Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2021/2022

Febbraio

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale con coordinate omogenee $[x_0 : x_1 : x_2]$. Si consideri le seguenti quaterne di punti in posizione generale:

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [0, 1, 0], \quad P_3 = [0, 0, 1], \quad P_4 = [1, 1, 1].$$

$$Q_1 = [2, 1, 3], \quad Q_2 = [1, -2, -5], \quad Q_3 = [4, 0, 1], \quad Q_4 = [5, 3, 9].$$

(1) Trovare, se esiste, una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1, 2, 3, 4$.

(2) Provare che la proiettività f trovata al punto precedente ammette almeno un punto fisso.

(3) Si consideri il punto $R = [8, -4, -5]$ e la conica $\mathcal{Q}$ ottenuta trasformando $\mathcal{Q}' = \{x_0^2 - x_1^2 = 0\}$ via f. Trovare, se possibile, l'equazione della retta tangente a $\mathcal{Q}$ in R.

Esercizio 2. Siano $[\lambda, \mu]$ un punto sulla retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Si consideri la famiglia di cubiche proiettive $C_{[\lambda,\mu]} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ date dall'equazione

$$F_{[\lambda,\mu]}(x_0, x_1, x_2) = \mu \left(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3\right) + 3\lambda x_0 x_1 x_2 = 0.$$

(1) Provare che $C_{[\lambda,\mu]}$ è singolare per $\mu = 0$ e trovare le tangenti principali ai punti singolari della curva.

(2) Supponiamo $\mu \neq 0$. Provare che non esistono punti singolari $P = [p_0, p_1, p_2]$ nel piano proiettivo tali che $p_0 p_1 p_2 = 0$.

(3) Sia $[\lambda, \mu] = [1, 1]$. Trovare le coordinate omogenee dei nove punti di flesso della cubica non-singolare $C_{[1,1]}$.

Soluzione 1. (1) Sappiamo già che le quaterne sono composte da punti in posizione generale, quindi possiamo passare al secondo punto della soluzione. Cerchiamo una base $\{p_1, p_2, p_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $P_i = [p_i]$ per $i = 1, 2, 3$ e $P_4 = [p_1 + p_2 + p_3]$. Si vede subito che la base cercata è data da

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo, cerchiamo una base $\{q_1, q_2, q_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $Q_i = [q_i]$ per $i = 1, 2, 3$ e $Q_4 = [q_1+q_2+q_3]$. Scriviamo

$$Q_1 = [2\lambda_1, \lambda_1, 3\lambda_1], \quad Q_2 = [\lambda_2, -2\lambda_2, -5\lambda_2], \quad Q_3 = [4\lambda_3, 0, \lambda_3], \quad Q_4 = [5\lambda_4, 3\lambda_4, 9\lambda_4],$$

allora le condizioni che cerchiamo sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 5\lambda_4 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 3\lambda_4 \\ 3\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3 = 9\lambda_4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_4 \\ \lambda_3 = \lambda_4 \end{cases}.$$

Scegliendo $\lambda_4 = 1$, otteniamo la base

$$q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per concludere basta trovare una matrice $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $Ap_i = q_i$. In questo caso, visto che $\{p_1, p_2, p_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$, le colonne di A sono i vettori q_i:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad f([x_0, x_1, x_2]) = [2x_0 - x_1 + 4x_2, x_0 + 2x_1, 3x_0 + 5x_1 + x_2].$$

(2) Per definizione, un autovettore di A è un vettore non nullo p tale che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $Ap = \lambda p$. Se $P = [p]$, allora

$$f(P) = [Ap] = [\lambda p] = [p] = P.$$

Rimane da provare che un tale vettore p esista. È sufficiente dimostrare che A ammette un autovalore reale, ma questo segue dal fatto che gli autovalori sono le soluzioni di $\det(A - \lambda I) = 0$, che è un'equazione polinomiale di terzo grado nella variabile λ:

$$d(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 1 = 0.$$

Sappiamo che un'equazione cubica ammette sempre una soluzione reale $\lambda = t$ tale che

$$d(\lambda) = (\lambda - t)d'(\lambda)$$

con $d'(\lambda)$ un polinomio di grado 2 che potrà avere 0 oppure 2 soluzioni reali. In ogni caso, almeno una soluzione reale esiste sempre, dunque avremo sempre almeno un autovalore reale. A cascata, avremo anche un autovettore associato e quindi un punto fisso.

(3) Esplicitiamo l'equazione di $\mathcal{Q}$:

$$x_0^2 - x_1^2 \mapsto (2x_0 - x_1 + 4x_2)^2 - (x_0^2 + 2x_1)^2$$

che possiamo riscrivere come

$$(2x_0 - x_1 + 4x_2)^2 - (x_0^2 + 2x_1)^2 = (3x_0 + x_1 + 4x_2)(x_0 - 3x_1 + 4x_2) = 0.$$

Notiamo che le coordinate omogenee di R annullano entrambi i fattori di $\mathcal{Q}'$ che consiste dell'unione di due rette, dunque R dev'essere il punto di intersezione delle rette

$$r : 3x_0 + x_1 + 4x_2 = 0, \quad s : x_0 - 3x_1 + 4x_2 = 0.$$

Allora R è l'unico punto singolare di $\mathcal{Q}$, dove non è definita la retta tangente. □

Soluzione 2. (1) Se $\mu = 0$, allora possiamo supporre $\lambda = 1$ e la cubica è data dall'equazione

$$F_{[1,0]}(x_0, x_1, x_2) = 3x_0x_1x_2 = 0.$$

Si vede subito che in questo caso la cubica è riducibile e le componenti irriducibili sono date dalle rette di equazioni

$$L_0 = \{x_0 = 0\}, \quad L_1 = \{x_1 = 0\}, \quad L_2 = \{x_2 = 0\}.$$

I punti di intersezione delle tre rette, $P_{01} = [0, 0, 1]$, $P_{02} = [0, 1, 0]$ e $P_{12} = [1, 0, 0]$, appartengono alla cubica. Chiaramente le rette L_i e L_j sono tangenti al punto P_{ij}, dunque questi tre punti sono punti singolari della cubica, anch'essa singolare.

(2) Supponiamo ora $\mu \neq 0$, dunque senza perdere generalità possiamo porre $\mu = 1$ e la cubica è ora data dall'equazione

$$F_\lambda(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0x_1x_2 = 0$$

con $\lambda^3 = -1$. Il sistema di equazioni per trovare le singolarità è dato da F_λ e dalle sue derivate parziali $F_{\lambda,i} := \partial F_\lambda / \partial x_i$ per $i = 0, 1, 2$:

$$(\star) \qquad \begin{cases} x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3\lambda x_0x_1x_2 = 0 \\ F_0(x_0, x_1, x_2) = 3\,(x_0^2 + \lambda x_1x_2) = 0 \\ F_1(x_0, x_1, x_2) = 3\,(x_1^2 + \lambda x_0x_2) = 0 \\ F_2(x_0, x_1, x_2) = 3\,(x_2^2 + \lambda x_0x_1) = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_0^2 = -\lambda x_1x_2 \\ x_1^2 = -\lambda x_0x_2 \\ x_2^2 = -\lambda x_0x_2 \end{cases}.$$

Se supponiamo $x_0 = 0$, allora abbiamo due casi:

$$x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \text{nessun punto nel piano proiettivo,}$$
$$x_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \text{nessun punto nel piano proiettivo.}$$

Possiamo concludere che $x_0 \neq 0$. Ripetendo lo stesso ragionamento con le altre variabili otteniamo che anche $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$. Dunque i punti singolari della cubica C_λ devono avere tutte e tre le coordinate omogenee non nulle.

(3) I punti di flesso di C_1 sono i punti che si annullano sull'hessiana $H_{F_{[1,1]}}$. Scriviamo tutto per bene,

$$F_{[1,1]}(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2 = 0,$$

dunque l'hessiana sarà data dai punti che annullano il determinante della matrice delle derivate seconde di $F_{[1,1]}$:

$$H_{F_{[1:1]}}(x_0, x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 6x_0 & 3x_2 & 3x_1 \\ 3x_2 & 6x_1 & 3x_0 \\ 3x_1 & 3x_0 & 6x_2 \end{pmatrix} = 270x_0x_1x_2 - 54\left(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3\right) = 0$$

Dunque i punti di flesso saranno dati dalle soluzioni del sistema

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 3x_0x_1x_2 = 0 \\ 5x_0x_1x_2 - (x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 0 \end{cases} .$$

Sommando le due equazioni otteniamo la condizione

$$8x_0x_1x_2 = 0.$$

Supponiamo $x_0 = 0$, dunque la prima equazione di $(\star\star)$ diventa

$$x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = -\sqrt[3]{x_2}.$$

Denotiamo con $1, \omega, \omega^2 \in \mathbb{C}$ le radici cubiche dell'unità. Allora i primi tre punti di flesso saranno

$$P_{00} = [0, -1, 1], \quad P_{01} = [0, -\omega, 1], \quad P_{02} = [0, -\omega^2, 1].$$

A questo punto basta ripetere gli stessi passaggi per $x_1 = 0$, ottenendo i flessi

$$P_{10} = [1, 0, -1], \quad P_{11} = [1, 0, -\omega], \quad P_{12} = [1, 0, -\omega^2]$$

mentre per $x_2 = 0$ otteniamo gli ultimi tre punti di flesso

$$P_{10} = [-1, 1, 0], \quad P_{11} = [-\omega, 1, 0], \quad P_{12} = [-\omega^2, 1, 0].$$

□