Esame scritto di Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2013/2014
23 giugno 2014

Esercizio 1
Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino, al variare del parametro k, le rette proiettive di equazioni

$$r_k : x_0 + 2kx_1 + x_3 = x_2 - x_0 = 0 \qquad s : x_1 + x_0 = x_3 - x_1 = 0.$$

1) Per i valori di k per cui r_k e s sono incidenti determinare un piano che le contiene.

2) Per i valori di k per cui r_k e s sono sghembe determinare una retta t_k incidente a r_k e s e passante per $P = [1, 0, 0, 0]$.

3) Si dica per quali valori di k due delle seguenti quadriche sono proiettivamente equivalenti:

$$\mathcal{C}_1 : x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$
$$\mathcal{C}_2 : x_0^2 + 2x_1^2 - (4x_2 + x_3)^2 = 0$$
$$\mathcal{D}_k : x_0^2 - x_1^2 + (2k + 6)x_2^2 + x_3^2 + 2kx_0x_1 = 0$$

Esercizio 2
Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y). Si consideri, al variare di k, la matrice

$$A_k := \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -2k-2 & -k-1 \\ \hline -2k-2 & 5k-1 & 2 \\ -k-1 & 2 & 5k-4 \end{array}\right]$$

e la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione:

$$\mathcal{C}_k : \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} A_k \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

1) Sapendo che $\mathrm{Det}(A_k) = -25(k-1)^3$, classificare $\mathcal{C}_k$ per i valori di k per cui la conica è non degenere.

2) Sia k_0 un valore di k per cui $\mathcal{C}_k$ è una parabola. Scrivere la sua forma canonica affine e un'isometria che trasforma $\mathcal{C}_{k_0}$ nella sua forma canonica euclidea.

3) Ricavare l'equazione cartesiana (nelle coordinate (x, y)) dell'asse di simmetria di $\mathcal{C}_{k_0}$.

Esercizio 3
Siano A_1 e A_2 due insiemi qualsiasi. Si dice **unione disgiunta** di A_1 e A_2 l'insieme

$$A_1 \sqcup A_2 := (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\}) .$$

Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) due spazi topologici. Si chiama **unione disgiunta** di X e Y l'insieme $X \sqcup Y$ munito della topologia $\tau := \{U \sqcup V \,:\, U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$.

1) Verificare che τ è una topologia;

2) $X \sqcup Y$ non è mai connesso;

3) Dimostrare che se X e Y sono compatti anche $X \sqcup Y$ è compatto;

4) Dimostrare che se X e Y sono T_2, $X \sqcup Y$ è T_2.

Suggerimento: per ogni $A \neq \emptyset$ si ha $(A \times \emptyset) = \emptyset$ e $(A \sqcup \emptyset) \neq \emptyset$.

Esercizio 4
Si consideri $\mathbb{R}$ e la collezione

$$\tau = \{A_\epsilon \,|\, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

con

$$A_\epsilon = (-1-\epsilon, -1+\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1+\epsilon).$$

1) Dimostrare che $X := (\mathbb{R}, \tau)$ è uno spazio topologico;

2) Discutere compattezza, connessione e dire quali assiomi di separazione $(T_0, T_1, T_2, \dots)$ sono soddisfatti da X;

3) Si consideri $f : X \to X$ con $f(x) = x$ se $|x| < 1$ e $f(x) = -x$ se $|x| \geq 1$. f è un omeomorfismo?

Soluzione dell'esercizio 1

Due rette in $\mathbb{P}^3$ sono incidenti o sghembe e quello che discrimina in quale dei due casi siamo è il determinante della matrice ottenuta mettendo per righe i coefficienti delle 4 equazioni (2 per r_k e 2 per s) in gioco. Sia quindi A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di A è

$$\operatorname{Det}(A) = -\operatorname{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -(1-(2k+1)) = 2k$$

da cui deduciamo che r_k e s sono sghembe se e solo se $k \neq 0$.

Poniamo $k = 0$ per analizzare il caso in cui le due rette sono incidenti. Si ricava facilmente che il punto di intersezione tra r_0 e s è $[1, -1, 1, -1]$. Siccome x_1 (rispettivamente x_2) non compare nelle equazioni di r_0 (rispettivamente s), i punti $[0, 1, 0, 0]$ e $[0, 0, 1, 0]$ appartengono ciascuno a una delle due rette (ma non ad entrambe). Il piano che le contiene è quindi il piano identificato dall'equazione

$$0 = \operatorname{Det}\left(\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

cioè dall'equazione $x_0 + x_3 = 0$.

Supponiamo ora $k \neq 0$. Tra tutti i piani contententi s, i quali sono parametrizzati dal fascio

$$\lambda(x_0 + x_1) + \mu(x_3 - x_1) = 0$$

l'unico che passa per il punto P è quello per cui

$$\lambda(1) + \mu(0) = 0$$

cioè $\pi_1 : x_1 - x_3 = 0$. Il fascio di piani contenenti r_k è

$$\lambda(x_0 + 2kx_1 + x_3) + \mu(x_2 - x_0) = 0$$

da cui si ricava che il piano π_2 contenente r_k e passante per P è $\pi_2 : 2kx_1 + x_2 + x_3 = 0$. La retta t_k è l'intersezione dei due piani ricavati e quindi ha equazioni cartesiane

$$t_k : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ (2k+1)x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Notiamo prima di tutto che $\mathcal{C}_1$ è non degenere mentre $\mathcal{C}_2$ è degenere poichè la matrice associata ha rango 3. Quindi non possono essere proiettivamente equivalenti. Il polinomio caratteristico della matrice associata alla conica $\mathcal{D}_k$ è

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \sqrt{1+4k^2})(\lambda + \sqrt{1+4k^2})(\lambda - (2k+6))(\lambda - 1).$$

Quello che interessa è il segno degli autovalori.

[$k < -3$] Abbiamo 2 autovalori positivi e 2 negativi, quindi $\mathcal{D}_k$ e $\mathcal{C}_1$ sono proiettivamente equivalenti.

[$k = -3$] Abbiamo 2 autovalori positivi, uno negativo e uno nullo, quindi $\mathcal{D}_k$ e $\mathcal{C}_2$ sono proiettivamente equivalenti.

[$k > -3$] Abbiamo 3 autovalori positivi e uno negativo quindi $\mathcal{D}_k$ non può essere equivalente a $\mathcal{C}_1$ o a $\mathcal{C}_2$.

Soluzione dell'esercizio 2
La matrice associata alla conica $\mathcal{C}_k$ è

$$A_k := \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -2k-2 & -k-1 \\ \hline -2k-2 & 5k-1 & 2 \\ -k-1 & 2 & 5k-4 \end{array}\right]$$

mentre

$$B_k := \begin{bmatrix} 5k-1 & 2 \\ 2 & 5k-4 \end{bmatrix}$$

è la matrice dei termini quadratici.

Siccome $\mathrm{Det}(A_k) = -25(k-1)^3$, $\mathrm{Det}(B_k) = 25k(k-1)$ e $\mathrm{Tr}(B_k) = 5(2k-1)$ abbiamo i seguenti casi:

$k < 0$ Ellisse;

$k = 0$ Parabola;

$0 < k < 1$ Iperbole;

$k = 1$ Conica degenere;

$k > 1$ Ellisse.

Il valore che ci interessa analizzare è quindi $k_0 = 0$. Essendo $\mathcal{C}_0$ una parabola, la sua forma canonica affine è $y - x^2 = 0$. Riduciamo $\mathcal{C}_0$ a forma canonica euclidea. La matrice dei termini quadratici è

$$B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori 0 e -5. Due autovettori indipendenti sono

$$v_{-5} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad v_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

quindi possiamo considerare la matrice ortogonale speciale

$$M = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

che corrisponde a una rotazione del piano. Se cambiamo coordinate ruotando il sistema di riferimento utilizzando la rotazione R abbiamo che la relazione che intercorre tra le vecchie coordinate e le nuove è

$$R : \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(x - 2y) \\ y_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x + y) \end{cases}$$

e che l'espressione della conica $\mathcal{C}_0$ in queste coordinate è

$$\begin{aligned}
0 &= -x^2+4xy-4y^2-4x-2y+2 = \\
&= -\frac{1}{5}(x_1+2y_1)^2-\frac{4}{5}(-2x_1+y_1)^2+\frac{4}{5}(-2x_1^2+2y_1^2-3x_1y_1)-\frac{4\sqrt{5}}{5}(x_1+2y_1)-\frac{2\sqrt{5}}{5}(-2x_1+y_1)+2 = \\
&= -\frac{1}{5}(x_1^2+4y_1^2+16x_1^2+4y_1^2+8x_1^2-8y_1^2)-\frac{4\sqrt{5}}{5}(x_1+2y_1)-\frac{2\sqrt{5}}{5}(-2x_1+y_1)+2 = \\
&= -5x_1^2-\frac{10\sqrt{5}}{5}y_1+2
\end{aligned}$$

La conica è quasi ridotta in forma canonica infatti possiamo raccogliere come segue i termini:

$$\begin{aligned}
0 = -x^2+4xy-4y^2-4x-2y+2 = [...] = -5x_1^2-2\sqrt{5}y_1+2 \iff \\
y_1+\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{2}x_1^2 \iff \\
(-y_1+\frac{\sqrt{5}}{5}) = \frac{\sqrt{5}}{2}(-x_1)^2.
\end{aligned}$$

Effettuando l'isometria diretta[1] (una traslazione composta con una rotazione di π)

$$G: \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ y_2 = -y_1+\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

la parabola è ridotta a forma canonica : si scrive infatti come

$$y_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}x_2^2.$$

L'asse della parabola nelle coordinate (x_2, y_2) è $r : x_2 = 0$. Basta andare a sostituire le vecchie coordinate per ottenere l'espressione voluta:

$$x_2 = 0 \iff x_1 = 0 \iff x-2y = 0 \iff y = \frac{x}{2}.$$

Soluzione dell'esercizio 3

L'insieme vuoto e $X \sqcup Y$ appartengono a τ per definizione di τ. Siano $A_i = U_i \sqcup V_i \in \tau$ con $i \in \{1, 2\}$. L'intersezione $A_1 \cap A_2$ coincide, per definizione, con

$$(U_1 \sqcup V_1) \cap (U_2 \sqcup V_2) = [(U_1 \times \{1\}) \cup (V_1 \times \{2\})] \cap [(U_2 \times \{1\}) \cup (V_2 \times \{2\})] =$$

$$= ((U_1 \cap U_2) \times \{1\}) \cup ((V_1 \cap V_2) \times \{2\}) = (U_1 \cap U_2) \sqcup (V_1 \cap V_2)$$

che è ancore un elemento di τ poichè τ_X e τ_Y sono topologie e sono chiuse per intersezioni finite. Similmente

$$\bigcup_{i\in I}(U_i \sqcup V_i) = \bigcup_{i\in I}(U_i) \sqcup \bigcup_{j\in I}(V_j)$$

quindi, anche la proprietà di chiusura per unioni arbitrarie è soddisfatta: τ è una topologia su X.

[1] Il fatto di prendere $x_2 = -x_1$ serve solo per considerare un'isometria diretta

Supponiamo che X e Y siano compatti. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X \sqcup Y$ con $A_i = U_i \sqcup V_i$. Siccome gli insiemi A_i coprono $X \sqcup Y$ avremo

$$X \sqcup Y = \bigcup_{i\in I}(U_i \sqcup V_i) = \bigcup_{i\in I}(U_i) \sqcup \bigcup_{j\in I}(V_j)$$

cioè

$$X = \bigcup_{i\in I}(U_i)$$

e

$$Y = \bigcup_{j\in I}(V_j).$$

Per il fatto che X e Y sono compatti abbiamo che esistono due famiglie finite di indici $\tilde{I} = \{i_1, \ldots, i_n\}$ e $\tilde{J} = \{j_1, \ldots, j_m\}$ tali che $\{U_i\}_{i\in\tilde{I}}$ e $\{V_j\}_{j\in\tilde{J}}$ siano sottoricoprimenti aperti e finiti. Sia $H = \tilde{I} \cup \tilde{J}$:

$$\bigcup_{i\in H}(U_i \sqcup V_i) = \bigcup_{i\in H}(U_i) \sqcup \bigcup_{j\in H}(V_j) = X \sqcup Y$$

quindi abbiamo prodotto un sottoricoprimento finito del ricoprimento dato: $X \sqcup Y$ è compatto.

Un punto di $X \sqcup Y$ è del tipo $\{P\} \sqcup \emptyset$ o $\emptyset \sqcup \{P\}$. Supponiamo che X e Y siano T_2. Siano Q_1, Q_2 due punti distinti in $X \sqcup Y$. Se $Q_i = \{P_i\} \sqcup \emptyset$ con $P_i \in X$ (o $Q_i = \emptyset \sqcup \{P_i\}$ con $P_i \in Y$) allora sappiamo che esistono due aperti U_1 e U_2 di X che sono disgiunti e tali che $P_i \in U_i$. Due aperti V_1, V_2 di $X \sqcup Y$ che tali che $Q_i \in V_i$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ sono allora $V_i := U_i \cap \emptyset$. Se invece, dopo avere al più scambiato i due punti, si ha $Q_1 = \{P_1\} \sqcup \emptyset$ e $Q_2 = \emptyset \sqcup \{P_2\}$ allora possiamo prendere $V_1 = X \sqcup \emptyset$ e $V_2 = \emptyset \sqcup Y$. Questo mostra che $X \sqcup Y$ è T_2 se X e Y lo sono.

Ricordiamo che

$$X \sqcup Y = (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

Questo vuol dire che

$$(X \sqcup \emptyset)^C = (X \times \{1\})^C = (Y \times \{2\}) = (\emptyset \sqcup Y).$$

In particolare abbiamo mostrato che $(\emptyset \sqcup Y)$ è in contemporanea un insieme aperto (per definizione) e un insieme chiuso (perchè complementare di un aperto): questo è equivalente a dire che $X \sqcup Y$ non è connesso.

Soluzione dell'esercizio 4

Per mostrare che (X, τ) è uno spazio topologico basta mostrare che τ è una topologia. L'insieme vuoto e X appartengono per ipotesi a τ. Presi due aperti U_1 e U_2 sappiamo che esistono ϵ_1 e ϵ_2 tali che $U_i = A_{\epsilon_i}$. Abbiamo

$$U_1 \cap U_2 = A_{\epsilon_1} \cap A_{\epsilon_2} = A_{\min(\epsilon_1,\epsilon_2)}$$

quindi l'intersezione di due aperti appartiene a τ. Si consideri ora una collezione di aperti (diversi dal vuoto e da X) $U_i = A_{\epsilon_i}$ con $i \in I$ e se ne consideri l'unione:

$$U := \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} A_{\epsilon_i}.$$

Se $s := \sup_{i\in I}(\epsilon_i)$ è finito abbiamo

$$U = \bigcup_{i\in I} A_{\epsilon_i} = A_{\epsilon_s}$$

mentre se il s è infinito vale

$$U = \bigcup_{i\in I} A_{\epsilon_i} = \mathbb{R} = X.$$

In entrambi i casi abbiamo che l'unione di arbitrari elementi di τ è ancora un elemento di τ e questo basta per concludere che τ è una topologia su X.

Tutti gli aperti non vuoti di X si scrivono come unione di intervalli aperti di $\mathbb{R}$: si ha quindi che τ è una topologia comparabile con quella euclidea su $\mathbb{R}$. Essendo più debole (perchè non tutti gli aperti di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ sono aperti di $(\mathbb{R}, \tau)$) possiamo concludere che (X, τ) è connesso.

(X, τ) non è compatto infatti la collezione di aperti $U_n := A_{n+1} = (-n-1, n+1)$ copre X ma non esiste nessun sottoricoprimento di X che sia finito.

(X, τ) non è T_0 infatti ogni aperto che contiene $P = 1$ contiene anche $Q = -1$ e vale il viceversa. Di conseguenza (X, τ) non è nemmeno T_1 e T_2.

Osserviamo che f è continua: si ha infatti che $f^{-1}(A_\epsilon) = A_\epsilon$ e quindi la controimmagine di un aperto è un aperto. f è invertibile con inversa uguale a f stessa infatti $f \circ f = \mathrm{Id}_X$. In particolare $f^{-1} = f$ è continua e questo basta per concludere che f è un omeomorfismo.