Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2022/2023

Terzo appello - Settembre 2023

Esercizio 1. Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e i punti

$$P_1 = [1, 0, 0] \quad P_2 = [0, -1, 1] \quad P_3 = [0, 0, -1] \quad P_4 = [1, -1, 2]$$

$$Q_1 = [3, 1, -1] \quad Q_2 = [-1, -3, 3] \quad Q_3 = [-1, 1, 3] \quad Q_4 = [1, -1, 5]$$

(1) Dimostrare che esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale per cui valga $f(P_i) = Q_i$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$. Determinare una matrice associata alla proiettività f rispetto al riferimento proiettivo canonico di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(2) Dimostrare che esiste un punto P ed una retta r tale per cui
- $P \notin r$.
- $f(P) = P$.
- La retta r è puntualmente fissata da f.

Esercizio 2. Si consideri la curva affine $C := C_{a,b} \subset \mathbb{C}^2$ di equazione

$$f_{a,b}(x, y) = x^2(y - 5)^2 + y(bx + a^2y) = 0$$

dove a, b sono parametri in $\mathbb{C}$.

(1) Dimostrare che il punto $P = [0, 1, 0]$ è improprio per la curva C. Determinare se P è liscio o meno in funzione di a, b. Ricavare inoltre gli eventuali asintoti a C passanti per P nel caso $b = 0$.

(2) Discutere per quali valori di $a, b \in \mathbb{C}$ il punto $O = (0, 0)$ è singolare per C. Calcolare la molteplicità di O e dire quando rappresenta un punto singolare ordinario.

(3) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{C}$ tali per cui la curva C passi per il punto $Q = (-1, 1)$ e sia tangente in Q alla retta $r : 3x + 5y - 2 = 0$.

N.B. Nel punto (1) si deve considerare la chiusura proiettiva di C pensando $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ attraverso l'isomorfismo $\mathbb{C}^2 = U_0$.

Soluzione 1. (1) Iniziamo col mostrare che (P_1, P_2, P_3, P_4) e $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ sono entrambi riferimento proiettivo. La matrice associata a (P_1, P_2, P_3) è la seguente

$$A_{P_1,P_2,P_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Essendo triangolare superiore con entrate sulla diagonale diverse da 0 si ha che $det(A_{P_1,P_2,P_3}) \neq 0$. Facilmente si osserva anche che P_4 non appartiene a nessuna retta $l_{i,j}$ passante per P_i, P_j con $i, j = 1, 2, 3$.

$$l_{1,2} : x_1 + x_2 = 0 \quad l_{1,3} : x_1 = 0 \quad l_{2,3} : x_0 = 0$$

Analogamente si dimostra che (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) è un riferimento proiettivo. Per trovare una matrice rappresentativa di f rispetto alla base standard, cerchiamo prima una relazione non banale della forma

$$a(1, 0, 0) + b(0, -1, 1) + c(0, 0, -1) = k(1, -1, 2) \quad \text{con} \quad a, b, c, k \in \mathbb{R}$$

Una soluzione non banale è data da $(1, 1, -1, 1)$. Le immagini dei vettori dovranno soddisfare la stessa relazione lineare di dipendenza, ovvero

$$(3a', a', -a') + (-b', -3b', b') - (-c', c', 3c') = (k', -k', 5k')$$

Risolvendo il sistema lineare rispetto a (a', b', c', k') in $\mathbb{R}$ otteniamo la soluzione particolare $(1, 1, -1, 1)$. Pertanto un isomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato a f sarà della forma

$$T(1, 0, 0) = (3, 1, -1) \quad T(0, -1, 1) = (-1, -3, 3) \quad T(0, 0, -1) = (1, -1, -3)$$

Definite le due basi

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad B' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Avremo che la matrice associata al riferimento canonico $M_{e,e,}(T)$ sarà uguale a

$$M_{e,e}(T) = M_{e,b'}(Id_{\mathbb{R}^3})(M_{e,b}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$$

Si calcola facilmente

$$(M_{e,b}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Perciò una matrice rappresentativa è la seguente:

$$M_{e,e}(T) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Per trovare i punti e le rette fissate procediamo a diagonalizzare la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ottenuta al punto precedente. Calcoliamo quindi il polinomio caratteristico

$$P_M(\lambda) = det(\lambda I - M) = det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda - 4 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Sviuppando secondo la prima riga col metodo di Laplace otteniamo

$$P_M(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4) - (\lambda - 4) = (\lambda - 4)[(\lambda - 3)^2 - 1] = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2)$$

Perciò gli autovalori di M sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$) di molteplicità algebrica rispettivamente 2 e 1. Notate con $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate proiettive calcoliamo gli autospazi relativi:

$$V_4 = \{[x_0, x_1, x_2] | (4I - M) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad r : x_0 + x_2 = 0$$

$$V_2 = \{[x_0, x_1, x_2] | (2I - M) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P = [1, -1, 1]$$

Notiamo che siccome la prima coordinata e l'ultima coordinata di P non sommano a 0 si ha che $P \notin r$. Per definizione di proiettività e autospazio inoltre abbiamo che P è un punto fissato per la proiettività f e la retta r è fissata puntualmente.

□

Soluzione 2. (1) Identifichiamo il piano affine $\mathbb{C}^2$ con la carta affine

$$U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] | x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

tramite l'identificazione naturale di coordinate

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad \text{e} \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

Indicata quindi con $\overline{C}$ la chiusura proiettiva di C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ otteniamo la seguente equazione:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2(x_2 - 5x_0)^2 + x_0^2 x_2(bx_1 + a^2 x_2) = 0$$

Per trovare i punti impropri quindi dobbiamo intersecare $\overline{C}$ con la retta all'infinito $H_0 = \{x_0 = 0\}$. Consideriamo perciò il seguente sistema:

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2(x_2 - 5x_0)^2 + x_0^2 x_2(bx_1 + a^2 x_2) = 0 \\ H_0 = x_0 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad x_1^2 x_2 = 0$$

Notiamo perciò che il punto $P = [0, 1, 0]$ soddisfa il sistema e quindi è un punto improprio per la curva C. Per studiare la natura del punto P e determinarne le tipologie di asintoti scegliamo di restringerci alla carta affine

$$U_1 = \{[x_0, x_1, x_2] | x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

Questo induce le nuove coordinate affini $u = \frac{x_0}{x_1}$ e $v = \frac{x_2}{x_1}$. In U_1 il punto improprio P corrisponde all'origine e l'equazione di $\overline{C} \cap U_1$ è data da:

$$f_1(u, v) = (v - 5u)^2 + u^2 v(b + a^2 v) = 0$$

Notiamo inizialmente che $f_1(u, v)$ non contiene termini di grado 1, perciò P è sempre un punto singolare di $\overline{C}$ per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{C}$. Studiamo ora la natura della singolarità: la forma di grado 2 associata a $f_1(u, v)$ è la seguente

$$(f_1(u, v))_2 = (v - 5u)^2$$

Notiamo che per ogni scelta di $a, b \in \mathbb{C}$ la forma di grado 2 $(f_1(u, v))_2$ non è mai nulla. Perciò P è sempre un punto doppio con un'unica tangente dopppia. Perciò si ha un unico asintoto dato da $v - 5u = 0$. Passando alla carta affine iniziale U_0 si ha come asintoto $y = 5$.

(2) Notiamo che $(0, 0)$ appartiene alla curva C per ogni scelta dei parametri $a, b \in C$. Inoltre la parte omogenea di grado 2 associata è

$$f(x, y)_2 = 25x^2 + bxy + a^2 y^2$$

che è sempre non nulla per ogni valore di a, b. Perciò l'origine $O = (0, 0)$ è sempre un punto doppio per la curva C. Calcoliamo il discriminante di $f(x, y)_2$:

$$\Delta = b^2 - 100a^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad b = 10a \quad \text{oppure} \quad b = -10a$$

Perciò abbiamo due casi:

(a) Se $b \neq \pm 10a$ il punto $(0, 0)$ è un punto doppio ordinario.

(b) Se $b = \pm 10a$ il punto $(0, 0)$ è un punto doppio non ordinario, con tangente principale data da $5x + ay = 0$ nel caso $b = 10a$ e $5x - ay = 0$ nel caso $b = -10a$.

(3) Imponiamo il passaggio per il punto $Q = (-1, 1)$. Otteniamo quindi

$$f(-1,1) = 1(-4)^2 + (-b + a^2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad b = a^2 + 16$$

Calcoliamo inoltre le derivate parziali di f valutate in $Q = (-1, 1)$, che rappresenteranno l'inclinazione della retta tangente a C in Q. Abbiamo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = b - 32 \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2a^2 - b - 8 \end{cases}$$

Poichè vogliamo che la retta tangente sia $3x + 5y - 2 = 0$ dobbiamo imporre che il vettore direzione $(3, 5)$ sia proporzionale al vettore direzione $(b-32, 2a^2-b-8)$ derivante dal sistema di derivate parziali. Abbiamo perciò la condizione

$$\mathit{Rango} \begin{pmatrix} b-32 & 2a^2-b-8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{se e solo se} \quad \mathit{det} \begin{pmatrix} b-32 & 2a^2-b-8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

Ricaviamo perciò la condizione $8b - 6a^2 - 136 = 0$. Per concludere dovremmo perciò risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} b = a^2 + 16 \\ 8b = 6a^2 + 136 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad a^2 + 16 = \frac{3}{4}a^2 + 17$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in a troviamo le soluzioni $a = \pm 2$ e sostituendo $b = 20$. Perciò la curva affine C soddisfa la richiesta dell'esercizio se e solo se $(a, b) = (\pm 2, 20)$.

$\square$