GEOMETRIA A 2017/18 – Esercizi 27-29 Novembre 2017

Esercizio 1. Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -k & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando la regola di Cramer:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=1 \\ y+2z=-1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=-8/3 \\ 10x+y+2z=0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare tutte le soluzioni di ciascuno dei seguenti sistemi lineari al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x+ky=4-k \\ kx+4y=4 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x-2y+(3+k)z=k+1 \\ x+(2k+4)y=-2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} (k-1)x+(k+1)y+kz=k \\ kx+(k+1)y+kz=0 \\ (k-1)x+kz=k \end{cases}, \qquad \begin{cases} (2-k)x+2y-z=0 \\ 3x+(3-k)y-z=5-k \\ -ky+(1+k)z=k+3 \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare, per ciascuna delle seguenti matrici, per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ essa è invertibile, e calcolarne l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & k & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ 0 & k & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2k & -1 \\ k & -1 & 0 \\ 6-2k & 4k+2 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Provare che la matrice A è invertibile.

(ii) Trovare e dimostrare una formula per il calcolo di A^n, dove $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si spieghi perché la matrice $B = A - \frac{1}{2}{}^t(A - I_2)$ è invertibile.

(iv) Calcolare $\det(B^{25})$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$, e si considerino i punti $A(3,0,-1)$, $B(1,1,1)$, $C(1,2,0)$, $A'(-1,-1,-1)$, $B'(1,0,0)$, $C'(0,-1,0)$.

(i) Si diano equazioni cartesiane del piano p contenente A, B, C e del piano p' contenente A',B', C'.

(ii) Si diano equazioni parametriche dello spazio affine $p \cap p'$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$. Verificare che la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

è parallela al piano $\pi : x + 2y + z = 1$.

Esercizio 8. Siano date le rette, in uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$,

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad r''' : \begin{cases} x + y = 4 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

(i) Determinare, per ciascuna delle coppie di rette (r, r'), (r, r''), (r, r'''), (r', r''), (r', r'''), (r'', r''') se sono coincidenti, parallele, incidenti o sghembe.

(ii) Inoltre, per ciascuna delle coppie di rette suddette che siano incidenti o parallele ma non coincidenti, si calcoli l'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Esercizio 9. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{R}^3$. Si discuta, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la posizione relativa delle rette

$$r : \begin{cases} x + 4y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + ky + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r' : \begin{cases} x + 4y + kz - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 10. Nello spazio affine $\mathbb{R}^5$, si considerino le rette

$$r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che r ed s sono sghembe e determinare le equazioni parametriche e cartesiane dell'unico spazio affine di dimensione 3 che le contiene.

Esercizio 11. Nello spazio affine $\mathbb{R}^4$, si considerino i punti $A = (1, -1, 0, 1)$, $B = (0, 1, -1, 0)$, $C = (1, 0, -1, 0)$ e $D = (1, 2, 0, 1)$. Determinare:

(i) equazioni cartesiane della retta passante per A e parallela all'unica retta passante per B e C;

(ii) equazioni cartesiane del piano passante per il punto D e parallelo al piano per A, B e C;

(iii) l'equazione cartesiana dell'iperpiano affine α passante per i punti A, B, C e D;

(iv) l'equazione cartesiana dell'iperpiano affine β passante per $E = (-1, 1, 2, -1)$ e parallelo ad α.

Esercizio 12. In uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$, data la retta

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -t \end{cases}$$

si determini

(i) il fascio di iperpiani (in questo caso si parla di fascio di piani) contenenti r;

(ii) il piano contenente r ed il punto $A(1, 1, 0)$ (se esiste);

(iii) il piano contenente r e parallelo al piano $-2x + 2y + 5z - 4 = 0$ (se esiste).

Esercizio 13. Nello spazio affine $\mathbb{R}^4$, si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 2 + t \\ x_4 = -1 - t \end{cases}.$$

(i) Scrivere un'equazione dell'iperpiano contenente $P_1 = (1, -1, 1, -1)$, $P_2 = (-1, 1, -1, 1)$ e r_1.

(ii) Determinare lo spazio affine di dimensione minima contenente le rette r_1 e r_2.

(iii) Determinare se esiste una retta che interseca simultaneamente r_1, r_2 e r_3.

Esercizio 14. Siano dati $P = (0, 2, 1, -1, 1) \in \mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ e $W \subseteq \mathbb{R}^5$, il sottospazio generato dai vettori $v_1 = {}^t(1, 0, -1, 0, 1), v_2 = {}^t(1, -1, 0, 1, 1), v_3 = {}^t(1, 1, 0, 0, 0)$. Si ponga S come il sottospazio affine passante per P e avente giacitura W.

(i) Determinare la dimensione di S e una sua giacitura minima.

(ii) Determinare equazioni cartesiane e parametriche di S.

(iii) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della giacitura di S.

(iv) Stabilire se $Q = (1, 0, 1, 0, 1) \in S$.

(v) Determinare l'intersezione tra S e il sottospazio affine passante per Q e avente giacitura W.

(vi) Determinare l'intersezione tra S con il sottospazio affine $T : \begin{cases} x_1 - x_2 = \pi \\ x_3 + x_1 = 1. \end{cases}$

Esercizio 15. Sia $k \in \mathbb{R}$. In uno spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, sia Oe_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine e siano X, Y, Z, W le coordinate. Siano S e T_k i sottospazi con le seguenti equazioni:

$$S : \begin{cases} X - Y + Z = -1 \\ X + Y = 2 \end{cases} \qquad T_k : \begin{cases} (k+1)X + (k-1)Y + Z + kW = -1 \\ 3X + 3Y = 6. \end{cases}$$

(i) Calcolare le dimensioni di S e di T_k.

(ii) Determinare per quali valori di k si ha che S è parallelo a T_k.

(iii) Determinare le equazioni di tutte le rette r in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ tali che r sia parallela a S e T_k e r passi per $A(0,0,1,3)$.

Esercizio 16. Sia $U_h \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio affine corrispondente alle soluzioni del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h^2 + h + 2 \\ -5h^2 + 14h \\ 4h^2 - 2h + 1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

(i) Determinare per quali $h \in \mathbb{R}$, il più piccolo spazio affine contenente U_h e il piano

$$H : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 - 3 = 0 \end{cases}$$

ha dimensione al più 3.

(ii) Dimostrare che i sottospazi affini U_1 e U_2 formano una coppia di rette parallele e calcolare le equazioni cartesiane del piano K che le contiene.

(iii) Determinare la giacitura dell'iperpiano contenente il piano K e passante per il punto $P(1,1,0,1)$.