Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2021/2022

Terzo appello - 1 settembre 2022

Esercizio 1. Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale dato dalle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ dotato della base $\mathcal{E}$:

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si consideri la forma bilineare

$$\begin{aligned} q : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto q(A, B) := \operatorname{tr}(AB). \end{aligned}$$

(1) Calcolare la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{E}$, il rango e la segnatura della forma bilineare q.

(2) Trovare una base ortogonale $\mathcal{B}$ per $M_2(\mathbb{R})$.

(3) Si consideri il sottospazio $W := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} A = 0\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Calcolare la segnatura della forma q ristretta a $W \times W$.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si consideri la curva proiettiva C di equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1^2 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 0.$$

(1) Trovare i punti singolari di C, la loro molteplicità e le tangenti principali.

(2) Provare che l'hessiana H_F di C è equivalente all'equazione

$$N(x_0, x_1, x_2) = 25 x_0^2 x_1^2 x_2^2 - 3 \left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right) F(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

(3) Provare che C non ammette flessi.

Soluzione 1. (1) Cominciamo descrivendo esplicitamente la mappa q: siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due elementi di $M_2(\mathbb{R})$, allora

$$q(A, B) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}).$$

Riscriviamo gli elementi di $M_2(\mathbb{R})$ come vettori di $\mathbb{R}^{2\times 2}$ usando l'ordine lessicografico:

$$A = (a_{ij}) \quad \longleftrightarrow \quad A = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^t.$$

A questo punto non rimane che trovare una matrice $Q \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $q(A, B) = A^tQB$, dove stiamo considerando A, B come elementi di $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Guardando alla forma di $q(A, B)$ ottenuta sopra, si può controllare subito che

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice cercata. Per calcolare rango e segnatura di q abbiamo bisogno di calcolare gli autovalori di Q:

$$\det(Q - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^3(1+\lambda).$$

Gli autovalori di Q sono i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\det(Q - \lambda I) = 0$, da cui segue subito che $\lambda = 1$ (contato con molteplicità 3) e $\lambda = -1$. Non essendoci autovalori nulli, segue che $\operatorname{rank} q = 4$, mentre i segni degli autovalori ci dicono che $\operatorname{sgn} q = (3, 1)$. In particolare, q non è definita positiva.

(2) Abbiamo un risultato che ci garantisce che una base data dagli autovettori di Q sia automaticamente ortogonale. Gli autovettori associati all'autovalore $\lambda = 1$ si ottengono come le soluzione $v = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})^t \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tali che

$$(Q - I)\, v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} -v_{12} + v_{21} = 0 \\ v_{12} - v_{21} = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v = v_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_{12}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $v_{11}, v_{12}, v_{22} \in \mathbb{R}$. D'altra parte, l'autovettore associato all'autovalore $\lambda = -1$ è soluzione del sistema

$$(Q+I)\,v=0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} 2v_{11}=0 \\ v_{12}+v_{21}=0 \\ 2v_{22}=0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad v=v_{12}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

con $v_{12}\in\mathbb{R}$. Riscriviamo i quattro vettori trovati in precedenza come elementi di $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=e_{11}, \qquad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=e_{12}+e_{21}, \qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=e_{22}, \qquad \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=e_{12}-e_{21}.$$

(3) Affinché una matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ abbia traccia nulla, è necessario che $a_{11}=-a_{22}$, quindi

$$W \quad \longleftrightarrow \quad \left\{(-a_{22},a_{12},a_{21},a_{22})^t\in\mathbb{R}^4 : a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}\simeq\mathbb{R}^3.$$

Ecco allora che $q|_{W\times W}$ si scriverà, dati $A,B\in W$, come

$$q(A,B)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21} & -a_{22}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ -a_{21}b_{22}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}+2a_{22}b_{22}.$$

A questo punto diventa immediato vedere che la nuova matrice 3×3 che descrive la forma bilineare sia

$$Q'=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono facilmente $\lambda=-1,1,2$. Quindi possiamo concludere che la segnatura di q ristretta a $W\times W$ è data da $(2,1)$. □

Soluzione 2. (1) Per prima cosa i punti singolari di C sono i punti della curva che si annullano lungo le derivate parziali $F_i(x_0,x_1,x_2):=\partial F/\partial x_i$ per $i=0,1,2$. Dunque si tratta dei punti che sono soluzione del sistema

$$(\star) \qquad \begin{cases} x_0^2x_1^2+x_0^2x_2^2+x_1^2x_2^2=0 \\ F_0(x_0,x_1,x_2)=2x_0\left(x_1^2+x_2^2\right)=0 \\ F_1(x_0,x_1,x_2)=2x_1\left(x_0^2+x_2^2\right)=0 \\ F_2(x_0,x_1,x_2)=2x_2\left(x_0^2+x_1^2\right)=0 \end{cases}.$$

Procediamo per casi usando l'ultima equazione di $(\star)$. Se $x_2=0$, allora le altre tre equazioni di $(\star)$ diventano

$$\begin{cases} x_0^2x_1^2=0 \\ 2x_0x_1^2=0 \\ 2x_0^2x_1=0 \end{cases}.$$

Se $x_0 = 0$, otteniamo $P_1 = [0,1,0]$. D'altra parte, se $x_1 = 0$, otteniamo $P_0 = [1,0,0]$.

Rimane da studiare il caso $x_0^2 + x_1^2 = 0$, cioè $x_0 = \pm i x_1$, per il quale le tre equazioni rimanenti di $(\star)$ diventano

$$\begin{cases} -x_1^4 = 0 \\ \pm 2ix_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 0 \\ 2x_1\left(-x_1^2 + x_2^2\right) = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P_2 = [0,0,1].$$

Dalle simmetrie del polinomio F, possiamo limitarci a studiare le caratteristiche della singolarità in P_0: saranno le stesse anche negli altri casi. Il punto P_0 vive nella carta $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ (e possiamo supporre senza perdere di generalità che $x_0 = 1$), dove si scriverà come $P_{0,0} = (0,0)$. Per studiare la sua molteplicità, ci basta guardare alla traccia di C_0 di C in U_0 data dal polinomio:

$$F(1, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 0.$$

Notiamo infatti che i monomi di grado minimo hanno grado 2, dunque concludiamo che

$$m_{P_0}(C) = m_{P_{0,0}}(C_0) = 2.$$

Le tangenti principali, invece, si ottengono dalla fattorizzazione del termine omogeneo di grado minimo, per cui

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$$

e otteniamo le rette $\{x_1 \pm ix_2 = 0\}$. Mutatis mutandis, per P_1 e P_2 otterremo ancora $m_{P_i}(C) = 2$ e le tangenti principali saranno, rispettivamente,

$$\{x_0 \pm ix_2 = 0\}, \quad \{x_0 \pm ix_1 = 0\}.$$

(2) L'equazione di H_F si ottiene come il determinante della matrice delle derivate seconde, dunque

$$H_F(x_0, x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} 2(x_1^2 + x_2^2) & 4x_0x_1 & 4x_0x_2 \\ 4x_0x_1 & 2(x_0^2 + x_2^2) & 4x_1x_2 \\ 4x_0x_2 & 4x_1x_2 & 2(x_0^2 + x_1^2) \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante usando la regola di Sarrus, si ottiene che possiamo riscrivere H_F come

$$8 \cdot \left(16x_0^2x_1^2x_2^2 - 3\left(x_0^4x_1^2 + x_0^4x_2^2 + x_0^2x_1^4 + x_0^2x_2^2 + x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4\right)\right) = 0.$$

D'altra parte abbiamo che

$$\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right) F(x_0, x_1, x_2) = x_0^4x_1^2 + x_0^4x_2^2 + x_0^2x_1^4 + x_0^2x_2^2 + x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + 3x_0^2x_1^2x_2^2.$$

Dunque possiamo scrivere

$$N(x_0, x_1, x_2) = 25x_0^2x_1^2x_2^2 - 3\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right) F(x_0, x_1, x_2) = \frac{H_F(x_0, x_1, x_2)}{8}$$

e i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che si annullano su H_F sono gli stessi che si annullano su N.

(3) Usiamo il punto precedente per provare che C non ammette flessi. Quest'ultimi sono i punti di

C le cui coordinate si annullano su H_F o, equivalentemente, su N. Dunque risolviamo il sistema

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1^2 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 0 \\ N(x_0, x_1, x_2) = 25 x_0^2 x_1^2 x_2^2 - 3\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2\right) F(x_0, x_1, x_2) = 0 \end{cases} .$$

Combinando le equazioni di $(\star\star)$ otteniamo che i punti di flesso sono i punti non-singolari di C tali che

$$25 x_0^2 x_1^2 x_2^2 = 0.$$

Se $x_0 = 0$, allora dalla prima equazione di $(\star\star)$ otteniamo $x_1^2 x_2^2 = 0$, da cui ricaviamo i punti singolari P_1, P_2. Allo stesso modo se $x_1 = 0$ otteniamo P_0, P_2 e se $x_2 = 0$ ritroviamo P_0, P_1. Visto che gli unici candidati a essere punti di flesso sono i punti singolari di C, concludiamo che non ci sono punti di flesso. $\square$