Esame scritto di Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2013/2014
Settembre 2014

Esercizio 1
Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si consideri il piano $\pi : x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$, le rette proiettive di equazioni

$$r : x_3 - 2x_0 - x_1 = x_3 + x_0 + 2x_1 - x_2 = 0 \qquad s : x_2 - 3x_0 - 3x_1 = x_1 + x_0 = 0$$

e il punto $P = [2, 0, 1, 9]$.

1) Ricavare la posizione reciproca di r e s, di π e r e di π e s e le dimensioni degli spazi proiettivi $L(r, s)$, $L(\pi, r)$, $L(\pi, s)$ e $L(\pi, P)$.

2) Scrivere delle equazioni cartesiane per lo spazio $L(r, s)$.

3) Dire per quali valori di k le quadriche definite da

$$\mathcal{Q} : -28(3x_0 - x_1 - 2x_2)^2 + 4\pi(-3x_0 - x_3)^2 - 156(2x_1)^2 = 0$$

e

$$\mathcal{Q}_k : 5x_0^2 + 4k^2x_1^2 + 3(k-1)x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 = 0$$

sono proiettivamente equivalenti.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y). Si consideri, al variare di k, la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione:

$$\mathcal{C}_k : 2kx^2 - 8xy + (2k-4)x + 2ky^2 + (2k-4)y = 2.$$

1) Per quali valori di k la conica è degenere?

2) Per i valori di k per cui la conica è non degenere, classificare $\mathcal{C}_k$;

3) Scrivere un'isometria diretta che mandi $\mathcal{C}_3$ nella sua forma canonica;

4) Ci sono valori di k per cui $\mathcal{C}_k$ è isometrica a una circonferenza?

Esercizio 3
Si consideri l'insieme $X := [0,1) \cup \{2,3\}$. Detto $\mathcal{B} := \{(a,b) : 0 \leq a < b < 1\}$ si considerino le topologie τ_1 e τ_2 generate rispettivamente dalle basi

$$\mathcal{B}_1 := \mathcal{B} \cup \{(a,1) \cup C : a \in [0,1) \text{ e } C \in \{\{2\},\{2,3\}\}\} \cup \{X\}$$

e

$$\mathcal{B}_2 := \mathcal{B} \cup \{(a,1) \cup C : a \in [0,1) \text{ e } C \in \{\{2\},\{3\},\{2,3\}\}\} \cup \{X\}.$$

Sia τ_e la topologia indotta su X dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

1) Dire se X è T_0, T_1 o T_2 se munito della topologia τ_e. Fare lo stesso per τ_2.

2) Considerare la mappa $f : [-1,1] \to X$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| < 1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Se $[-1,1]$ è munito della topologia euclidea e su X si considera la topologia τ_e, f è continua? Con τ_1?

3) Dire se X è compatto e connesso per archi se munito della topologia τ_e. Fare lo stesso per τ_1.

Esercizio 4
Sia $X = \mathbb{R}^2$ e si consideri la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, se $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ sono sulla stessa semiretta per l'origine O allora $d(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = ||\underline{x}_1 - \underline{x}_2||$ mentre in caso contrario $d(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = ||\underline{x}_1|| + ||\underline{x}_2||$.

1) Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico e che su ogni retta per l'origine la distanza indotta è quella euclidea.

2) Rappresentare graficamente le palle aperte di centro l'origine e $(1,0)$ al variare del raggio.

3) Si consideri la successione $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\underline{x}_n = (2\cos(2\pi/n)), 2\sin(2\pi/n))$. Si dica se $(\underline{x}_n)$ ha limite in (X, d) e se è di Cauchy.

4) Chiamando τ la topologia definita dalla metrica, dire se (X, τ) è T_2 o compatto. Dimostrare che (X, τ) è connesso per archi. *Suggerimento: Utilizzare quanto dimostrato nel punto* 1.

Soluzione dell'esercizio 1

Possiamo semplificare le equazioni di s ottenendo $x_2 = x_1 + x_0 = 0$. La posizione reciproca di r e s si ottiene controllando, ad esempio, la dimensione dell'intersezione tra r ed s. Questa si può dedurre dal determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o, in modo equivalente, provando a risolvere il sistema $A\underline{x} = 0$. La soluzione del sistema, in forma parametrica, è

$$\underline{x} = (a, -a, 0, a) \quad a \in \mathbb{R}$$

che corrisponde quindi a uno spazio proiettivo di dimensione 0, cioè un punto (per la precisione il punto $[1, -1, 0, 1]$). Questo implica che r ed s sono rette incidenti.

Per stabilire la posizione reciproca di π e r e di π e s basta calcolare i ranghi delle matrici

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che sono rispettivamente 3 e 2. Questo vuol dire che π ed r sono incidenti senza che r sia contenuta in π mentre s è contenuta in π. Si vede anche facilmente che $P \in \pi$. Da queste informazioni e dalla formula di Grassmann deduciamo

$$\mathrm{Dim}(L(r, s)) = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$\mathrm{Dim}(L(\pi, r)) = 2 + 1 - 0 = 3$$

$$\mathrm{Dim}(L(\pi, s)) = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\mathrm{Dim}(L(\pi, P)) = 2 + 0 - 0 = 2.$$

Un punto che appartiene a s ma non ad r è, ad esempio, $Q = [1, -1, 0, 0]$. Per determinare l'equazione cartesiana del piano $L(r, s)$ possiamo considerare il fascio di piani contenenti r

$$\lambda(x_3 - 2x_0 - x_1) + \mu(x_3 + x_0 + 2x_1 - x_2) = 0$$

e imporre il passaggio per il punto Q. Otteniamo $\lambda(-2+1) + \mu(1-2) = 0$ da cui ricaviamo

$$L(r, s) : 3x_0 + 3x_1 - x_2 = 0.$$

La matrice associata alla quadrica $\mathcal{Q}_k$ è

$$M_k = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k^2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3(k-1) & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha come polinomio caratteristico

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 3(k-1))[\lambda^2 - (4k^2 + 1)\lambda + (4k^2 - 4)].$$

L'ultimo fattore è il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} 4k^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha determinante $4k^2 - 4$ e traccia $4k^2 + 1$. La quadrica $\mathcal{Q}$ è degenere e ha equazione canonica $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. Se le quadriche $\mathcal{Q}_k$ e $\mathcal{Q}$ sono proiettivamente equivalenti si ha che esattamente uno degli autovalori di M_k deve essere nullo. Questo avviene se e solo se $k = -1$ (la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è degenere per $k = \pm 1$). Per questo valore di k gli autovalori sono: $5, 5, -6, 0$. Abbiamo quindi che M_{-1} ha segnatura $(2, 1)$ da cui deduciamo che $\mathcal{Q}_k$ e $\mathcal{Q}$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se $k = -1$.

Soluzione dell'esercizio 2

La conica $\mathcal{C}_k$, nelle coordinate (x, y), ha come matrice associata

$$A_k := \left[\begin{array}{c|cc} -2 & k-2 & k-2 \\ \hline k-2 & 2k & -4 \\ k-2 & -4 & 2k \end{array}\right].$$

La matrice B_k dei termini quadratici ha determinante $4k^2 - 16 = 4(k-2)(k+2)$. Calcoliamo il determinante di A_k:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}(A_k) = \\
&= -2\,\mathrm{Det}(B_k) - (k-2)^2(2k+4) + (k-2)^2(-4-2k) = \\
&= -8(k-2)(k+2) - 4(k-2)^2(k+2) = -4(k-2)(k+2)(2+k-2) = \\
&= -4k(k-2)(k+2)
\end{aligned}$$

La conica è degenere se e solo se $\mathrm{Det}(A_k) = 0$ e quindi se e solo se $k \in \{0, \pm 2\}$.

Abbiamo i seguenti casi:

$k < -2$ Ellisse non degenere;

$-2 < k < 2, k \neq 0$ Iperbole non degenere;

$k > 2$ Ellisse non degenere;

$k \in \{0, \pm 2\}$ Conica degenere;

Gli autovalori di B_k sono le radici del polinomio caratteristico

$$p_{B_k}(\lambda) = \lambda^2 - 4k\lambda + 4k^2 - 16$$

il cui discriminante è $16k^2 - 16k^2 + 64 = 64 \neq 0$. Questo vuol dire che, indipendentemente da k, gli autovalori di B_k saranno sempre distinti. Questo basta per concludere che per nessun $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k$ è una circonferenza[1].

Poniamo $k = 3$. Gli autovalori di B_3 sono 2 e 10 Due autovettori indipendenti sono

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_{10} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[1]Si poteva anche notare che il coefficiente di xy non dipende da k e non è nullo.

quindi possiamo considerare la matrice ortogonale speciale

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se cambiamo coordinate ruotando il sistema di riferimento utilizzando la rotazione R specificata da M possiamo passare dalle coordinate (x, y) alle coordinate (x_1, y_1) tramite le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \end{cases}$$

L'espressione della conica $\mathcal{C}_0$ nelle nuove coordinate è

$$\begin{aligned}
0 &= 6x^2 - 8xy + 6y^2 + 2x + 2y - 2 = \\
&= 6\frac{1}{2}(x_1-y_1)^2 + 6\frac{1}{2}(x_1+y_1)^2 - \frac{8}{2}(x_1^2 - y_1^2) + \frac{2\sqrt{2}}{2}(x_1-y_1) + \frac{2\sqrt{2}}{2}(x_1+y_1) - 2 = \\
&= \frac{1}{2}(12x_1^2 + 12y_1^2 - 8x_1^2 + 8y_1^2) + 2\sqrt{2}x_1 - 2 = \\
&= 2x_1^2 + 10y_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 - 2 = 2\left(x_1^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + 10y^2 - 2 \\
&= 2\left(x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 10y^2 - 3
\end{aligned}$$

Dall'ultima scrittura si vede che se applichiamo alla conica trasformata la traslazione

$$T : \begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

l'abbiamo ridotta a forma canonica: $\frac{2}{3}x_2^2 + \frac{10}{3}y_2^2 = 1$. L'isometria diretta richiesta è quella che permette di passare dalle coordinate (x, y) alle coordinate (x_2, y_2) e si ottiene componendo R^{-1} e T:

$$S = T \circ R^{-1} : \begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+1) \\ y_2 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 3

Lo spazio topologico (X, τ_e) è un sottospazio topologico di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ e di conseguenza è T_0, T_1 e T_2. Inoltre, non essendo chiuso, non è compatto. Intendendo f come applicazione in X munito della topologia euclidea è facile vedere che non è continua: abbiamo ad esempio $f^{-1}(\{3\}) = \{1\}$ e quindi la controimmagine di un aperto in X non è aperta in $[-1, 1]$. Infine, siccome $\{2, 3\}$ e $[0, 1)$ sono due aperti in (X, τ_e), abbiano che X non è connesso (e quindi non è connesso per archi).

Mostriamo che (X, τ_2) non è T_1 (e quindi nemmeno T_2). Preso un qualsiasi punto $x \neq 0$ non esistono intorni di 0 che non contengono x: si ha infatti che l'unico aperto contenente 0 è tutto lo spazio. Questo basta per concludere che (X, τ_2) non è T_1. Mostriamo ora che X è T_0. Siano x e y due punti distinti. Supponiamo, per semplicità, $0 \leq x < y$. Se $x = 0$ non esistono intorni aperti di x che non contengono y ma riusciamo a trovare un intorno U di y che non contiene 0. Ad esempio, se $y < 1$, possiamo porre $U = (y/2, 1) \cup \{2, 3\}$ mentre, se $y = 2$ o $y = 3$, possiamo prendere come considerare $U = (1/2, 1) \cup \{y\}$. Se invece $0 < x < 1$ si procede similmente considerando rispettivamente un intorno del tipo $U = ((x+y)/2, 1)$ se $y < 1$ o $U = ((x+1)/2, 1) \cup \{y\}$ se $y = 2$ o $y = 3$. Infine, è chiaro che, se $x = 2$ e $y = 3$, non solo esiste un intorno del primo che non contiene il secondo ma vale anche il viceversa (ad esempio gli intorni $(0,1) \cup \{2\}$ e $(0,1) \cup \{3\}$). Con questo si conclude che (X, τ_2) è uno spazio T_0.

Notiamo preventivamente che, utilizzando la topologia τ_1, ogni intorno di 2 (lo stesso vale per gli intorni di 3) contengono un intervallo del tipo $(a, 1)$. Se U è un aperto di (X, τ_1) che è contenuto in $[0, 1)$ allora $f^{-1}(U)$ è aperto in $[-1, 1]$ poichè $f|_{(-1,1)} : (-1, 1) \to [0, 1)$ è continua. Se $2 \in U$ allora $U = V \cup ((a, 1) \cup \{2, 3\})$ oppure $U = V \cup ((a, 1) \cup \{2\})$ con $V \subset [0, 1)$. Nel primo caso abbiamo

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(V) \cup [-1, -a) \cup (a, 1]$$

mentre nel secondo

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(V) \cup [-1, -a) \cup (a, 1).$$

In entrambi i casi quindi la controimmagine di U è un insieme aperto: f è continua.

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di (X, τ_1). L'unico aperto che contiene 0 è X stesso quindi uno degli insiemi del ricoprimento è X. Di conseguenza un sottoricoprimento finito è $\{X\}$ e (X, τ_1) è compatto.

Mostriamo che (X, τ_1) è connesso per archi (e quindi connesso). Un arco continuo che collega 0 a $P := \{a\}$ con $a \in (0, 1)$ è $\gamma(t) = at$. Ci basta ricavare due archi continui che collegano 0 rispettivamente a 2 e a 3. Si considerino le applicazioni $\sigma_i : [0, 1] \to [-1, 1]$ con

$$\sigma_1(t) := -t \qquad \text{e} \qquad \sigma_2(t) := t.$$

Se su $[0, 1]$ e $[-1, 1]$ mettiamo la topologia euclidea queste sono funzioni continue. Due archi che soddisfano le richieste sono

$$\gamma_1 = f \circ \sigma_1 \qquad \text{e} \qquad \gamma_2 = f \circ \sigma_2$$

infatti hanno come punto iniziale 0 e come punto finale rispettivamente 2 e 3 e sono continui perchè sono composizione di funzioni continue.

Soluzione dell'esercizio 4

L'annullamento e la simmetria sono ovvie dalla definizione. Bisogna dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i tre punti sono sulla stessa semiretta per l'origine la funzione d coincide con la distanza euclidea ristretta ai punti della semiretta (segue dalla definizione di d) e quindi la disuguaglianza triangolare è valida. Se tutti e tre i punti sono su semirette diverse si ha

$$d(\underline{x}, \underline{z}) = d(\underline{x}, O) + d(\underline{z}, O) \leq d(\underline{x}, O) + d(\underline{z}, O) + d(\underline{y}, O) + d(\underline{y}, O) = d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z}).$$

I casi rimanenti si analizzano nello stesso modo.

La palla aperta $B_r(O)$ di centro l'origine e raggio r coincide con la palla aperta di raggio r della topologia euclidea. La *forma* della palla aperta di centro $P = (1, 0)$ dipende dal raggio r. Se $r \leq 1$, $B_r(P)$ coincide con un intervallo ambio $2r$ (rispetto alla distanza euclidea) tracciato sulla semiretta per O e P. Se $r > 1$ invece $B_r(P)$ è l'unione dell'intervallo sulla semiretta per O e P che va dall'origine al punto $(1 + r, 0)$ e della palla $B_{r-1}(O)$.

Dimostriamo che la successione $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy (e quindi non può avere limite). Supponiamo per assurdo che sia di Cauchy. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > N$ si ha

$d(\underline{x}_n, \underline{x}_m) < 1/2$. Per $n \neq m$ si ha che $\underline{x}_n$ e $\underline{x}_m$ sono su due semirette per l'origine diverse quindi

$$1/2 > d(\underline{x}_n, \underline{x}_m) = |\underline{x}_n| + |\underline{x}_m| = 2 + 2 = 4$$

poichè sono tutti punti sulla circonferenza (euclidea) di centro O e raggio 2. Di conseguenza la successione non è di Cauchy e non può avere limite in (X, d).
Essendo (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile si ha che è T_2. Non è compatto infatti la collezione di palle aperte

$$\{B_n(O)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. Siccome su ogni retta la distanza indotta è quella euclidea abbiamo che la topologia indotta su ogni semiretta è quella euclidea. Questo vuol dire che siamo in grado di scrivere un arco continuo da qualsiasi punto $\underline{x}$ dello spazio che termina in O il cui supporto è contenuto in una semiretta: $\gamma_x(t) := (1 - t)\underline{x}$ è un'applicazione continua da $[0, 1]$ in X tale che $\gamma_x(0) = \underline{x}$ e $\gamma_x(1) = O$. Questo basta per mostrare che (X, τ) è connesso per archi.