Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2015/2016

Appello di settembre 2016

Esercizio 1
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, si considerino i sottospazi affini

$$U_a = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; -x + 2a\,y + (3 - a^2)z = 2a\right\},$$
$$V_b = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; \left\{ \begin{array}{l} x + b\,y + z = 1 \\ -x + b\,y + (2 - b^2)z = b \end{array} \right. \right\},$$

con a e b parametri reali.

(i) Determinare per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ la dimensione degli spazi affini U_a e V_b.

(ii) Determinare, $\forall h \in \mathbb{R}$, equazioni parametriche dello spazio affine $U_h \cap V_h$.

(iii) Si denoti con $\tilde{U}_a$ la giacitura di U_a e con $\tilde{V}_b$ la giacitura di V_b. Determinare, $\forall h \in \mathbb{R}$, una base del sottospazio vettoriale $\tilde{U}_h + \tilde{V}_h$ di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2
Sia $g : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$g(x, y, z, t) = (x - y + 4z - 2t, y - 2z, y - z, x + y + z - t)$$

(i) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di g.

(ii) Stabilire se g è iniettiva e/o suriettiva.

(iii) Stabilire se g è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di g. In caso negativo, determinarne la forma di Jordan.

Esercizio 3

Si considerino $\mathbb{E}^2$ con un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y). Al variare del parametro reale a sia $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ la funzione tale che

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 10, 4x + 3y + a).$$

(i) Si dimostri che, per ogni valore di a, f è un'isometria. Si dica, al variare di a, se è diretta o inversa e si dica di che tipo è.

(ii) Posto $a = -5$, sia r una retta di punti fissi di f. Si ricavi $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ dove α è l'angolo convesso formato da r e dalla retta $s : 2y - x = 1024$.

(iii) Si consideri la conica

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy + 10x + 3y^2 - 14y + 18 = 0.$$

Si scriva la sua forma canonica euclidea e un'isometria che la riduce a forma canonica.

Esercizio 4

Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo complesso munito delle coordinate proiettive $[x_0, x_1, x_2]$. Sia r_∞ la retta proiettiva di equazione $x_0 = 0$ e si consideri il piano affine complesso $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{r_\infty\}$ munito delle coordinate affini (x, y) con $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$. Si consideri la cubica affine $\mathcal{C}$ descritta dall'equazione

$$f(x, y) = x^3 - xy^2 + ax^2 + by^2 + 2xy + cy + d = 0.$$

(i) Per quali valori dei parametri si ha che $O = (0, 0)$ è un punto di cuspide ordinaria per $\mathcal{C}$ con tangente principale $2y + x = 0$?

(ii) Per quali valore dei parametri si ha che i punti all'infinito della cubica sono $[0, 0, 1], [0, 1, 1]$ e $[0, 1, -1]$ e la retta $x = 4$ è un asintoto della cubica?

(iii) Per quali valore dei parametri si ha che $P = (0, 1)$ è punto di flesso ordinario con tangente inflessionale $y - 2x - 1 = 0$?

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015
Appello di settembre 2016

Esercizio 5
Si considerino $\mathbb{E}^2$ con un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y). Al variare del parametro reale a sia $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ la funzione tale che

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(-3x + 4y + 10, 4x + 3y + a).$$

(i) Si dimostri che, per ogni valore di a, f è un'isometria. Si dica, al variare di a, se è diretta o inversa e si dica di che tipo è.

(ii) Posto $a = -5$, sia r una retta di punti fissi di f. Si ricavi $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ dove α è l'angolo convesso formato da r e dalla retta $s : 2y - x = 1024$.

(iii) Si consideri la conica

$$\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy + 10x + 3y^2 - 14y + 18 = 0.$$

Si scriva la sua forma canonica euclidea e un'isometria che la riduce a forma canonica.

Esercizio 6
Si consideri $X := [-1, 1]$ e

$$\tau := \{X, \emptyset\} \cup \{A \subseteq X \,:\, 0 \notin A\} \cup \{A \subseteq X \,:\, (-1, 1) \subseteq A\}.$$

(i) Dimostrare che (X, τ) è uno spazio topologico la cui topologia non è confrontabile con la topologia euclidea su $[-1, 1]$.

(ii) Dimostrare che (X, τ) è T_0. (X, τ) è T_1 o T_2?

(iii) Determinare l'interno degli insiemi $\{0\}, \{1\}, (1/3, 2/3)$ e $[-1/2, 1/2)$ e la chiusura degli insiemi $\{0\}, \{1/2\}$ e $\{1\}$.

(iv) Dire se $\{1\}$ è una componente connessa di X e se (X, τ) è connesso.

Soluzione dell'esercizio 1

(i) U_a è definito, per ogni valore di a, da una singola equazione lineare la cui matrice dei coefficienti non è nulla (il coefficiente della variabile x è -1), e quindi ha rango 1 come la matrice completa: si tratta quindi sempre di uno spazio affine di dimensione $3-1=2$, ossia un piano.

Similmente V_b è definito, per ogni valore di b, da due equazioni lineari la cui matrice dei coefficienti ha rango 2 in quanto i tre minori 2×2 non si annullano contemporaneamente per nessun valore di b: questo si può verificare, per esempio, osservando che uno vale $2b$ e quindi si annulla solo per $b=0$, e ce n'è un altro che vale $3-b^2$ e quindi non si annulla per $b=0$. Si tratta quindi sempre di uno spazio affine di dimensione $3-2=1$, ossia una retta.

(ii) Imposto la matrice completa del sistema e procedo all'eliminazione di Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2h & 3-h^2 & 2h \\ 1 & h & 1 & 1 \\ -1 & h & 2-h^2 & h \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ -1 & 2h & 3-h^2 & 2h \\ -1 & h & 2-h^2 & h \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 3h & 4-h^2 & 2h+1 \\ 0 & 2h & 3-h^2 & h+1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & h & 1 & h \\ 0 & 2h & 3-h^2 & h+1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & h & 1 & h \\ 0 & 0 & 1-h^2 & 1-h \end{array}\right)$$

Se $h \notin \{0, \pm 1\}$ possiamo dividere la seconda riga per h e la terza per $1-h^2$, riducendoci a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{h} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+h} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & h & 0 & 1-\frac{1}{1+h} \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{1}{h(1+h)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+h} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{1+h}-h(1-\frac{1}{h(1+h)}) \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{1}{h(1+h)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1+h} \end{array}\right)$$

per cui, se $h \notin \{0, \pm 1\}$, $U_h \cap V_h$ è il punto di coordinate $(x,y,z) = (1-h, 1-\frac{1}{h(1+h)}, \frac{1}{1+h})$.

Consideriamo infine i tre casi rimasti.

Se $h=0$ le ultime due righe della matrice a cui ci siamo ridotti mediante eliminazione corrispondono alle equazioni incompatibili $4z=1$ e $z=1$, e quindi $U_0 \cap V_0 = \emptyset$.

Similmente per $h=-1$ l'ultima equazione è $0=2$, impossibile, e quindi $U_{-1} \cap V_{-1} = \emptyset$.

Infine per $h=1$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

per cui $U_1 \cap V_1$ è la retta di equazioni parametriche $(0,1,0) + t(0,-1,1)$

(iii) Per $h \notin \{0, \pm 1\}$ abbiamo mostrato nel punto precedente che il piano U_h e la retta V_h si intersecano in un solo punto, ragion per cui $\tilde{U}_h \cap \tilde{V}_h = \{0\}$ da cui segue per la formula di Grassmann che $\dim \tilde{U}_h + \tilde{V}_h = 3$ e quindi $\tilde{U}_h + \tilde{V}_h = \mathbb{R}^3$: la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è una soluzione del quesito.

Per $h \in \{0, \pm 1\}$ invece abbiamo visto che la matrice dei coefficienti del sistema considerato nel punto (ii) non ha rango 3, e quindi $\dim \tilde{U}_h \cap \tilde{V}_h \geq 1$. D'altronde nel punto (i) abbiamo visto che $\dim \tilde{V}_h = \dim V_h = 1$ e quindi l'unica possibilità è che $\tilde{U}_h \cap \tilde{V}_h = \tilde{V}_h$ cioé che $\tilde{V}_h \subset \tilde{U}_h$. Da ciò segue che $\tilde{U}_h + \tilde{V}_h = \tilde{U}_h$ e quindi una qualunque base di $\tilde{U}_h$ è una soluzione del quesito. Per esempio, possiamo prendere la base $\{(2h,1,0),(3-h^2,0,1)\}$.

Soluzione dell'esercizio 2

Calcoliamo il polinomio caratteristico di g:

$$\det\begin{pmatrix}1-t & -1 & 4 & -2\\ 0 & 1-t & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1-t & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1-t\end{pmatrix} = (1-t)\det\begin{pmatrix}1-t & 4 & -2\\ 0 & -1-t & 0\\ 1 & 1 & -1-t\end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix}1-t & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1-t\end{pmatrix} =$$

$$= (t^2-1)\det\begin{pmatrix}1-t & -2\\ 1 & -1-t\end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix}1-t & -2\\ 1 & -1-t\end{pmatrix} = (t^2+1)\det\begin{pmatrix}1-t & -2\\ 1 & -1-t\end{pmatrix} = (t^2+1)^2,$$

per cui lo spettro di g è $\{i,-i\}$ ed entrambi gli autovalori hanno molteplicità algebrica 2.

(i+ii) Il nucleo è l'autospazio di autovalore 0. 0 non è una radice del polinomio caratteristico, per cui il nucleo è banale ($\{0\}$) e quindi g è iniettiva. Essendo g un endomorfismo ne segue che è anche suriettiva, per cui l'immagine è tutto $\mathbb{C}^4$, la cui base canonica risponde al primo quesito.

(iii) Per stabilire la diagonalizzabilità dobbiamo determinare la molteplicità geometrica degli autovalori, e quindi calcolare il rango (ed eventualmente una base del nucleo) di $g - iId_{\mathbb{C}^4}$ e di $g + iId_{\mathbb{C}^4}$.

Scrivo la matrice di $g - iId_{\mathbb{C}^4}$ rispetto alla base canonica e procedo con eliminazione di Gauss per calcolarne il nucleo:

$$\begin{pmatrix}1-i & -1 & 4 & -2\\ 0 & 1-i & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1-i & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1-i\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1-i\\ 0 & 1 & -1-i & 0\\ 0 & 1-i & -2 & 0\\ 1-i & -1 & 4 & -2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1-i\\ 0 & 1 & -1-i & 0\\ 0 & 1-i & -2 & 0\\ 0 & i-2 & i+3 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1-i\\ 0 & 1 & -1-i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi che la matrice ha rango 2 per cui la molteplicità geometrica dell'autovalore i è uguale a $4-2=2$ e quindi alla sua molteplicità algebrica. Una base dell'autospazio relativo all'autovalore i è $\{(0,1+i,1,0),(1+i,0,0,1)\}$

Procedo con l'analogo calcolo per l'autovalore $-i$:

$$\begin{pmatrix}1+i & -1 & 4 & -2\\ 0 & 1+i & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1+i & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1+i\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1+i\\ 0 & 1 & -1+i & 0\\ 0 & 1+i & -2 & 0\\ 1+i & -1 & 4 & -2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1+i\\ 0 & 1 & -1+i & 0\\ 0 & 1+i & -2 & 0\\ 0 & -i-2 & -i+3 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1+i\\ 0 & 1 & -1+i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

e ne deduco somilmente che anche la molteplicità geometrica dell'autovalore i è uguale a quella algebrica e una base dell'autospazio relativo è $\{(0,1-i,1,0),(1-i,0,0,1)\}$.

Quindi g è diagonalizzabile ed una base di autovettori è

$$\{(0,1+i,1,0),(1+i,0,0,1),(0,1-i,1,0),(1-i,0,0,1)\}.$$

Soluzione dell'esercizio 3

Siccome, nelle coordinate (x, y), la funzione f si scrive nella forma $f(x, y) = A\underline{x} + \underline{b}$ sappiamo che f è un'isometria se e solo se $A \in O(2)$. La matrice dei termini lineari è

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

e si vede facilmente che è una matrice ortogonale (indipendentemente da a). Vediamo di capire di che tipo di isometria si tratta. Siccome $\det(A) = -1$ avremo che l'isometria non è direttae potrà essere una riflessione rispetto a una retta o una glissoriflessione a seconda che abbia o meno punti fissi. Cerchiamo i punti fissi dell'isometria. Il sistema da risolvere è

$$\begin{cases} -3x + 4y + 10 = 5x \\ 4x + 3y + a = 5y \end{cases} \begin{cases} -8x + 4y = -10 \\ 4x - 2y = -a \end{cases}.$$

Se usiamo la forma matriciale $B\underline{x} = (-10, -a)^T$ si vede che il rango di B è 1 mentre il rango di $[B|(-10, -a)^T]$ è 1 se e solo se $a = -5$. Di conseguenza il sistema ha soluzione se e solo se $a = -5$ e in tal caso la soluzione è uno spazio euclideo di dimensione 1, cioè una retta (che è esattamente la retta che nel testo del problema viene chiamata r). L'equazione parametrica di r (siamo nel caso $a = -5$ quindi) è $4x - 2y - 5 = 0$, o equivalentemente, $y = 2x - 5/2$. La sua direttrice è $d_r = (1, 2)$. La direttrice di s è invece $d_s = (2, 1)$. Per ricavare il coseno dell'angolo formato da r e s basta usare la formula

$$\cos(\alpha) = \frac{< d_r, d_s >}{\| d_r \| \| d_s \|} = \frac{2+2}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

Si ha quindi $\sin(\alpha) = \dfrac{3}{5}$.

La matrice associata alla conica nelle coordinate (x, y) è

$$M := \left[\begin{array}{c|cc} 18 & 5 & -7 \\ \hline 5 & 3 & -1 \\ -7 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

e ha determinante -8. La matrice M_0 dei termini quadratici è ha determinante 8 e traccia 6 quindi ha entrambi gli autovalori positivi (per la precisione gli autovalori sono 2 e 4). Di conseguenza la conica è un'ellisse non degenere.

Due autovettori indipendenti di M_0 sono $(1, 1)^T$ e $(1, -1)^T$. Possiamo considerare quindi l'isometria

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) \end{cases}$$

che ci permette di eliminare il termine in xy nell'equazione di $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &3x^2 - 2xy + 10x + 3y^2 - 14y + 18 = \\ &= 3\frac{1}{2}(x_1 + y_1)^2 - 2\frac{1}{2}(x_1 + y_1)(x_1 - y_1) + 3\frac{1}{2}(x_1 - y_1)^2 + 10\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) - 14\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) + 18 = \\ &= x_1^2\frac{1}{2}(3 - 2 + 3) + y_1^2\frac{1}{2}(3 + 2 + 3) + x_1y_1^2\frac{1}{2}(6 + 0 - 6) - x_1\frac{4}{\sqrt{2}} + y_1\frac{24}{\sqrt{2}} + 18 = \\ &= 2x_1^2 + 4y_1^2 - x_1\frac{4}{\sqrt{2}} + y_1\frac{24}{\sqrt{2}} + 18 \end{aligned}$$

Possiamo completare i quadrati stando attenti a farlo usando solo traslazioni:

$$\begin{aligned}3x^2-2xy+10x+3y^2-14y+18 &= 2x_1^2+4y_1^2-x_1\frac{4}{\sqrt{2}}+y_1\frac{24}{\sqrt{2}}+18= \\ &= 2\left(x_1^2-2x_1\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+4\left(y_1^2+2x_1\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+18= \\ &= 2\left(x_1^2-2x_1\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+4\left(y_1^2+2x_1\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)+18= \\ &= 2\left(x_1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-1+4\left(y_1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-18+18=2\left(x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+4\left(y_1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2-1\end{aligned}$$

Effettuando la traslazione

$$\begin{cases} x_2 = x_1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 = y_1+\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

abbiamo ridotto la conica alla forma canonica desiderata, cioè

$$2x_2^2+4y_2^2=1.$$

Il cambio di coodinate dalle coordinate iniziali a quelle in cui abbiamo la forma canonica è quindi

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+x+y) \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+x-y) \end{cases}.$$

Soluzione dell'esercizio 4

Il punto $O=(0,0)$ appartiene alla cubica se e solo se $f(0,0)=0$, cioè se $d=0$. Vogliamo che O sia un punto singolare quindi abbiamo anche $c=0$ e siccome vogliamo che sia una cuspide con tangente principale $x+2y=0$ è necessario che il complesso dei termini di secondo grado sia un quadrato proporzionale a $(x+2y)^2$. Abbiamo quindi

$$ax^2+by^2+2xy=\lambda(x^2+4xy+4y^2)$$

da cui ricaviamo $a=1/2, b=2$. Non abbiamo più gradi di libertà: questo mostra che c'è una sola cubica della forma data che soddisfa le richieste ed è

$$f(x,y)=x^3-xy^2+(1/2)x^2+2y^2+2xy=0.$$

Torniamo alla scrittura generale

$$f(x,y)=x^3-xy^2+ax^2+by^2+2xy+cy+d=0$$

e scriviamo l'equazione per la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ omogeneizzando f:

$$F(x_0,x_1,x_2)=x_1^3-x_1x_2^2+ax_0x_1^2+bx_0x_2^2+2x_0x_1x_2+cx_0^2x_2+dx_0^3=0.$$

Per trovare i punti all'infinito basta risolvere il sistema $F=x_0=0$. Siccome $F(0,x_1,x_2)=x_1^3-x_1x_2^2=x_1(x_1-x_2)(x_1+x_2)$ avremo che i punti all'infinito della cubica sono quelli richiesti indipendentemente dai parametri. Occupiamoci dell'asintoto $x=4$. Il punto all'infinito della retta $r: x=4$ è $[0,0,1]$ (che appartiene ai punti all'infinito della cubica) infatti omogeneizzandone l'equazione si ottiene $x_1-4x_0=0$. Se deomogeneizziamo rispetto a x_2 avremo che il punto $[0,0,1]$ corrisponderà all'origine dello spazio affine $U_2=\mathbb{P}^2\setminus\{x_2=0\}$ dove possiamo ricavare facilmente le tangenti. Procediamo quindi con il passaggio alle coordinate affini $(z,w)=(x_0/x_2,x_1/x_2)$. L'equazione della traccia affine è

$$f'=w^3-w+azw^2+bz+2zw+cz^2+dz^3$$

e la parte lineare dell'equazione è $-w+bz=0$. La retta che vogliamo sia tangente nel punto $[0,0,1]$ (che in questo spazio affine è ha coordinate $(0,0)$) è $x_1-4x_0=0$ la cui traccia affine in U_2 è $w-4z=0$. Dobbiamo quindi avere $b=4$ perchè r sia asintoto di $\mathcal{C}$.

Perchè la cubica abbia $P=(0,1)$ come punto di flesso è necessario che $f(0,1)=b+c+d=0$. Per imporre che $s: y=x+1$ sia tangente inflessionale possiamo scrivere una parametrizzazione della retta s per controllare l'ordine di annullamento tra $\mathcal{C}$ ed s. Ad esempio scegliamo $x=t, y=2t+1$ in modo che $t=0$ corrisponda al punto P. Abbiamo

$$f(t,1+2t)=t^3-t(2t+1)^2+at^2+b(2t+1)^2+2t(2t+1)+c(2t+1)+d$$

$$=(b+c+d)+t(4b+2c+1)+t^2(a+4b)-3t^3.$$

Abbiamo già imposto $b+c+d=0$ per assicurarci che P appartenesse alla curva. Se vogliamo che s sia tangente dobbiamo chiedere $4b+2c+1=0$. Se vogliamo che la tangente sia di flesso allora anche $(a+4b)$ deve essere 0. In questo modo $I(\mathcal{C},s,P)=3$. Per concludere, osserviamo che P non è mai punto singolare perchè

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+2ax-y^2+2y$$

e $f_x(0,1)=1$: il gradiente non si annulla in P indipendentemente dal valore dei parametri. Le condizioni sono quindi $b+c+d=a+4b=4b+2c+1=0$.

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'esercizio 3.

Soluzione dell'esercizio 6
Siano A e B due elementi di τ diversi da X e dal vuoto. Se entrambi contengono 0 allora entrambi contengono l'intervallo $(-1,1)$ quindi $(-1,1) \subset A \cap B$ e l'intersezione apparterrà a τ. Se uno dei due non contiene 0 allora nemmeno l'intersezione lo contiene. Di conseguenza τ è chiuso per intersezioni finite. Sia ora $\{A_i\}_{i\in I}$ una collezione di elementi di τ. Se nessun elemento contiene 0 allora l'unione non lo conterrà e apparterrà a τ. Se invece esiste i per cui $0 \in A_i$ allora

$$(-1,1) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

che quindi appartiene a τ. Questo basta per mostrare che τ è una topologia. τ non è confrontabile con la topologia euclidea su $[-1,1]$ infatti $[-1,-1/2)$ è un aperto di (X,τ) che non è aperto per la topologia euclidea e $(-1/2,1/2)$ è un aperto per la topologia euclidea che non è un elemento di τ.

Siccome appartengono a τ tutti i sottoinsiemi di X che non contengono 0, per ogni $x, y \neq 0$ abbiamo che $\{x\}$ e $\{y\}$ sono due aperti disgiunti che contengono rispettiamente x e y. Se $x \neq 0$ e se definiamo $U := (-1,1)$ e $V := \{x\}$ abbiamo che U e V sono due aperti che contengono rispettiamente 0 e x e tali che $0 \notin V$. Questo mostra che (X,τ) è T_0. Se scegliamo $x \neq 0, \pm 1$ e $y = 0$ abbiamo che ogni intorno aperto di y contiene x: questo mostra che (X,τ) non è T_1 (e quindi nemmeno T_2).

Siccome $\{1\}$ e $(1/3,2/3)$ non contengono 0, questi sono aperti e coincidono con il loro interno. $\{0\}$ non è aperto e, essendo un punto, non può che avere interno vuoto. L'insieme $[-1/2,1/2)$ non è aperto perchè contiene 0 ma non l'intervallo $(-1,1)$. Il sottoinsieme ottenuto rimuovendo 0 è un aperto e coincide con l'interno (per ragioni di massimalità): $[-1/2,1/2)^o = [-1/2,0) \cup (0,1/2)$.

Sia C un chiuso contenente 0 (e diverso da X). Allora C^c è un aperto che non contiene 0 e questi sono tutti i sottoinsiemi di X che non contengono 0. La famiglia dei chiusi che contengono 0 coincide quindi con

$$\{A \subseteq X \,:\, 0 \in A\}.$$

Se C è un chiuso che non contiene 0 allora il suo complementare è un aperto che contiene 0 e quindi, necessariamente, tutto l'intervallo $(-1,1)$. La famiglia dei chiusi che non contengono 0 è quindi

$$\{\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \{-1,1\}\}.$$

In particolare abbiamo mostrato che $\{0\}$ e $\{1\}$ sono chiusi (e quindi coincidono con la loro chiusura) mentre $\{1/2\}$ non lo è. $\{1/2, 0\}$ è un chiuso e, per ragioni di minimalità, è la chiusura di $\{1/2\}$.

Per concludere basta osservare che, come già visto, $\{1\}$ è sia aperto che chiuso in X. Da questo concludiamo che è una componente connessa di X e che X non è connesso.