ha invece limite: il punto $(1, 0)$. Per dire che ha limite basta osservare che è contenuta in una semiretta per l'origine sulla quale abbiamo dimostrato che la distanza è quella euclidea.

Essendo (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile si ha che è T_2. Non è compatto infatti la collezione di palle aperte

$$\{B_n(O)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti.