Geometria A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2020/2021
Terzo appello - 30 agosto 2021

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ i punti

$$P_1 = [1:0:0], \quad P_2 = [0:1:0], \quad P_3 = [0:0:1], \quad P_4 = [1:1:1],$$

$$Q_1 = [1:-1:-1], \quad Q_2 = [1:3:1], \quad Q_3 = [1:1:-1], \quad Q_4 = [1:1:1].$$

(1) Costruire una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

(2) Per una tale f costruita al punto precedente, provare che essa ammette un punto fisso P e una retta r costituita di punti fissi.

(3) Sia s una retta generata da P e da un punto di r. Provare che per ogni punto $S \in s$, $f(S) \in s$ (in questo caso diremo che s è f*-invariante*).

Esercizio 2. Sia data la curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ data dall'equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1^2 - x_0 x_1 x_2^2 - 3x_1^4 - x_0^2 x_2^2 - 2x_0 x_1^3 = 0.$$

(1) Trovare i punti singolari di $\mathcal{C}$.

(2) Provare che tre dei punti singolari trovati sono allineati su una retta r tutta contenuta in $\mathcal{C}$. Trovare un polinomio $G(x_0, x_1, x_2)$ di grado 3 tale che

$$F(x_0, x_1, x_2) = (x_1 + x_0) \cdot G(x_0, x_1, x_2)$$

(*Suggerimento: potrebbe essere utile riscrivere* $3x_1^4$ *come* $2x_1^4 + x_1^4$). Provare inoltre che la cubica (irriducibile) $\mathcal{D}$ data dall'equazione $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ ammette un unico punto singolare.

(3) Per i punti singolari trovati ai punti precedenti, calcolare molteplicità e tangenti principali.

Soluzione Esercizio 1. (1) Per prima P_1, P_2, P_3, P_4 sono i punti del riferimento proiettivo standard, quindi sono in posizione generale. Poi, $Q_1, Q_3 \in l = \{x_0 + x_2 = 0\}$, mentre $Q_2, Q_4 \in m = \{x_0 - x_2 = 0\}$. D'altra parte, $Q_1, Q_3 \notin m$ e $Q_2, Q_4 \notin l$. Se supponiamo che la retta passante per Q_1 e Q_2 contenga anche un altro punto dei quattro, per esempio P_3, allora questa retta deve essere l, ma $Q_2 \notin l$ contro le ipotesi. Ripetendo questo argomento per le altre coppie di punti, si dimostra che Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sono punti in posizione generale. Questo ci garantisce l'unicità della proiettività che cerchiamo.

A questo punto cerchiamo una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{C}^3$ tale che $P_i = [v_i]$ per $i = 1, 2, 3$ e $P_4 = [v_1 + v_2 + v_3]$. È immediato verificare che una base del genere è data dalla base canonica

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, cerchiamo una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{C}^3$ tale che $Q_i = [w_i]$ per $i = 1, 2, 3$ e con $Q_4 = [w_1 + w_2 + w_3]$. Se scriviamo

$$Q_1 = [\lambda : -\lambda : -\lambda], \quad Q_2 = [\mu : 3\mu : \mu], \quad Q_3 = [\tau : \tau : -\tau], \quad Q_4 = [\sigma : \sigma : \sigma],$$

allora le condizioni che cerchiamo sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \sigma = \lambda + \mu + \tau \\ \sigma = -\lambda + 3\mu + \tau \\ \sigma = -\lambda + \mu - \tau \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \lambda = \mu \\ \sigma = -\tau \\ \sigma = \lambda \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \lambda = \sigma \\ \mu = \sigma \\ \tau = -\sigma \end{cases}.$$

Prendendo $\sigma = 1$, otteniamo

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ora non rimane che trovare una matrice $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tale che $Av_i = w_i$. Fortunatamente, in questo caso le colonne di A sappiamo essere date dai vettori w_i, visto che v_i è la base canonica di $\mathbb{C}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad f(x_0 : x_1 : x_2) = [x_0 + x_1 - x_2 : -x_0 + 3x_1 - x_2 : -x_0 + x_1 + x_2].$$

(2) Per studiare i punti fissi di f, dobbiamo guardare agli zeri del polinomio caratteristico di A:

$$p_A(t) = \det(A - t\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ -1 & 3-t & -1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)^2 = 0.$$

Per $t = 1$, otteniamo un autospazio di dimensione 1, quindi un punto in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Notiamo che

$Q_4 = f(P_4) = P_4$, quindi ci aspettiamo che sia lui il punto fisso. Facendo i conti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u_2 - u_3 = 0 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad P = [1 : 1 : 1].$$

Per $t = 2$, otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad -u_1 + u_2 - u_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r = \{x_0 - x_1 + x_2 = 0\}.$$

(3) Vogliamo innanzitutto costruire il fascio di rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ passanti per P, quindi prendiamo due rette diverse che passano per il punto, ad esempio $\{x_0 - x_1 = 0\}$ e $\{x_1 - x_2 = 0\}$. Allora il fascio sarà dato dall'equazione

$$s : \lambda(x_0 - x_1) + \mu(x_1 - x_2) = \lambda x_0 - (\lambda - \mu)x_1 - \mu x_2 = 0 \quad \text{per } [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Troviamo i punti di intersezioni con r (esistono sempre per il teorema di Bezout!):

$$\begin{cases} \lambda x_0 - (\lambda - \mu)x_1 - \mu x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_0 = x_1 - x_2 \\ \mu x_1 - (\lambda + \mu)x_2 = 0 \end{cases}$$

Se $\mu = 0$, allora otteniamo dalla seconda equazione $x_2 = 0$ e la prima equazione ci porta al punto $Q = [1 : 1 : 0]$. Se invece $\mu \neq 0$, allora possiamo scrivere

$$x_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} x_2 \quad \rightsquigarrow \quad x_0 = \frac{\lambda}{\mu} x_2 \quad \rightsquigarrow \quad Q = \left[\frac{\lambda}{\mu} : \frac{\lambda + \mu}{\mu} : 1\right] = [\lambda : \lambda + \mu : \mu].$$

Notiamo che per $\mu = 0$, otteniamo nuovamente $[1 : 1 : 0]$, quindi le intersezioni delle rette del fascio con la retta r sono nella forma

$$Q = [\lambda : \lambda + \mu : \mu] \quad \text{per } [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Ora, una retta per P e Q sarà una combinazione lineare $aP + bQ$ tale che $[a : b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, quindi i punti saranno della forma

$$S = [a + b\lambda : a + b\lambda + b\mu : a + b\mu].$$

Segue da un rapido conto che

$$f[a + b\lambda : a + b\lambda + b\mu : a + b\mu] = [a + 2b\lambda : a + 2b\lambda + 2b\mu : a + 2b\mu] \in s.$$

Quindi $f(S)$ è ancora un punto di s, ma in generale diverso dal punto di partenza. □

Soluzione Esercizio 2. (1) Per prima cosa andiamo a calcolare i punti singolari di $\mathcal{C}$ che sappiamo essere i punti della curva che soddisfano anche la condizione $\nabla F(x_0, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} x_0^2 x_1^2 - x_0 x_1 x_2^2 - 3x_1^4 - x_0^2 x_2^2 - 2x_0 x_1^3 = 0 \\ 2x_0 x_1^2 - x_1 x_2^2 - 2x_0 x_2^2 - 2x_1^3 = 0 \\ 2x_0^2 x_1 - x_0 x_2^2 - 12x_1^3 - 6x_0 x_1^2 = 0 \\ -2x_0 x_1 x_2 - 2x_0^2 x_2 = -2x_0 x_2 (x_1 + x_0) = 0 \end{cases} .$$

Procediamo per casi sfruttando l'ultima equazione. Se $x_0 = 0$, allora l'equazione della curva ci dice che $x_1^4 = 0$, da cui otteniamo il punto $A = [0 : 0 : 1]$. Se $x_2 = 0$, allora la seconda equazione diventa $2x_1^3 = 0$, da cui troviamo il punto $B = [1 : 0 : 0]$. Infine consideriamo il caso $x_1 = -x_0$: allora la seconda e la terza equazione possono essere riscritte come

$$x_0(4x_0^2 - x_2^2) = 0.$$

Se supponiamo $x_0 = 0$, allora otteniamo il punto $[0 : 1 : 0]$ che però non soddisfa l'equazione della curva, quindi lo dobbiamo scartare. Rimane il caso $x_2 = \pm 2x_0$, per cui otteniamo i punti $C = [1 : -1 : -2]$ e $D = [1 : -1 : 2]$. I quattro punti trovati sono tutti e soli i punti singolari di $\mathcal{C}$.

(2) Notiamo che A, C, D giacciono sulla retta r di equazione $x_1 + x_0 = 0$, ed essendo punti singolari per $\mathcal{C}$, segue che

$$I(\mathcal{C}, r, A), I(\mathcal{C}, r, C), I(\mathcal{C}, r, D) \geq 2.$$

Essendo $\mathcal{C}$ una curva di grado 4, dal teorema di Bezout abbiamo che se r non è contenuta in $\mathcal{C}$, allora le due curve hanno 4 punti di intersezione contati con molteplicità. Ma chiaramente si ha

$$I(\mathcal{C}, r, A) + I(\mathcal{C}, r, C) + I(\mathcal{C}, r, D) \geq 6 > 4,$$

da cui segue che $r \subset \mathcal{C}$.

Troviamo un polinomio $G(x_0, x_1, x_2)$ di grado 3 tale che $F(x_0, x_1, x_2) = (x_0 + x_1)G(x_0, x_1, x_2)$. Procediamo con un raccoglimento parziale:

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2) &= x_0^2x_1^2 - x_0x_1x_2^2 - 2x_1^4 - x_1^4 - x_0^2x_2^2 - 2x_0x_1^3 = \\ &= x_1^2(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) - x_0x_2^2(x_0 + x_1) - 2x_1^3(x_0 + x_1) = \\ &= (x_0 + x_1)(x_0x_1^2 - 3x_1^3 - x_0x_2^2) \quad \rightsquigarrow \quad G(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1^2 - 3x_1^3 - x_0x_2^2. \end{aligned}$$

Studiamo i punti singolari di $\mathcal{D} = \{G(x_0, x_1, x_2) = 0\}$. Ancora una volta saranno i punti della cubica tali che $\nabla G(x_0, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$:

$$\begin{cases} x_0x_1^2 - 3x_1^3 - x_0x_2^2 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ 2x_0x_1 - 6x_1^2 = 2x_1(x_0 - 3x_1) = 0 \\ 2x_0x_2 = 0 \end{cases}.$$

Dall'ultima equazione procediamo per casi. Se $x_0 = 0$, allora dalla terza equazione segue $x_1 = 0$ e a cascata dalla seconda equazione si ottiene $x_2 = 0$ che non è un punto del proiettivo. Se invece $x_2 = 0$, dalla seconda equazione otteniamo $x_1 = 0$ e ritroviamo il punto $B = [1 : 0 : 0]$ trovato in precedenza. Questo è l'unico punto singolare della cubica.

(3) Cominciamo a studiare molteplicità e tangenti principali dei quattro punti singolari, cominciando da B. Mettiamoci nella carta U_0, allora l'equazione locale della curva è data da

$$F(1, x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2^2 - 3x_1^4 - x_2^2 - 2x_1^3 = 0.$$

Da ciò segue che $m_B(\mathcal{C}) = 2$, perché è il grado minimo tra le parti omogenee del polinomio che definisce la curva. Le tangenti principali si ottengono dalla fattorizzazione di questo polinomio:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \quad \rightsquigarrow \quad x_1 \pm x_2 = 0.$$

Da questo segue che la cubica irriducibile è una curva nodale.

Rimangono da analizzare i punti A, C, D che sappiamo appartenere alla retta r (che sarà una tangente principale). D'altra parte, sappiamo che A, C, D non sono punti singolari per la cubica $\mathcal{D}$, quindi le tangenti principali saranno date dalle tangenti rispetto alla cubica e dalla retta r. Le rette tangenti alla cubica saranno date dalle equazioni

$$\nabla G(P) \cdot (x_0 - P_0, x_1 - P_1, x_2 - P_2) = 0 \quad \text{dove } P = [P_0 : P_1 : P_2] \in \{A, C, D\}.$$

- $\nabla G(A) = (-1, 0, 0)$, quindi la retta tangente è $x_0 = 0$;
- $\nabla G(C) = (-3, -11, -4)$, da cui otteniamo $3x_0 + 11x_1 + 4x_2 = 0$;
- $\nabla G(D) = (-3, -11, 4)$ e concludiamo con $3x_0 + 11x_1 - 4x_2 = 0$. $\square$