Esame scritto di Geometria 2

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2014/2015
Settembre 2015

Esercizio 1

Sia $\mathbb{E}^4$ lo spazio euclideo a quattro dimensioni con un sistema di coordinate cartesiane (x,y,z,w) di centro O. Si considerino la retta r passante per il punto $P:(1,2,0,-1)$ e avente direttrice $d_r=(-1,0,0,1)$, il sottospazio euclideo $s: x+w-2=y-z-3=z+w=0$ e il punto Q tale che $\overrightarrow{PQ}=(3,0,2,1)$.

- Ricavare delle equazioni cartesiane per il piano π parallelo a r e a s e passante per Q;
- Dire se esiste un piano τ ortogonale a π che interseca π esattamente in Q. In caso affermativo scriverne delle equazioni cartesiane.
- Calcolare la proiezione ortogonale del punto P su π e su τ.

Esercizio 2

Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo reale e sia $[x_0,x_1,x_2]$ un sistema di coordinate proiettive. Si consideri, al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$, la conica di equazione

$$\mathscr{C}_k : kx_0^2+2kx_0x_2+(2-2k)x_1x_2+(1-k)x_2^2=0.$$

- Si dica per quali valori di k, $\mathscr{C}_k$ è degenere e si classifichi $\mathscr{C}_k$ per questi valori;
- Si scriva la forma canonica della conica $\mathscr{C}_2$ e una proiettività che la riduce nella sua forma canonica.

Esercizio 3

Si consideri $\mathbb{R}^2$ munito della topologia euclidea e il suo sottospazio $X = \mathbb{R} \times [-1,1]$. Si consideri la relazione di equivalenza

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Longleftrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \quad \text{oppure}$$

$$x_1 = -x_2 = 1 \text{ e } y_1 = -y_2 \quad \text{oppure} \quad x_1 = -x_2 = -1 \text{ e } y_1 = -y_2$$

Si consideri $Y := X/\sim$ munito della topologia quoziente e la relativa proiezione π da X a Y.

- Si dica se Y è compatto o connesso;
- Detti $P_n := \pi\left(\left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)\right)$ e $Q_n := \pi\left(\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)\right)$ dire se le successioni $\{P_n\}_{n\geq 1}$ e $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ hanno limite.
- Ricavare un sottospazio Z di X tale che $\pi(Z)$ è omeomorfo a una circonferenza.

Esercizio 4

Sia $X = [-1,1) \times [-1,1]$ munito della distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{\min(|x_2-x_1|, 2-|x_2-x_1|)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

- Si rappresentino le bolle $B_{1/2}(0,1)$ e $B_{1/2}(-1,0)$ (bolle rispetto alla distanza d);
- Si scriva, giustificando la risposta, un aperto denso A diverso da X;
- Detti $P_n := \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{4}\right)$ e $Q_n := \left(\frac{1}{4}, (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ dire se la successione $\{P_n\}_{n\geq 1}$ converge e se $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ è di Cauchy.

Soluzione dell'esercizio 1

Ricaviamo la giacitura del sottospazio euclideo s (che è una retta poichè le 3 equazioni che lo definiscono sono indipendenti). Per farlo otteniamo prima una scrittura parametrica di s.

$$s : \begin{cases} x+w-2=0 \\ y-z-3=0 \\ z+w=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-w+2 \\ y=z+3 \\ z=-w \end{cases} \quad \begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \\ z=-t \\ w=t \end{cases}$$

La giacitura di s è quindi generata da $d_s := (1,1,1,-1)$. Un Siccome il piano π deve essere parallelo tanto a r quanto a s, abbiamo che le giaciture di r e di s devono essere sottospazi vettoriali di $G(\pi)$. Siccome $d_r = (-1,0,0,1)$ e d_s sono indipendenti e siccome $\dim(G(\pi)) = 2$ per ipotesi, abbiamo che una base per $G(\pi)$ è $\{d_r, d_s\}$. Siccome π passa per il punto

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = (1,2,0,-1) + (3,0,2,1) = (4,2,2,0),$$

possiamo quindi scrivere delle equazioni parametriche per π:

$$\pi : \begin{cases} x = 4-t-u \\ y = 2-u \\ z = 2-u \\ w = t+u \end{cases} .$$

Ricavando i parametri e andando a sostituire otteniamo le equazioni cartesiane cercate:

$$\pi : \begin{cases} u = 2-z \\ x = 4-t-2+z = 2-t+z \\ y = z \\ w = t+2-z \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2-z \\ t = 2-x+z \\ y = z \\ w = 2-x+z+2-z = 4-x \end{cases} \quad \begin{cases} y-z=0 \\ w+x-4=0 \end{cases}$$

Il piano τ esiste perchè siamo nello spazio euclideo di dimensione 4. Per la precisione è il piano passante per Q la cui giacitura è il complemento ortogonale di $G(\pi)$ in $\mathbb{R}^4$. Abbiamo quindi

$$G(\tau) = G(\pi)^{\perp} = \{v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, < v, d_r > = < v, d_s > = 0\} =$$

$$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, d-a = a+b+c-d = 0\} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a-d = b+c = 0\}.$$

che quindi è generata dai vettori $v_1 = (1,0,0,1)$ e $v_2 = (0,1,-1,0)$. Delle equazioni parametriche per τ sono quindi

$$\tau : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 2+u \\ z = 2-u \\ w = t \end{cases}$$

da cui si ricavano le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x-w-4=0 \\ y+z-4=0 \end{cases} .$$

Definiamo, per comodità, i due versori $u_i := \frac{1}{|v_i|} v_i$ per $i \in \{1,2\}$ che costituiscono una base ortonormale di $G(\tau)$. Per proiettare il punto P su τ basta proiettare il vettore $\overrightarrow{QP}$ sulla giacitura di τ. Questa proiezione è data dal vettore

$$f_\tau := < \overrightarrow{QP}, u_1 > u_1 + < \overrightarrow{QP}, u_2 > u_2 =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} < (3,0,2,1),(1,0,0,1) > u_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < (3,0,2,1),(0,1,-1,0) > u_2 = -4\frac{\sqrt{2}}{2}u_1 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}u_2 =$$
$$= -2v_1 + v_2 = (-2,1,-1,-2)$$

da cui si ricava anche la proiezione f_π di $\overrightarrow{QP}$ di $G(\pi)$ per differenza:

$$f_\pi := \overrightarrow{QP} - f_\tau = (-3,0,-2,-1) - (-2,1,-1,-2) = (-1,-1,-1,1).$$

I punti cercati sono quindi

$$P_\pi = Q + f_\pi = (4,2,2,0) + (-1,-1,-1,1) = (3,1,1,1),$$

$$P_\tau = Q + f_\tau = (4,2,2,0) + (-2,1,-1,-2) = (2,3,1,-2).$$

Soluzione dell'esercizio 2

La matrice della conica è

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 0 & 1-k \\ k & 1-k & 1-k \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$\mathrm{Det}(A_k) = (k-1)\left|\begin{bmatrix} k & k \\ 0 & 1-k \end{bmatrix}\right| = -k(k-1)^2.$$

La conica è quindi degenere se e solo se $k \in \{0,1\}$. Per questi due valori la conica si scrive come

$$\mathscr{C}_0 : x_1x_2 + x_2^2 = 0 \quad \mathscr{C}_1 : x_0^2 + x_0x_2 = 0$$

e quindi, in entrambi i casi si decompone come l'unione di due rette incidenti (e non coincidenti) di $\mathbb{P}^2$ (per la precisione $x_1 + x_2 = 0$ e $x_2 = 0$ per la prima conica e x_0 e $x_0 + x_2 = 0$ per la seconda conica). In entrambi i casi l'equazione canonica è quindi $X_0^2 - X_1^2 = 0$.

Poniamo ora $k = 2$. La matrice è

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

e il suo determinante è pari a $-2(2-1)^2 = -2$. La traccia è 1 quindi almeno un autovalore è positivo. Usando l'informazione sul segno del determinante l'unica possibilità per la segnatura della matrice è $(2,1)$. La forma canonica di $\mathscr{C}_2$ è $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$. Per ottenere la proiettività completiamo i quadrati:

$$0 = 2x_0^2 + 4x_0x_2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = 2x_0^2 + 4x_0x_2 + \underline{2x_2^2} - \underline{2x_2^2} - x_2^2 - 2x_1x_2 =$$

$$= 2(x_0+x_2)^2 - 3\left(x_2^2 - 2\frac{1}{3}x_1x_2 + \underline{\frac{1}{9}x_1^2} - \underline{\frac{1}{9}x_1^2}\right) = (\sqrt{2}(x_0+x_2))^2 - \left(\sqrt{3}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_1\right)\right)^2 + \frac{1}{3}x_1^2 =$$

$$= (\sqrt{2}(x_0+x_2))^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_1\right)^2 - \left(\sqrt{3}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_1\right)\right)^2$$

Una proiettività che riduce a forma canonica è quindi

$$\begin{cases} X_0 = \sqrt{2}(x_0 + x_2) \\ X_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x_1 \\ X_2 = \sqrt{3}\left(x_2 - \frac{1}{3}x_1\right) \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 3

Siccome X è prodotto di spazi connessi ($[-1,1]$ e $\mathbb{R}$ muniti della topologia euclidea) è esso stesso connesso. Essendo π continua abbiamo che $\pi(X) = Y$ è connesso[1].

Mostriamo che Y non è compatto scrivendo un ricoprimento aperto che non ammette un sottoricoprimento finito. Per farlo basta ricavare un ricoprimento di aperti saturi di X che non ha un sottoricoprimento finito. Si consideri la collezione $\mathscr{U}$ composta dagli insiemi

$$U_n := (-n,n) \times [-1,1]$$

i quali sono aperti in X perchè U_n è intersezione di un aperto di $\mathbb{R}^2$ con X : $U_n = ((-n,n) \times (-2,2)) \cap X$. Si vede facilmente che è un ricoprimento di X che non ammette un sottoricoprimento finito. Per concludere basta mostrare che gli U_n sono aperti saturi. La classe di equivalenza di (x,y) con $x \neq \pm 1$ è $[(x,y)] = \{(x,y)\}$ mentre le altre classi di equivalenza sono composte da due punti cioè sono insiemi del tipo $\{(1,y),(-1,-y)\}$. Da ciò si conclude immediatamente che U_n è saturo e si deduce quindi che Y (come X) non è compatto.

Gli insiemi $U_1 = (-1/2,1/2) \times (1/2,1]$ e $U_2 = (-1/2,1/2) \times [-1,-1/2)$ sono aperti saturi disgiunti da cui deduciamo che $V_i = \pi(U_i)$ sono aperti disgiunti di Y. Siccome ci sono infiniti termini della successione $\{Q_n\}$ in V_1 e in V_2 (per la precisione $Q_{2m} \in V_1$ e $Q_{2m+1} \in V_2$ per $m \geq 1$) si ha che questa successione non può avere limite.

Mostriamo che $P = [(1,0)]$ è il limite della successione $\{P_n\}_{n \geq 1}$. Se V è un arbitrario intorno aperto di P allora $\pi^{-1}(V) = U$ è un aperto saturo che contiene tutti i punti della classe di equivalenza di $(1,0)$ cioè che contiene $\{(1,0),(-1,0)\}$. Questo vuol dire che U deve contenere un intorno aperto A di $(1,0)$ e un intorno aperto B di $(-1,0)$. In particolare $((-1)^{2n}, \frac{1}{2n}) = (1, \frac{1}{2n})$ è definitivamente in A mentre $((-1)^{2n+1}, \frac{1}{2n+1}) = (-1, \frac{1}{2n+1})$ è definitivamente in B: questo vuol dire che P_n è definitivamente in U. Quindi P è limite della successione.

Si consideri una circonferenza C contenuta in $W := [2,+\infty) \times [-1,1]$ (ad esempio $C = \{(x,y) \mid (x-4)^2 + y^2 = 1\}$). Siccome la relazione di equivalenza è banale sui punti di W si ha che $\pi|_W$ è un omeomorfismo tra W e $\pi(W)$. Di conseguenza $\pi(C)$ è omeomorfa a una circonferenza e possiamo soddisfare le richieste ponendo $Z := C$. Un'altra possibilità (tra le tante!) è quella di considerare l'insieme $D := [-1,1] \times \{0\}$. La relazione di equivalenza è banale nei punti di $(-1,1) \times \{0\}$ mentre gli altri due punti, gli estremi, sono in relazione tra di loro. Operativamente stiamo prendendo un intervallo chiuso sull'asse x e stiamo incollando i suoi estremi: il quoziente $\pi(D)$ è una circonferenza e possiamo quindi porre $Z := D$.

Soluzione dell'esercizio 4

Incominciamo a considerare i punti che appartengono alla bolla $B_{1/2}(0,1)$. Un punto (x,y) di X è in $B_{1/2}(0,1)$ se e solo se

$$d((x,y),(0,1)) = \sqrt{\min(|-x|, 2-|x|)^2 + (1-y)^2} < \frac{1}{2}.$$

Siccome $|x| \leq 2 - |x|$ per ogni $x \in [-1,1)$, avremo che l'ultima formula diventa

$$d((x,y),(0,1)) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \frac{1}{2}.$$

In particolare, la palla $B_{1/2}(0,1)$ è composta da tutti e soli i punti di X che hanno distanza euclidea minore di $1/2$ da $(0,1)$.

[1] Non possiamo trarre la stessa conclusione per la compattezza infatti non è vero che l'immagine di uno spazio non compatto tramite un'applicazione continua non è compatta.

Un punto (x,y) appartiene invece a $B_{1/2}(-1,0)$ se e solo se

$$d((-1,0),(x,y)) = \sqrt{\min(|x+1|, 2-|x+1|)^2 + y^2} < \frac{1}{2}.$$

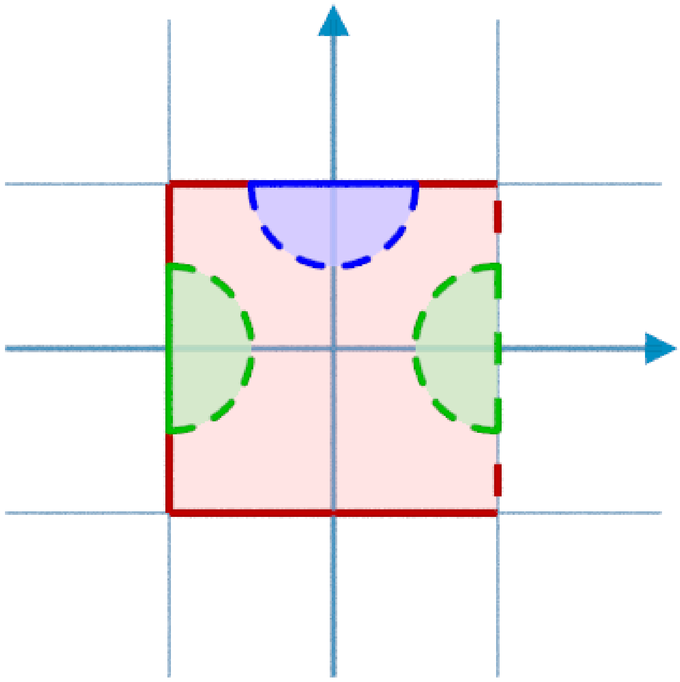
Siccome $|x+1| \leq 2-|x+1|$ se e solo se $x \in [-1,0]$, dovremo distinguere i due casi. Se $x \leq 0$ la formula diventa

$$d((x,y),(0,1)) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} < \frac{1}{2}$$

cioè abbiamo tutti i punti di X che appartengono alla palla euclidea di raggio $1/2$ e centro $(-1,0)$. Se invece $x > 0$ (e quindi $x+1 > 0$), da

$$d((x,y),(0,1)) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} < \frac{1}{2}$$

otteniamo tutti i punti di X che appartengono alla palla euclidea di raggio $1/2$ e centro $(1,0)$. Si veda la figura per una rappresentazione delle palle aperte[2].



Siccome X è metrico (e quindi T_1 con la topologia indotta da d) abbiamo che $\{(0,1)\}^C$ è un aperto. Dalla descrizione appena fatta degli aperti è chiaro che ogni intorno aperto del punto $(0,1)$ deve contenere infiniti punti. In particolare, $\{(0,1)\}$ non è aperto e $\{(0,1)\}^C$ non è chiuso. La chiusura dell'aperto $\{(0,1)\}^C$ non può che coincidere con X quindi possiamo porre $A = X \setminus \{(0,1)\}$.

Siano $P_n := \left(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{4}\right)$ e $Q_n := \left(\frac{1}{4}, (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$. Mostriamo che $\{P_n\}_{n\geq 1}$ converge a $P = (-1, 1/4)$. Siccome

$$\left|2-\frac{1}{n}\right| > 2 - \left|2-\frac{1}{n}\right|$$

per ogni n avremo

$$d(P,P_n) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}$$

[2] In figura è rappresentato lo spazio X con evidenziati (in blu e verde) i punti che appartengono alle bolle aperte $B_{1/2}(0,1)$ e $B_{1/2}(-1,0)$ rispettivamente. Attenzione alle linee tratteggiate!

che converge a 0: questo basta per concludere che la successione ha P come limite. Mostriamo che $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ è non è di Cauchy. Per ogni n, m avremo

$$d(Q_n, Q_m) = \sqrt{\left((-1)^m\left(1-\frac{1}{m}\right) - (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^2}.$$

Se n e m hanno la stessa parità avremo

$$d(Q_n, Q_m) = \sqrt{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2} = \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$$

che possiamo controllare con un numero arbitrariamente piccolo mentre se n e m hanno parità opposta avremo

$$d(Q_n, Q_m) = \sqrt{\left(2-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)^2} = \left|2-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right|.$$

Per n e m grandi avremo che $|n^{-1}+m^{-1}|$ è piccolo quindi possiamo maggiorare (definitivamente) la distanza, ad esempio, con 1. Questo basta per mostrare che la successione non è di Cauchy.