Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2020/2021

Secondo appello - 5 luglio 2021

Esercizio 1. Si consideri il fascio di coniche in $\mathbb{E}^2$ date dall'equazione

$$\mathcal{Q}_{[\lambda:\mu]}(x,y) = (\lambda+\mu)x^2 + (\lambda+\mu)y^2 + 2\lambda xy + 2(2\lambda+\mu)x = 0,$$

al variare di $[\lambda:\mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ come punto nella retta proiettiva.

(1) In corrispondenza del punto proiettivo $[1:0]$, portare la conica nella sua forma canonica

(2) Supposto $\mu = 1$, classificare il tipo della conica $\mathcal{Q}_\lambda := \mathcal{Q}_{[\lambda:1]}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Concludere classificando $\mathcal{Q}_{[\lambda:\mu]}$ al variare di $[\lambda:\mu]$ nella retta proiettiva.

Esercizio 2. Sia data la curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$f(x,y) = x - xy^2 + 1 = 0.$$

(1) Trovare i punti singolari e gli asintoti di $\mathcal{C}$.

(2) Trovare i punti di flesso della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$. Poi, provare che questi sono collineari e calcolare l'equazione della retta che li contiene.

Soluzione Esercizio 1. (1) Per $[\lambda : \mu] = [1 : 0]$ si ottiene la conica

$$\mathcal{Q}(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + 4x = 0.$$

Le matrici associate alla conica sono date da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue che $\det A = -4 \neq 0$ (quindi la conica è non degenere), mentre gli autovalori di A_0 sono dati da

$$\det(A_0 - t\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 1 = t(t-2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t = 0, t = 2$$

dunque, essendo un autovalore nullo, segue che $\mathcal{Q}(x, y) = 0$ è una parabola. Infatti possiamo scrivere

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4x = (x + y)^2 + 4x,$$

tuttavia, essendo $\mathbb{E}^2$ uno spazio euclideo, dobbiamo trasformare la conica attraverso isometrie.

Cominciamo a trovare gli autovettori associati agli autovalori della matrice A_0 per la rotazione. Vogliamo trovare dei vettori $v = (v_1, v_2)^t$ tali che

$$(A_0 - t\mathrm{Id})v = 0.$$

Per $t = 0$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 + v_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(potendo prendere il vettore a meno di un multiplo, lo abbiamo già scelto normalizzato). Per $t = 2$, invece, otteniamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad v_1 - v_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Segue che la matrice della rotazione è data da

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui la rotazione è data da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x = (x' + y')/\sqrt{2} \\ y = (-x' + y')/\sqrt{2} \end{cases}.$$

A questo punto riscriviamo l'equazione nelle nuove coordinate come

$$\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} + \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 + 4 \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 2y'^2 + 2x'\sqrt{2} + 2y'\sqrt{2} = 0.$$

Ora abbiamo una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse:

$$x' = -\frac{1}{\sqrt{2}} y'^2 - y' = ay^2 + by$$

Il vertice della nuova parabola è dato dal punto

$$V = \left(-\frac{b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Possiamo scrivere allora

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + V \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x' = x'' + 1/2\sqrt{2} \\ y' = y'' - 1/\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ancora una volta, riscriviamo la conica nelle nuove coordinate come

$$2(y'' - 1/\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}(x'' + 1/2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(y - 1/\sqrt{2}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 2y''^2 + 2x''\sqrt{2} = 0.$$

Semplificando i coefficienti possiamo ottenere la forma canonica

$$y''^2 + x''\sqrt{2} = 0.$$

(2) Con le ipotesi $[\lambda : \mu] = [\lambda : 1]$, il fascio di coniche diventa

$$\mathcal{Q}_\lambda(x, y) = (\lambda + 1)x^2 + (\lambda + 1)y^2 + 2\lambda xy + 2(2\lambda + 1)x = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le matrici associate alle coniche sono date da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2\lambda + 1 & 0 \\ 2\lambda + 1 & \lambda + 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_0 = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Cominciamo a calcolare il determinante di A, per studiare le coniche degeneri:

$$\det A = -(2\lambda + 1)(2\lambda + 1)(\lambda + 1) = -(2\lambda + 1)^2(\lambda + 1).$$

Segue che per $\lambda = -1/2$, la conica è doppiamente degenere. Infatti la sua equazione diventa

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{2}(x - y)^2 = 0 \quad \text{(rette coincidenti)}.$$

Invece, per $\lambda = -1$, la conica è semplicemente degenere e la sua equazione diventa

$$-2xy - 2x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -2x(y + 1) = 0 \quad \text{(rette incidenti)}.$$

Per $\lambda \neq -1/2, -1$, la conica è non degenere e andiamo a studiare il segno del determinante di A_0 per classificarla:

$$\det A_0 = (\lambda + 1)^2 - \lambda^2 = 2\lambda + 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \text{ellisse} & \lambda > -1/2 \\ \text{iperbole} & \lambda < -1/2 \end{cases}.$$

Rimane da capire se gli ellissi siano a punti reali o meno. Per capire questo, studiamo il segno di

$$\operatorname{tr} A_0 \cdot \det A = 2(\lambda + 1) \cdot \det A = -2(\lambda + 1)^2(2\lambda + 1)^2 < 0$$

per ogni scelta di $\lambda > -1/2$. Dunque tutti gli ellissi del fascio sono a punti reali.

Per classificare il fascio con $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ci basta ricordare che

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{[\lambda : 1] : \lambda \in \mathbb{R}\} \cup [1 : 0] = \text{"}\mathbb{R} \cup \{\infty\}\text{"}.$$

In definitiva avremo che il tipo di $\mathcal{Q}_{[\lambda:\mu]}(x,y) = 0$ è

$$\begin{cases} \text{parabola} & [1:0] \\ \text{ellisse a punti reali} & [\lambda:1] \text{ tali che } \lambda > -1/2 \\ \text{rette coincidenti} & [-1/2:1] \\ \text{iperbole} & [\lambda:1] \text{ tali che } \lambda < -1/2, \lambda \neq -1 \\ \text{rette incidenti} & [-1:1] \end{cases}$$

e questo conclude il nostro studio. $\square$

Soluzione Esercizio 2. (1) Per prima cosa troviamo i punti singolari di $\mathcal{C}$ che sono i punti $(x,y) \in \mathcal{C}$ per cui vale l'equazione

$$\nabla f(x,y) = (1-y^2, 2xy) = (0,0) \quad \rightsquigarrow \quad (x,y) = (0, \pm 1),$$

ma $f(0,\pm 1) = 1 \neq 0$, quindi i punti non stanno sulla curva $\mathcal{C}$. Quindi non esistono punti singolari su $\mathcal{C}$.

Per trovare gli asintoti di $\mathcal{C}$ dobbiamo trovare le tangenti principali ai punti impropri nella chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^2 x_1 - x_1 x_2^2 + x_0^3 = 0.$$

Per ottenere i punti impropri, intersechiamo con la retta di equazione $x_0 = 0$ la curva $\overline{\mathcal{C}}$, ottenendo l'equazione $x_1 x_2^2 = 0$. Quindi otteniamo due punti impropri per $\mathcal{C}$: $P = [0:1:0]$ e $Q = [0:0:1]$.

Cominciamo dalle tangenti principali a P. Mettiamoci nella carta $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ (e supponiamo per comodità $x_1 = 1$), allora l'equazione della curva diventa

$$F(x_0,1,x_2) = x_0^2 - x_2^2 + x_0^3 = 0.$$

Sappiamo che le tangenti principali si ottengono fattorizzando il termine omogeneo di grado minore in fattori lineari, per cui

$$x_0^2 - x_2^2 = (x_0 - x_2)(x_0 + x_2) \quad \rightsquigarrow \quad x_0 \pm x_2 = 0.$$

Tornando nella carta affine $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ (e prendendo in questo caso $x_0 = 1$) dove vive $\mathcal{C}$, otteniamo che gli asintoti sono dati dalle rette $y = \pm 1$.

Proseguiamo analizzando la situazione in Q mettendoci nella carta $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ (ancora una volta diciamo $x_2 = 1$). Qui la curva è data dall'equazione

$$F(x_0,x_1,1) = x_0^2 x_1 - x_1 + x_0^3 = 0,$$

da cui segue che la tangente principale è la retta di equazione $x_1 = 0$. Tornando nella carta U_0, otteniamo che un altro asintoto è dato dalla retta $x = 0$.

(2) Sappiamo che i punti di flesso di $\overline{\mathcal{C}}$ sono i punti non singolari della curva tali che $H_F(x_0,x_1,x_2) = 0$. Quest'ultima condizione è data da

$$0 = H_F(x_0,x_1,x_2) = \det \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_0 & 2x_0 & 0 \\ 2x_0 & 0 & -2x_2 \\ 0 & -2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix} = 8(x_0^2 x_1 - 3x_0 x_2^2 - x_1 x_2^2).$$

Dallo studio dei punti impropri, sappiamo che P è l'unico punto singolare di $\overline{\mathcal{C}}$, tutti gli altri punti sono possibili candidati.

Finalmente possiamo scrivere il sistema che ci produce i punti di flesso:

$$\begin{cases} x_0^2 x_1 - x_1 x_2^2 + x_0^3 = 0 \\ x_0^2 x_1 - x_1 x_2^2 - 3x_0 x_2^2 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_0^2 x_1 - x_1 x_2^2 + x_0^3 = 0 \\ x_0(x_0^2 + 3x_2^2) = 0 \end{cases} .$$

Usiamo la seconda equazione che abbiamo ottenuto. Se $x_0 = 0$, dai conti sui punti impropri sappiamo che l'unico candidato a essere flesso è $Q = [0 : 0 : 1]$, che infatti risolve entrambe le equazioni. D'altra parte P va scartato essendo punto singolare.

Supponiamo ora che $x_0^2 + 3x_2^2 = 0$. La prima equazione del sistema diventa

$$x_0^2 x_1 + \frac{x_0^2}{3} x_1 + x_0^3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_0^2(4x_1 + 3x_0) = 0.$$

Se $x_0 = 0$ allora anche $x_2 = 0$ e otteniamo di nuovo il punto singolare P che non va bene. Supponiamo quindi $x_0 = -4/3x_1$, da cui riscriviamo $x_0^2 + 3x_2^2 = 0$ come

$$\frac{16}{9} x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 16x_1^2 + 27x_2^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = \pm \frac{4i}{3\sqrt{3}} x_1$$

e troviamo due nuovi punti di flesso:

$$\left[-\frac{4}{3} : 1 : \pm \frac{4i}{3\sqrt{3}} \right] = [-4\sqrt{3} : 3\sqrt{3} : \pm 4i].$$

Notiamo che tutti e tre i punti di flesso (Q e gli ultimi due trovati) giacciono sulla retta proiettiva $4x_1 + 3x_0 = 0$ e sono dunque collineari. $\square$