Esame scritto di Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2013/2014
10 Febbraio 2015

Esercizio 1
Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale reale dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y, z). Si considerino la retta r di equazioni $x+2y-3 = z+y-2 = 0$, il piano π di equazione $4x - 2y + 2z - 4 = 0$ e il punto $Q = (2, 2, 0)$.

- Si ricavino le coordinate del punto P, punto di intersezione tra π e r.
- Si ricavino i vertici del quadrato Γ con le seguenti caratteristiche:
  - Γ è contenuto in π e nel semispazio $z \geq 0$.
  - Due suoi vertici adiacenti sono P e Q.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino le rette proiettive di equazioni

$$r : 2x_3 + 4x_1 - 2x_0 = x_0 - x_2 = 0 \qquad s : -x_2 + 2x_1 = 2x_1 - x_0 = 0$$

$$t : x_0 - x_1 = x_2 - x_3 = 0$$

e i punti $P = r \cap s$ e $Q = [0, 2, 0, 1]$.

- Scrivere l'equazione del piano contenente P e t.
- Scrivere l'equazione della retta contenente Q e P.
- Qual è il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^3$ contenente s e t?
- Scrivere l'equazione canonica della quadrica

$$\mathcal{C} : 3x_0^2 - \pi x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 = 0.$$

Esercizio 3

Si consideri l'insieme $X := [0,1) \cup \{2,3\}$. Indicando con $\mathcal{A}_1$ una base per la topologia euclidea su $[0,1)$ e con

$$\mathcal{A}_2 := \{(a,1) \cup C \,:\, a \in [0,1) \text{ e } C \in \{\{2\},\{3\},\{2,3\}\}\}$$

si consideri la collezione $\mathcal{B} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

- Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X che sarà indicata con τ.
- Dire se (X,τ) è T_1 o T_2.
- Considerare la mappa $f : [-1,1] \to X$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| < 1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

  Se $[-1,1]$ è munito della topologia euclidea e su X consideriamo la topologia τ, f è continua?
- Dire se (X,τ) è compatto e connesso per archi.

Esercizio 4

Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$ e si consideri la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, se $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in X$ sono sulla stessa semiretta verticale[1] allora $d(P,Q) = |y_Q - y_P|$ mentre, in caso contrario, si ha $d(P,Q) = |y_P| + |y_Q| + |x_P - x_Q|$.

- Dimostrare che (X,d) è uno spazio metrico.
- Rappresentare graficamente e al variare del raggio gli insiemi $B_r(O)$ e $B_r((0,1))$ (cioè le palle aperte di centro rispettivamente l'origine e $(0,1)$).
- Si considerino le successioni $(P_n)_{n\geq 1}$ e $(Q_n)_{n\geq 1}$ con $P_n = (1/n, 1)$ e $Q_n = (1, 1/n)$. Si dica se le successioni convergono in (X,d).
- Chiamando τ la topologia definita dalla metrica, dire se (X,τ) è T_2 e compatto.

[1] P e Q sono sulla stessa semiretta verticale se e solo se $x_P = x_Q$.

Soluzione dell'esercizio 1
Un sistema di equazioni parametriche per r si ottiene, ad esempio, ricavando x e z in funzione di y :

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Il punto P è il punto che corrisponde, rispetto all'espressione parametrica ricavata, al valore del parametro t per cui $0 = 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) - 4$ cioè

$$0 = 4x(t) - 2y(t) + 2z(t) - 4 = 4(3 - 2t) - 2(t) + 2(2 - t) - 4 = 12 - 12t.$$

Di conseguenza il punto P ha coordinate $(1, 1, 1)$.

La giacitura di π è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ composto da tutti e soli i vettori (a, b, c) ortogonali al vettore $n = (2, -1, 1)$, vettore che identifica la direzione ortogonale a π. Sappiamo che il vettore $v_1 = \overline{PQ} = P - Q = (1, 1, -1)$ è uno di questi. Per identificare la direzione dei lati del quadrato che sono adiacenti al lato $\overline{PQ}$ dovremo quindi trovare un vettore v_2 ortogonale tanto a n quanto a $\overline{PQ}$. Questo vettore soddisferà quindi $2a - b + c = a + b - c = 0$ da cui si ricava $v_2 = (0, b, b)$. Siano R ed S gli altri due vertici del quadrato che stiamo cercando. Se vogliamo che v_2 sia lato del quadrato (cioè $v_2 = \overline{QR} = \overline{PS}$) dobbiamo inoltre richiedere che la sua lunghezza coincida con quella di v_1:

$$\sqrt{3} = |v_1| = |v_2| = |b|\sqrt{2}$$

da cui si deduce $b = \pm\sqrt{6}/2$. Siccome le coordinate del punto R sono date dalla somma delle coordinate di Q e di quelle di v_2 vediamo che l'unica scelta possibile per rispettare la richiesta dell'esercizio è di prendere $v_2 = \sqrt{6}/2(0, 1, 1)$. I vertici del quadrato richesto sono quindi

$$R = Q + v_2 = \left(2, 2 + \sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2\right)$$

e

$$S = P + v_2 = \left(1, 1 + \sqrt{6}/2, 1 + \sqrt{6}/2\right).$$

Soluzione dell'esercizio 2
Ricaviamo le coordinate del punto P. Queste si possono ottenere risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_3 + 4x_1 - 2x_0 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \\ -x_2 + 2x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_3 + 4x_1 - 2x_0 = 0 \\ x_0 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_0 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

e risultano essere $[2, 1, 2, 0]$.

Il fascio di piano contenenti t è

$$\lambda(x_0 - x_1) + \mu(x_2 - x_3) = 0$$

quindi il piano $< P, t >$ è quello che corrisponde ai valori (λ, μ) che soddisfano $\lambda + 2\mu = 0$ cioè

$$< t, P >: -2x_0 + 2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Per ricavare la retta u per P e Q basta imporre che il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sia 2. Questo avviene se e solo se si annullano i minori ottenuti cancellando rispettivamente la prima colonna e la seconda colonna. Di conseguenza delle equazioni cartesiane per $u =< P, Q >$ sono $x_0 - x_2 = 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$.

Ricaviamo l'intersezione tra s e t.

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1 = 0 \\ 2x_1 - x_0 = 0 \\ x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = x_1 \\ x_0 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi $s \cap t$ è l'insieme vuoto (le due rette sono sghembe). Per la formula di Grassmann abbiamo quindi $< s, t >= \mathbb{P}^3$.

La matrice associata alla quadrica $\mathcal{C}$ è

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + \pi)(\lambda^2 - 5\lambda + 3).$$

Le radici dell'ultimo fattore sono entrambe positive (siccome la somma delle radici è 5 e hanno segno concorde). Questo dimostra che la segnatura della matrice è $(3, 1)$ da cui deduciamo che la forma canonica della quadrica è

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Si vede facilmente che l'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ è $[0, 1) \cup \{2, 3\} = X$. Per dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base basta quindi dimostrare che l'intersezione di due suoi elementi B_1 e B_2 è scrivibile come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Se $B_1, B_2 \in \mathcal{A}_2$ allora avremo $B_i = (a_i, 1) \cup C_i$ con $C_i \in \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$. Di conseguenza $B_1 \cap B_2 = (\max(a_1, a_2), 1) \cup (C_1 \cap C_2)$. Se $C_1 \cap C_2$ non è vuoto $B_1 \cap B_2$ è un elemento di $\mathcal{B}$ mentre in caso contrario è un aperto di $[0, 1)$ che quindi si scrive come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Si arriva alla stessa conclusione se almeno uno tra B_1 e B_2 è un elemento di $\mathcal{A}_1$ (e non di $\mathcal{A}_2$).

Mostriamo che (X, τ) è T_1. Siccome $[0, a)$ e $(b, 1) \cup C$ con $a \in (0, 1], b \in (0, 1)$ e $C \in \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ sono aperti per definizione, abbiamo che sono aperti anche gli insiemi

$$(0, 1) \cup \{2, 3\}, [0, a) \cup (a, 1) \cup \{2, 3\}, [0, 1) \cup \{2\} \text{ e } [0, 1) \cup \{3\}$$

per $a \in (0, 1)$. Passando al complementare otteniamo quindi che gli insiemi

$$\{0\}, \{a\}, \{3\} \text{ e } \{2\}$$

sono chiusi. Questo basta per concludere che (X,τ) è T_1 infatti abbiamo appena dimostrato che ogni punto di X è chiuso.

(X,τ) non è T_2 infatti non esistono due intorni U,V rispettivamente di 2 e 3 che siano disgiunti.

Sia U un aperto di (X,τ). Se $U \subseteq [0,1)$ allora[2]

$$f^{-1}(U) = U \cup (-U)$$

e quindi è aperto in $[-1,1]$. Di conseguenza, per dimostrare che f è continua basta controllare che le controimmagini degli elementi di $\mathcal{A}_2$ sono aperti in $[-1,1]$. Si vede facilmente che questo è vero:

$$f^{-1}((a,1)\cup\{2\}) = (-1,-a)\cup(1,a)\cup\{-1\} = [-1,-a)\cup(a,1)$$

$$f^{-1}((a,1)\cup\{3\}) = (-1,-a)\cup(1,a)\cup\{1\} = (-1,-a)\cup(a,1]$$

$$f^{-1}((a,1)\cup\{2,3\}) = (-1,-a)\cup(1,a)\cup\{-1\} = [-1,-a)\cup(a,1].$$

Essendo f suriettiva e continua abbiamo che (X,τ) è compatto e connesso per archi in quanto immagine continua di uno spazio connesso per archi e compatto.

Soluzione dell'esercizio 4

L'annullamento e la simmetria sono ovvie dalla definizione. Bisogna dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i tre punti sono sulla semiretta verticale con origine sull'asse x, la funzione d coincide con la distanza euclidea ristretta ai punti della semiretta (la cosa è ovvia dalla definizione di d) e quindi la disuguaglianza triangolare vale. Se tutti e tre i punti $P_i = (x_i, y_i)$ sono su semirette diverse si ha

$$d(P_1,P_3) = |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_1| \leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare tra i reali abbiamo $|x_3 - x_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2|$ da cui deduciamo

$$d(P_1,P_3) =\leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1| + |x_2 - x_1| = d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3).$$

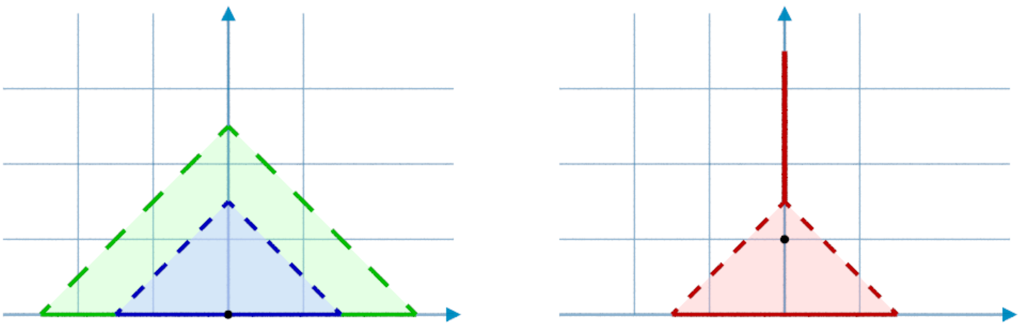
Il caso in cui due punti sono sulla stessa semiretta e il terzo no si analizza in modo analogo.

Si consideri la palla aperta $B = B_r(O)$ di centro l'origine e raggio r. I punti della semiretta verticale passante per l'origine che appartengono a B sono tutti e soli quelli con ordinata minore di r. Se invece consideriamo la semiretta verticale con i punti di ascissa x_0, abbiamo che un punto $P = (x_0, y_0)$ sulla semiretta appartiene a B se e solo se $|x_0| + |y_0| < r$. Da questo si deduce che B coincide con il triangolo con vertici $(-r,0), (r,0)$ e $(0,r)$ (i punti sui lati obliqui non sono nella palla). L'immagine a sinistra in figura rappresenta le palle $B_{3/2}(O)$ e $B_{5/2}(O)$.

[2] Se U è un insieme indichiamo con $-U$ l'insieme

$$-U := \{-x \mid x \in U\}.$$

Figura 1: A sinistra $B_{3/2}(O)$ (in blu) e $B_{5/2}(O)$ (in verde). A destra la palla $B_{5/2}((0,1))$. Le linee continue rappresentano punti che appartengono alle palle. Si noti che i punti del segmento $\{0\} \times [3/2, 7/2)$ appartengono a $B_{5/2}((0,1))$!



Sia ora B la palla di centro $P = (0,1)$ e raggio r. Supponiamo inizialmente $r \leq 1$. Un punto $Q = (x_0, y_0) \neq P$ che non sta sulla semiretta per $(0,1)$ ha distanza da P uguale a $1+|y_0|+|x_0|$ quindi non potrà mai appartenere a B. Per $r \leq 1$ si ha quindi che $B = \{0\} \times (1-r, 1+r)$. Supponiamo ora $r > 1$. Mostriamo che $B = B_r((0,1)) = B_{r-1}((0,0)) \cup (\{0\} \times [0, 1+r))$. Che tutti i punti di $\{0\} \times [0, 1+r)$ appartengano a B e che questi sono tutti e soli quelli della semiretta per P è chiaro. Se un punto $Q = (x_0, y_0)$ su un'altra semiretta appartiene a B allora $|x_0| + |y_1| + 1 < r$ e quindi

$$|x_0| + |y_1| < r - 1$$

che sono proprio i punti di $B_{r-1}((0,0))$. Per un esempio si veda l'immagine a destra in figura.

Dimostriamo che la successione $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è di Cauchy (e quindi non può avere limite). Supponiamo per assurdo che sia di Cauchy. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > N$ si ha $d(P_n, P_m) < 1/2$. Per $n \neq m$ si ha che P_n e P_m sono su due semirette verticali distinte quindi

$$1/2 > d(P_n, P_m) = |1/n - 1/m| + |1| + |1| = 2 + |1/n - 1/m| > 2$$

che è assurdo. Di conseguenza la successione non è di Cauchy e non può avere limite in (X, d). La successione Q_n ha invece limite il quale è $(1,0)$. Per dire che ha limite basta osservare che è contenuta in una semiretta per l'origine sulla quale abbiamo dimostrato che la distanza è quella euclidea. In alternativa basta notare che

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, (1,0)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

Essendo (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile si ha che è T_2. Non è compatto infatti la collezione di palle aperte

$$\{B_n(O)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti.