



MATHTRIP:

***un viaggio
alla
scoperta
della
matematica***

Indice

| | |
|--|-----------|
| Matematica... ..nella Storia..... | 03 |
| Giochiamo insieme!..... | 10 |
| Matematica... ..nella Letteratura... | 11 |
| Giochiamo insieme!..... | 20 |
| Matematica... ..nell'Arte..... | 21 |
| Giochiamo insieme!..... | 28 |
| Matematica... ..nella Geografia..... | 29 |
| Giochiamo insieme!..... | 32 |
| Matematica... ..nella Biologia..... | 33 |
| Matematica... ..nell'Informatica... | 41 |
| Soluzioni dei giochi!..... | 45 |

Ciao! Mi presento sono Coccinella
Isabella e ti accompagnerò in
questo viaggio alla scoperta della
matematica!!
Sei pronto per partire??



Matematica...

La parola "Matematica" deriva dal greco *màthema*, cioè conoscenza o apprendimento.



- I cacciatori del **Paleolitico** non conoscevano i numeri, ma usavano parole come "uno" e "molti" per definire la quantità.

Nel **Neolitico** gli uomini iniziarono ad allevare gli animali; nacque così l'esigenza

di controllare il bestiame: alcuni ammucchiavano una pietra per ogni animale, altri incidevano tacche su bastoni o ossa. Così gli uomini iniziarono a contare!

- I popoli della **Mesopotamia** furono i primi a utilizzare i simboli numerici durante gli scambi commerciali, per misurare i terreni agricoli e per registrare le osservazioni astronomiche. Il loro sistema di numerazione era costituito da simboli cuneiformi, diversi per unità e decine, tracciati premendo uno strumento appuntito su una tavoletta di argilla.



Curiosità: Come misuravano i popoli antichi?

Per gli Egizi l'unità di misura di base per le lunghezze erano il CUBITO (= avambraccio dal gomito al dito medio), la SPANNA (= la misura aperta della mano) e il PALMO (= quattro dita). Ma c'era un problema! La lunghezza variava molto da persona a persona. Dovettero perciò creare un'unità campione standard: il CUBITO REALE (= 50 cm circa). I Babilonesi come unità di misura per la capacità usavano il KA, cioè la quantità d'acqua che un cubo con il lato lungo una spanna poteva contenere.

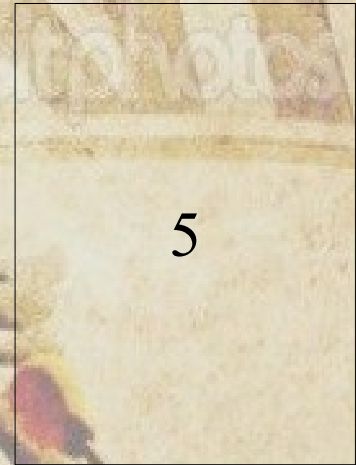




...nella Storia

- Nell'**Antico Egitto**, per necessità pratiche, vennero molto utilizzate e sviluppate l'Aritmetica e la Geometria: per contare le merci in magazzino e le imposte, per piccole e grandi opere di costruzione come le piramidi, per studi astronomici e per misurare la piena del Nilo e la grandezza dei campi. Questo nasceva dalla necessità di ristabilire i confini delle proprietà che venivano cancellati dalle inondazioni del Nilo.

Per misurare si usava una corda divisa, con dei nodi, in 12 parti uguali e tre paletti. Fissavano a terra con due paletti il terzo e l'ottavo nodo poi tendevano la corda e fissavano a terra il terzo paletto. Ottenevano sempre un triangolo rettangolo le cui misure dei lati erano 3, 4 e 5 (la futura terna pitagorica!).



Riuscirono inoltre a trovare una prima approssimazione del numero $\pi=3,1415\dots$ (utile per risolvere problemi relativi al cerchio). Si calcolavano aree e volumi, si facevano operazioni di addizioni e sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, si scrivevano i decimali mediante l'uso delle frazioni e del geroglifico della "bocca" che significava "una parte di". Utilizzavano un sistema di numerazione in base 10, come il nostro. Sia gli Egizi che i Sumeri per scrivere i numeri si servivano di un metodo additivo: il simbolo veniva ripetuto tante volte quante erano le unità che si volevano rappresentare. Poiché non esisteva lo zero, appositi segni indicavano decine, centinaia, migliaia,...

Curiosità: 9 simboli antichi...

Si pensa che i simboli più antichi fossero stati scelti perché ogni cifra conteneva tanti tratti quante erano le unità contenute nel numero rappresentato.

8

9

- Fu in **India**, a partire dal 1000 a.C., che si cominciarono a usare lo zero, i numeri negativi, i *numeri irrazionali*¹ e i *numeri primi*². Fu inventato il *sistema binario*³ e studiati quelli che poi saranno chiamati *sequenza di Fibonacci*⁴ e *triangolo di Pascal*⁵. Il nostro sistema di numerazione, generalmente definito arabo, è in realtà di origine indiana, ripreso, perfezionato e diffuso poi dagli Arabi, che adottarono il *sistema posizionale*⁶ che per la sua praticità si usa ancora oggi. I matematici indiani furono i primi a studiare la matematica non solo per scopi pratici, infatti trattarono la teoria degli insiemi, le radici quadrate e cubiche, le potenze, le equazioni e i logaritmi.

Le parole che non so:

1. **Numeri irrazionali** = numeri con tantissime cifre dopo la virgola.
2. **Numeri primi** = numeri divisibili solo per 1 e per se stessi.
3. **Sistema binario** = un sistema numerico che utilizza 2 simboli, tipicamente 0 e 1, invece dei 10 del sistema numerico decimale tradizionale.
4. **Sequenza di Fibonacci** = sequenza di numeri in cui ogni suo termine è la somma dei due termini precedenti: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...
5. **Triangolo di Pascal** = un triangolo formato da numeri interi, disposti in righe orizzontali e tale che ogni numero è la somma dei due sovrastanti.
6. **Sistema posizionale** = il valore delle cifre cambia a seconda della posizione che esse occupano nel numero (es: 14, l'1 in questa posizione vale 10).

Curiosità: Conoscenze...

Anche i cinesi e gli indiani conoscevano la geometria e la risoluzione di alcuni problemi, forse ancora prima dei popoli mesopotamici e degli egiziani. Esistono documenti che mostrano come in Cina si conoscessero le regole per trovare l'area dei triangoli e dei cerchi e come si sapessero calcolare i volumi dei solidi già prima del 1000 a.C..

- I **Greci** si occuparono quasi esclusivamente di geometria che cominciò a diventare una vera e propria scienza. Usavano solo due strumenti per la costruzione e lo studio di figure geometriche: la riga e il compasso; tutto ciò che non poteva essere misurato con questi due strumenti non era considerata vera matematica. Si ritiene che la matematica greca abbia avuto inizio con Talete di Mileto e Pitagora di Samo. Altri importanti matematici greci furono Euclide e Archimede.

10

Talete stabilì alcuni importanti teoremi di geometria, misurò l'altezza della piramide di Cheope, in Egitto applicando la similitudine dei triangoli. Fu il primo a capire l'importanza della dimostrazione nei suoi ragionamenti.

Pitagora formulò e dimostrò il teorema sui triangoli rettangoli che porta il suo nome.

Ai pitagorici si deve anche lo studio delle relazioni tra numeri, dei quadrati e dei cubi, dei solidi regolari e scoperte riguardanti la relazione tra musica e matematica e i numeri irrazionali. La più importante relativa ai numeri irrazionali fu la $\sqrt{2}$, ovvero la relazione tra la diagonale e il lato di un quadrato.

11

Le parole che non so:

7. **Assioma** = un principio considerato vero poiché ovvio.

Euclide, nella sua opera più importante, *Elementi*, raccolse tutti i principali teoremi di Aritmetica e Geometria e inserì gli *assiomi*⁷ fondamentali della matematica, tra cui i 5 famosi alla base della Geometria.

Archimede grazie ad un'approssimazione migliore del π , scoprì la formula per calcolare il volume e la superficie della sfera e l'area del cerchio.

12

13

- Nell'**Antica Roma** la matematica non era considerata importante, serviva solo applicata all'ingegneria e per questioni pratiche. L'unica particolarità è data dall'uso del proprio sistema numerico: i numeri romani.

14

- Nel **Medioevo** in Europa gran parte delle conoscenze vennero perse durante il declino politico-economico dovuto alle invasioni barbariche. Nonostante ciò Leonardo Fibonacci fece conoscere all'Europa il sistema di numerazione decimale e lo zero, trattò problemi di natura pratica e commerciale, come ad esempio la moltiplicazione dei conigli, e diede il nome alla sequenza di Fibonacci.
- Nel **XV secolo** nacque la matematica moderna. In questo periodo si cominciò ad applicare la matematica all'arte attraverso l'uso della *prospettiva*⁸ e della *geometria descrittiva*⁹.

15

Le parole che non so:

8. **Prospettiva** = tecnica del rappresentare gli oggetti su un piano in modo da farli apparire come l'osservatore li vede nella realtà.
9. **Geometria descrittiva** = scienza che permette, attraverso costruzioni geometriche, di rappresentare oggetti bidimensionali e tridimensionali.

- Nel **XVI secolo** si diffuse un forte interesse per l'Algebra: i matematici si sfidavano nella risoluzione di alcuni problemi e grazie a ciò acquisirono fama. Tra questi spiccarono Gerolamo Cardano e Niccolò Fontana detto Tartaglia.
Un'altra figura importante fu quella di Mercatore, matematico e cartografo che grazie alla geometria inventò un sistema per disegnare con maggior precisione le cartine geografiche.

- Nel **XVII secolo**, la Geometria ebbe un ulteriore sviluppo grazie a Cavalieri, Torricelli, René Descartes detto Cartesio e Pierre de Fermat. Dal quel momento linee, piani e curve furono viste in maniera algebrica. In seguito Pascal fondò il Calcolo delle Probabilità e usò la Geometria per calcolare l'area di figure non regolari usando gli integrali.

16

17

Con Gottfried Leibniz e Isaac Newton si sviluppò una grande branca della matematica chiamata Analisi della Matematica dove si cominciò a studiare il calcolo infinitesimale. In questo secolo appaiono anche le prime calcolatrici.

- Nel **XVIII secolo** si studiò principalmente l'Analisi Matematica in cui ebbe un ruolo importantissimo Eulero. Egli introdusse nella geometria analitica il Calcolo delle Variazioni, che permise molti nuovi impieghi del calcolo applicato alle curve e alle superfici. Fu uno dei più grandi matematici di tutti i tempi grazie alle numerose pubblicazioni su ogni branca della matematica. Grazie alle scoperte di Eulero nacque la *Topologia*¹⁰.

18

Le parole che non so:

10. Topologia = parte della matematica che studia le proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando vengono deformate.

Nella seconda metà del secolo, Parigi divenne il più importante centro matematico e scientifico del tempo grazie alla presenza di Laplace e Lagrange e a istituzioni di scuole a carattere scientifico.

19

- Il **XIX secolo** è chiamato Età d'oro della Matematica. Nacquero i primi periodici, le prime società matematiche e gli studiosi di questa scienza cominciarono a riunirsi nelle università.

Tra i vari esponenti si ricordano Gauss che dimostrò il teorema fondamentale dell'algebra, Cantor che studiò la Teoria degli insiemi e Klein che si occupò di Topologia.

- Nel **'900** i matematici cominciarono ad insegnare nelle scuole superiori e nelle università e si formò anche la professione del matematico.

Furono istituiti vari premi, quali la Medaglia Fields, il premio Wolf e il premio Abel.

20

21

Come conseguenza dei progressi tecnologici di quel periodo la matematica fu estesa all'Economia, alla Biologia, alla Meteorologia e all'Informatica.

Curiosità: E il premio Nobel?

Non esiste il premio Nobel per la matematica: si dice che Nobel avesse scoperto che la moglie lo aveva tradito con un matematico e quindi non vedesse di buon occhio questa branca della scienza!

22

John Nash vinse il Nobel per l'Economia occupandosi di Teoria dei giochi.

Nella biologia Benoit Mandelbrot definì per la prima volta particolari strutture chiamate frattali.

In ambito informatico spiccarono Alan Turing e John von Neumann, il cui contributo fu fondamentale per la crittografia e la nascita dei primi computer.

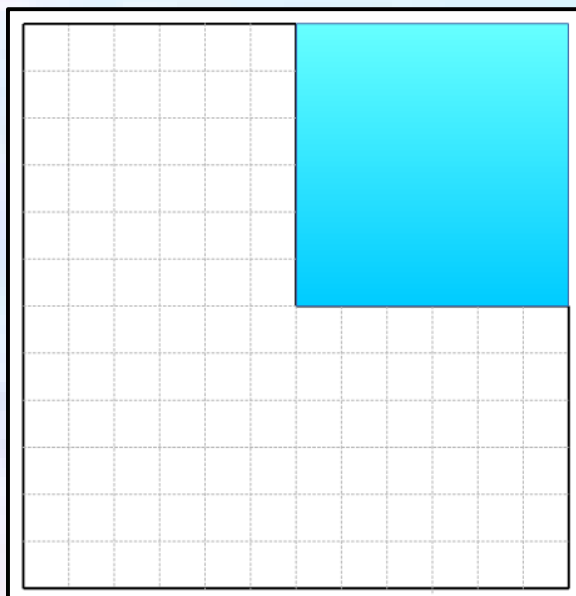
Giochiamo insieme!

Nell'orto sul Tigri.

Assurbanipal ha un bellissimo frutteto sulle rive del fiume Tigri. Purtroppo quest'anno le piogge sono state scarse e i canali d'irrigazione hanno portato poca acqua. Questa mattina Assurbanipal è tornato dal suo orto con un cesto di frutta nel quale c'erano tutte mele tranne due, tutti fichi tranne due. Quanti frutti ci sono nel cesto di Assurbanipal?

Un campo da dividere

Anche quest'anno il Nilo ha esondato e ha spazzato via i confini dei campi. Ora i contadini devono ristabilirli sapendo che devono dividere il terreno in quattro parti della stessa forma e della stessa grandezza. Aiutali a disegnare i confini!



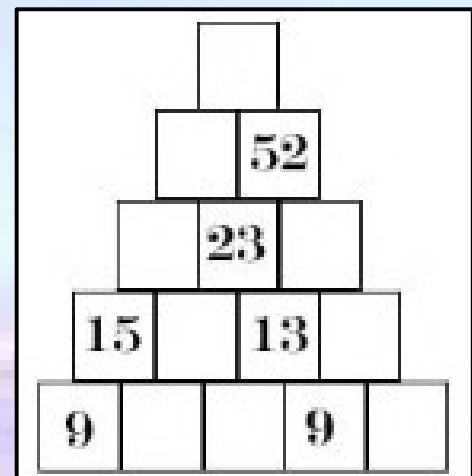
L'enigma della Ziggurat

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | 7 |
| | 6 | |
| | | 3 |

Nella ziggurat della città di Ur, sull'ultimo gradino dell'ultima terrazza c'è questo strano enigma. In questa figura, addizionando i 3 numeri sia in verticale, sia in orizzontale, sia in obliquo, si ottiene sempre lo stesso risultato: 18. Inserisci i numeri che mancano per risolvere l'enigma e accedere alla terrazza più alta.

La piramide del faraone

L'architetto Namubi deve costruire una piramide per il suo faraone ma è in difficoltà. Aiutalo tu e ricorda: ogni pietra soprastante contiene la somma delle due sotto.



Matematica...

Achille e la tartaruga



“Achille più veloce sfida alla corsa una lenta tartaruga, dicendole:

- Scommettiamo che riesco a batterti nella corsa anche se ti do dieci metri di vantaggio?

La tartaruga risponde:

- Sai, io sono molto lenta, è il mio stile di vita, ma se mi dai dieci metri di vantaggio, non puoi battermi!

- Sì che posso, io sono il doppio più veloce di te.

- Anche se sei il doppio più veloce non potrai mai raggiungermi. Vedi, mentre tu percorri i dieci metri che io ho di vantaggio io mi sposto in avanti di cinque. Tu dovrai poi percorrere questi cinque metri, ma io mi sarò spostata in avanti di altri due metri e mezzo che tu dovrai recuperare. Ma mentre tu cercherai di raggiungermi facendo questi due metri e mezzo io mi sarò spostata di un altro metro e venticinque e così via fino all'infinito, così tu non potrai mai raggiungermi.”

23

24

Fu Zenone di Elea, filosofo greco vissuto nel V secolo a.C., a proporre il celebre paradosso di Achille e la tartaruga. Immaginò che Achille, noto per essere il “più veloce”, venisse sfidato a raggiungere la lenta tartaruga, alla quale fu però concesso un vantaggio iniziale.

Il paradosso era fondato su questo presupposto: nel tempo che Achille impiega per raggiungere il punto in cui inizialmente si trova la tartaruga, quest'ultima avrà, comunque, percorso un piccolo tratto. Quando Achille avrà percorso questo piccolo tratto, la tartaruga sarà ulteriormente avanzata. E Achille non raggiungerà mai la tartaruga, perché dovrà percorrere gli infiniti spazi che colmano la distanza tra i concorrenti.

...nella Letteratura

Facciamo un esempio numerico:

25

Supponiamo che alla partenza Achille si trovi nella posizione $A=0$ metri e la tartaruga invece in $B=10$ metri.

Dopo 1 secondo, Achille si trova in $B=10$ metri mentre la tartaruga in $C=15$ metri.

Dopo 2 secondi, Achille ha percorso altri 5 m, ovvero si trova in $C=15$ metri e la tartaruga in $D=17.5$ metri.

E così via.

Notiamo che Achille percorre $10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{4} + \frac{10}{8} + \dots$ metri

e, raccogliendo il 10 otteniamo: $10 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$ metri.

La tartaruga percorre $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots$ metri,

ovvero $5 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right)$ metri.

Osserviamo che le parentesi contengono gli stessi numeri.

In matematica questa sequenza si chiama **serie geometrica** e si scrive

$$\sum_{x=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Si studia, che facendo queste somme fino all'infinito, il risultato è 2, cioè si dice che la serie converge a 2.

26

Achille dunque raggiunge la tartaruga dopo 20 metri e subito dopo la supera. La vittoria dell'uno o dell'altro dipende da dove viene posto il traguardo.

Ma dove sta l'errore di Zenone?

L'errore è nel ragionamento, cioè nel ritenere che una somma di infiniti termini debba dare sempre un risultato infinito.

Problema di Didone

“Nell’Eneide di Virgilio si narra di Didone, primogenita del re di Tiro. La successione al trono della bella regina fu contrastata dal fratello Pigmalione, il quale ne uccise il marito prendendo così il comando del regno.

Didone, esule da Tiro, peregrinò con il suo seguito di sudditi, fino a che non approdò sulle coste libiche, tanto affascinanti che nessuno di loro voleva più abbandonarle. La bella regina senza trono doveva quindi trovare un modo per stanziarsi in quelle terre, e fu così che si rivolse a Iarba, re del luogo. Quest’ultimo le promise tanta terra quanta ne potesse contenere una pelle di bue. Didone non si lasciò sfuggire l’occasione, tagliò la pelle in strisce sottili, le annodò fra di loro ottenendone un lungo filo che dispose in modo tale da recintare la massima estensione di terra, la quale comprendesse anche la costa come richiesto dai suoi seguaci. Fu così che delimitò quello che sarebbe poi diventato il territorio di Cartagine.”

27

28

Nella fretta di recintare l’appezzamento di terreno più grande possibile, Didone agì d’istinto, formando con la strisciolina di pelle un semicerchio.

Intanto però i suoi sudditi si interrogavano se fosse realmente quella la scelta migliore. E con loro, nel corso dei secoli, molti studiosi e matematici si posero questa domanda, dando inizio alla ricerca su quelli che oggi chiamiamo **problemi isoperimetrici**¹.

Le parole che non so:

1. **Problema isoperimetrico** = chiedersi quale sia la figura geometrica che a parità di perimetro ha area maggiore. La soluzione è intuitivamente il cerchio. Questi problemi vengono studiati nella branca della matematica che si chiama Calcolo delle Variazioni.

Scelta eccellente, quella di Didone? Proviamo!

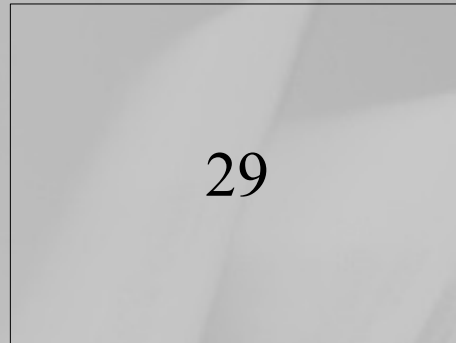
Supponiamo di avere a disposizione una corda lunga 120 cm. Con questo perimetro vogliamo scoprire qual è la figura con l'area maggiore.

Prendiamo

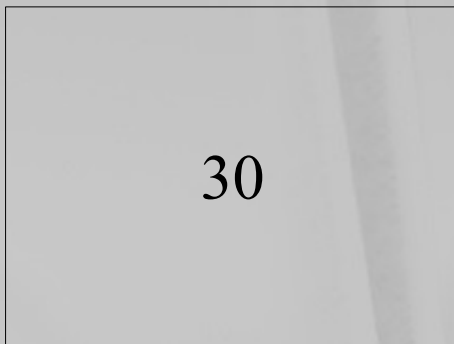
- un quadrato:

$$l = P : 4 = 120 : 4 = 30 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = l \times l = 30 \times 30 = 900 \text{ cm}^2$$



- un triangolo rettangolo:



$$P = h + b + i = 30 + 40 + 50 = 120 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \frac{b \times h}{2} = \frac{40 \times 30}{2} = 600 \text{ cm}^2$$

- un cerchio:

$$r = \frac{C}{2 \times \pi} = \frac{120}{2 \times \pi} = 19 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \pi \times r^2 = \pi \times 19^2 = 1134 \text{ cm}^2$$



- un trapezio isoscele:



$$P = B + b + l_1 + l_2 = 40 + 20 + 30 + 30 = 120 \text{ cm}$$

$$\text{Area} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(40+20) \times 28}{2} = 840 \text{ cm}^2$$

Et voilà!! Didone aveva ragione!!

I matematici, in particolare Weierstrass, attraverso strumenti e calcoli difficili, hanno dimostrato che tra tutte le figure aventi lo stesso perimetro, quella che ha area maggiore è proprio il cerchio.

Divina Commedia

33

- Nella Divina Commedia Dante ci racconta un viaggio immaginario nell'oltretomba cristiano, secondo la visione del mondo che aveva sviluppato la Chiesa cattolica nel Medioevo. Poiché, secondo la Bibbia, Dio ha creato il mondo seguendo l'armonia dei numeri e delle misure, Dante dà una grande importanza al **valore simbolico del numero**, che compare quasi ovunque in quest'opera.

Utilizza gli stessi numeri sia per rappresentare il bene che il male, perché il male è l'altra faccia del bene. Inoltre sono presenti anche nella struttura dell'opera. Vediamone alcuni importanti e ricorrenti:

1: rappresenta l'Unità di Dio, ma viene spesso usato implicitamente nella struttura del poema.

34

3 e i suoi multipli: rappresentano la Santa Trinità.

35

L'opera è suddivisa in 3 cantiche: Inferno, Purgatorio e Paradiso ed è scritta in terzine. Lucifero ha 3 teste e 6 ali, Cerbero è un cane a 3 teste, 3 sono le categorie principali di peccatori, Beatrice appare a Dante vestita di 3 colori, Dante deve sostenere una sorta di esame nelle 3 virtù (Fede, Speranza e Carità) da parte di 3 Santi,...

Il 9 è 3 al quadrato, e viene usato per i 9 cieli del Paradiso, le 9 gerarchie angeliche e i 9 cerchi per i peccatori all'Inferno,...

Il 33, i canti in cui è divisa ogni cantica, è un multiplo di 3 e ricorda l'età in cui Cristo è morto.

10 e 100: indicano la perfezione. I 9 cieli del Paradiso sono racchiusi da un decimo cielo, l'Empireo, in cui c'è Dio, l'Inferno invece è fatto di 9 cerchi per i peccatori, ma con l'Antinferno si arriva a 10 zone, 100 è la somma dei 33 canti delle 3 cantiche con il proemio dell'Inferno,...

36

37

38

7: è legato ai giorni della Creazione, ai sacramenti e ai vizi capitali. 7 sono le cornici del Purgatorio, il viaggio è durato 7 giorni, ed è iniziato alle ore 7:00,...

Curiosità: *9 numeri magici...*

Ai numeri e ad alcune figure geometriche sono sempre stati legati significati religiosi e magici e si pensa che questo abbia favorito l'interesse per lo studio della matematica. Già Pitagora attribuiva ai numeri significati mistici: i numeri pari erano femminili, legati al male e all'oscurità, i dispari erano maschili, portatori di luce e di bene e perciò fortunati. La scuola pitagorica aveva dato forma alla numerologia studiando e attribuendo un significato ad ogni numero (es: 1 = ragione, 2 = femminilità, 3 = armonia,...).

La superstizione sui numeri continua ancora oggi: migliaia di persone si servono della cabala per interpretare i sogni e giocare i numeri al lotto. Inoltre, chi non ha mai sentito dire che in tavola non bisogna essere in 13 o 17 perché porta sfortuna? In alcuni alberghi addirittura non esistono le camere numero 13 e 17 perché pochi sarebbero disposti a dormirci! E che cosa dire del venerdì 17?!

39

- Oltre all'uso simbolico di alcuni numeri, Dante usa anche l'Aritmetica, utilizzandone spesso alcune regole o proprietà per fare dei paragoni o per rendere più chiaro un concetto.

40

Quanti angeli ci sono in paradiso?

Gli angeli del Paradiso "... eran tante, che 'l numero loro, più che 'l doppiar delli scacchi, s'immilla...", [XXVIII canto].

Quindi gli angeli erano davvero tanti!

Dante per spiegare il numero degli angeli usa il concetto di **potenza!**

Elevare un numero a potenza, significa moltiplicarlo per se stesso un numero di volte pari a quello dell'esponente.

Facciamo un esempio:

41

$$\begin{array}{c} \text{esponente} \\ \swarrow \\ 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \\ \uparrow \\ \text{base} \end{array}$$

Curiosità: Perché Dante parla del "doppiare delli scacchi"?

42

Si narra che Sessa Nassir inventò il gioco degli scacchi per il re di Persia e, come ricompensa, chiese un chicco di riso sulla prima casella, 2 sulla seconda e, su ogni casella successiva, una quantità di riso doppia di quella precedente, fino a completare tutte le caselle. Il re risse ma l'abacista impallidì e disse "Credo che non potremmo accontentare Sessa nemmeno raccogliendo tutto il riso di Persia e di ogni terra emersa!". Sessa aveva usato la potenza con base 2 ed esponente il numero di caselle della scacchiera: 2^{64} !

- Nel canto XV del Paradiso, Cacciaguida, si rivolge a Dante dicendo "Tu credi che a me tuo pensier mei da quel ch'è primo, così come raia da l'un, se si conosce, il cinque e 'l sei...".

In questo dialogo Dante si riferisce ai **numeri naturali**.

Cacciaguida intende dire che una volta conosciuto il numero 1, si deduce facilmente la conoscenza di tutti gli altri numeri fino all'infinito.

43

44

Come si esprime questa proprietà in Aritmetica?

Si scrive $n+1$ e significa che, a partire da qualsiasi numero naturale n , aggiungendo un'unità si può trovare il numero naturale successivo.

Se, ad esempio, consideriamo $n=4$, allora $n+1=4+1=5$.

Inoltre, ci ricordiamo anche che per ogni numero naturale si può sempre trovare un successivo, ma non sempre è possibile trovare il precedente, perché 0 è il primo numero naturale.

Curiosità: Geni si nasce?

Gauss all'età di 10 anni scoprì un trucco per fare velocemente la somma dei primi 100 numeri naturali. Il trucco è questo: Gauss notò che sommando il primo e l'ultimo numero, il secondo e il penultimo, e così via, si otteneva sempre lo stesso risultato. Perciò per ottenere il risultato finale bastava sommare il primo e l'ultimo numero e moltiplicarne il risultato per il numero degli addendi diviso per due. Inutile dire che diventò uno dei più grandi matematici di tutti i tempi!

45

- Dante conosceva in maniera approfondita la geometria del grande Euclide. Egli infatti ricorre spesso all'uso della Geometria per esprimersi in un linguaggio più alto di quello terreno, per far capire l'importanza di parlare a Dio attraverso le parole di una scienza meno terrena e più complessa. La Geometria era infatti considerata nel Medioevo la scienza in grado di mettere l'uomo in comunicazione con Dio.

46

Nel canto XVII del Paradiso si parla di Geometria:
 "... come veggion le terrene menti non capere in triangol due
 ottusi, ...".

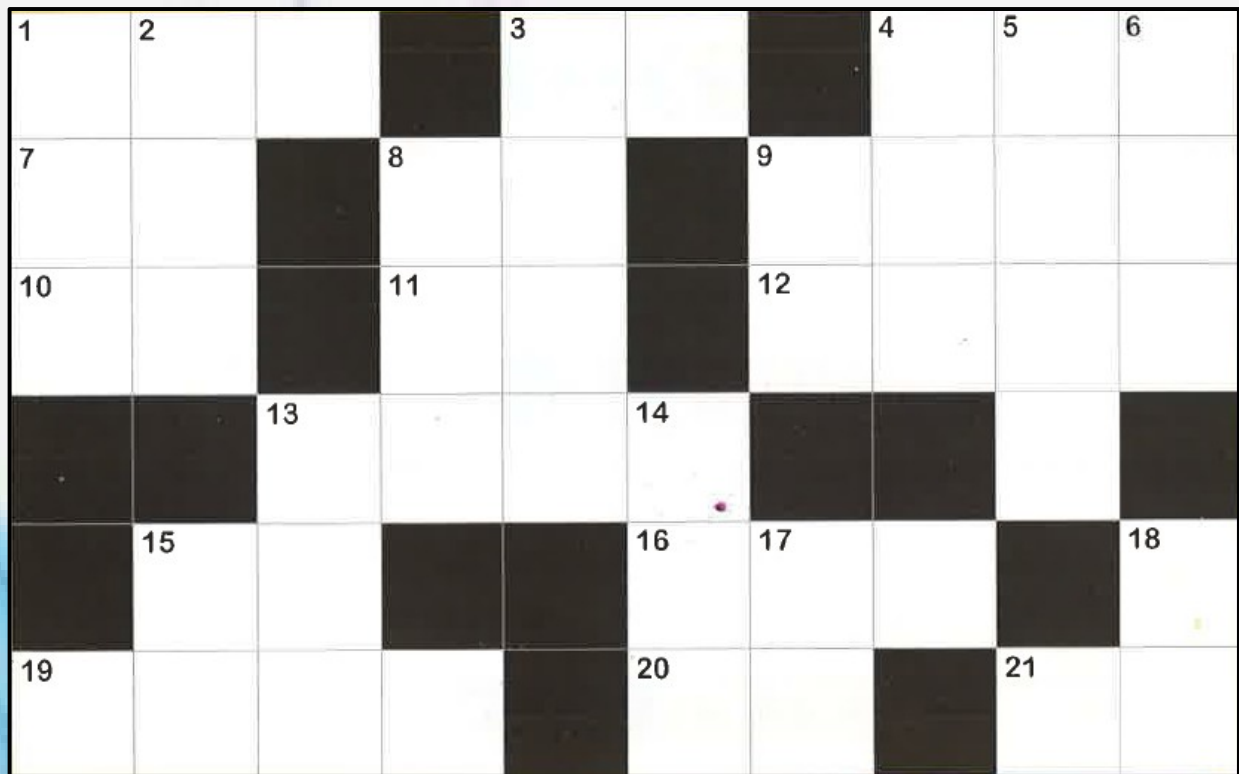
Dante intende dire che in un triangolo non può esserci più di un angolo ottuso, perché se in un triangolo ci fosse più di un angolo ottuso, la somma degli angoli interni sicuramente supererebbe i 180°!

Quanti tipi di **angoli** conosciamo?

| | | | |
|---|----|---|-----------------------|
| 47 | 48 | Retto = angolo di 90° Ottuso = angolo maggiore di 90° e minore di 180° | 49 |
| Acuto = angolo minore di 90° Piatto = angolo di 180° | 50 | 51 | Giro = angolo di 360° |

Giochiamo insieme!

Esegui il crucinnumero inserendo una cifra in ogni casella.



Orizzontali:

1. Una famosa carica.
3. La somma dei primi 4 numeri dispari.
4. La moto che puoi guidare a 16 anni.
7. Quanti sono i comandamenti?
8. Si può leggere anche capovolto.
9. Tante sono le notti delle fiabe.
10. Numero sfortunato.
11. I gatti dello *Zecchino d'Oro*.
12. L'anno delle Olimpiadi di Londra.
13. Il quadruplo di 421.
15. Un quarto di secolo.
16. Abbreviazione del XIX secolo.
19. Colombo scoprì l'America.
20. I ladroni di Alì Babà.
21. Il superstizioso non lo vuole a tavola.

Verticali:

1. Numero con tre cifre uguali.
2. Numero da agente segreto.
3. Anno della Costituzione italiana.
4. Anni in un secolo.
5. L'anno dell'Expo di Milano.
6. Il cubo di 8.
8. Numero palindromo.
9. Una dozzina.
13. Più di 158 ma meno di 160.
14. CDLXXXIV in numeri arabi.
15. Ore in un giorno.
17. Farina per torte.
18. Trentini che entrarono in Trento.

Indovina indovinello!

Sulla strada che va a Camogli c'è un uomo con 4 mogli. Ogni moglie ha 4 sacche, in ogni sacca 4 gatte, ogni gatta 4 gattini. Tra uomini, sacche, gatte, gattini e mogli, in quanti sono sulla strada che va a Camogli?

Matematica...



Prospettiva

La **prospettiva** è un insieme di proiezioni e di procedimenti di carattere geometrico-matematico che consentono di rappresentare l'immagine di una figura tridimensionale su un piano, in modo che quanto è stato disegnato corrisponda agli oggetti reali, come li vediamo nello spazio.

Come si disegna in prospettiva?

Innanzitutto è necessario sapere qual è la posizione dell'osservatore (punto di vista) rispetto all'oggetto da rappresentare. Infatti, se cambiamo posizione, quello che vediamo ci appare in modo diverso, per aspetto o per dimensione. Il foglio di carta deve essere immaginato come una pellicola trasparente posta fra l'oggetto da rappresentare e chi guarda. Si suppone, allora, che dall'occhio dell'osservatore partano dei raggi che vadano a circondare l'oggetto (piramide visiva). Tali raggi intersecano la pellicola trasparente (quadro prospettico) e questa intersezione, che individua un'immagine simile, ma più piccola dell'oggetto, ne costituisce appunto la rappresentazione prospettica.

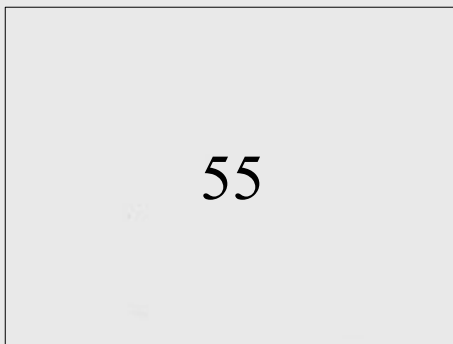
52

Esistono tre tipi di rappresentazione prospettica che variano in base alla posizione che l'oggetto assume rispetto al quadro prospettico:

- **prospettiva centrale o frontale:** l'oggetto da disegnare è parallelo al piano di proiezione. Tutte le linee di profondità (lunghezza) convergono nello stesso punto (punto di fuga proprio), le linee parallele al quadro (larghezza) restano parallele, le rette verticali (altezza) restano verticali;

53

- **prospettiva accidentale o d'angolo:** l'oggetto rappresentato è ruotato rispetto al quadro e nessuno dei suoi lati è a questo parallelo, vi sono così due punti di fuga in cui convergono le linee orizzontali (larghezza e lunghezza), ma le rette verticali (altezza) restano verticali;



- **prospettiva obliqua o razionale o a quadro inclinato:** l'oggetto rappresentato è ruotato rispetto al quadro di proiezione anche verticalmente, vi sono così tre punti di fuga, due per le linee orizzontali (larghezza e lunghezza) ed uno per quelle verticali (altezza).

La prospettiva basandosi su leggi matematiche, consente una perfetta rappresentazione delle cose e costituisce lo strumento tecnico per eccellenza alla portata dell'artista per studiare e indagare la natura.

In matematica, per rappresentare lo spazio visto dall'occhio umano in prospettiva, è stato introdotto lo spazio proiettivo: lo spazio ottenuto da uno spazio euclideo¹ aggiungendo i "punti all'infinito". Tali punti sono le direzioni indicate nello spazio da una retta e da tutte le rette parallele ad essa. Quindi, nello spazio proiettivo, rette diverse definiscono lo stesso punto all'infinito se e solo se sono parallele e di conseguenza due rette di uno stesso piano si intersecano sempre, anche se sono parallele, in questo caso il loro punto di intersezione è quello all'infinito.



Le parole che non so:

1. **Spazio euclideo** = spazio dove valgono gli assiomi della geometria di Euclide.

Curiosità: A proposito di prospettiva...

Agli inizi del '400 fu Filippo Brunelleschi a scoprire le regole della prospettiva geometrica.

Un esempio di dipinto in cui si nota la prospettiva è la Città ideale.



Il dipinto è impostato su una rigorosa prospettiva centrale che permette di vedere i palazzi rinascimentali intorno a una piazza, in cui domina un tempio circolare. L'unico punto di fuga è posto nell'ingresso del tempio.

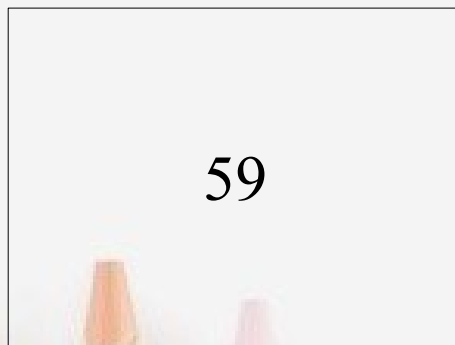
Curiosità: La realtà non è come ci appare...

Guardate questa immagine: l'uomo a destra è più grande di quello a sinistra? Certo! Adesso prendo il righello e lo dimostro.

Oibò! C'è qualcosa che non va... le tre figure sono tutte della stessa grandezza.

Come è possibile? Il nostro cervello interpreta la figura come tridimensionale, piuttosto che come un disegno su carta e quindi bidimensionale, e l'impressione tridimensionale è predominante. Il passaggio da bi- a tri-dimensionale è automatico, tanto più che è indotto

da segni appositamente introdotti nell'immagine (le linee che creano la prospettiva), segnali che non riusciamo a ignorare, non possiamo farci nulla!



59

Il risultato è che, anche dopo aver misurato le figure, non riusciamo a credere che i tre personaggi sono uguali perché la nostra percezione ci dice esattamente il contrario!

No, questa volta no! Non potete dire che le tre figure sono uguali. Ok, ammettiamolo, non lo sono!

Allora la domanda diventa: "Quale è l'ordine delle altezze dei tre personaggi?" Facile, no? Ma dopo che avrete risposto...andate a fare la verifica col righello!



60

Proporzioni

Una **proporzione** non è altro che un'uguaglianza tra due rapporti matematici, ossia un'uguaglianza di rapporto tra grandezze a due a due omogenee.

Ad esempio, nella proporzione

$$A : B = C : D$$

le coppie di numeri A, B e C, D stanno nello stesso rapporto tra loro.

La disciplina a cui le proporzioni sono applicate con maggior frequenza è l'Architettura.

Ad esempio nella facciata di un edificio si può fare in modo che la sua altezza sia proporzionata alla sua larghezza in modo da dare vita ad una costruzione armoniosa.

61

Secondo il romano Vitruvio l'architettura doveva attenersi alle simmetrie e ai rapporti esistenti tra le varie parti del corpo umano che era ben proporzionato per natura.

Ciò colpì la fantasia degli architetti rinascimentali che, basandosi su questa affermazione, progettaronο molti edifici sacri, tra cui Leonardo Da Vinci che disegnò l'Uomo vitruviano. L'uomo è così perfetto che l'ombelico è il centro di una circonferenza dentro cui è inscritto l'uomo stesso e, con le braccia aperte, diventa un quadrato.

Il cerchio e il quadrato erano ritenute figure perfette. Inoltre l'ombelico dell'uomo divide l'altezza umana in proporzione aurea.

62

Cos'è la **proporzione aurea** (o **sezione aurea** o **numero aureo** o **costante di Fidia** o **proporzione divina**)?

La proporzione aurea indica il rapporto fra due lunghezze disuguali, delle quali la maggiore è medio proporzionale tra la minore e la somma delle due, cioè l'intera linea c , sta al segmento più lungo a come a sta al segmento più corto b ovvero $c:a=a:b$.

63

Ricordando che $c=a+b$, si ha

$$\frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b} = 1,6180339887... = \varphi$$

64

Basandosi sulla proporzione aurea si può costruire il **rettangolo aureo**: il rapporto tra il lato maggiore e quello minore $a:b$ è uguale a quello tra il lato minore e il segmento ottenuto sottraendo quest'ultimo dal lato maggiore $b:(a-b)$ e entrambi devono essere $\varphi=1,6180339887...$

$$a:b=b:(a-b)=1,6180339887...$$

La particolarità è la sua facile replicabilità: basta disegnarvi all'interno un quadrato basato sul lato minore (o all'esterno basato sul lato maggiore) così da ottenere un altro rettangolo minore (o maggiore) anch'esso di proporzioni auree. Da questa proprietà deriva la possibilità di creare al suo interno una successione infinita di quadrati e quindi una spirale detta **spirale di Fibonacci**.

65

66

Il rapporto aureo è molto usato sia in Pittura sia in Architettura, in quanto simbolo di perfezione, equilibrio e bellezza. Un esempio è la *Gioconda* di Leonardo da Vinci.

Curiosità:

Rettangolo aureo nella quotidianità...

Nella vita di tutti i giorni usiamo spesso oggetti la cui forma è un rettangolo aureo, come le carte di credito e i fogli A4.

Figure geometriche

Fin dalla antichità, numerosi artisti ed architetti hanno fatto uso di **figure geometriche piane** all'interno delle loro opere. Leon Battista Alberti, nella facciata della basilica di Santa Maria Novella a Firenze, usò quadrati, rettangoli, cerchi e triangoli, sia per le decorazioni che per la struttura dell'edificio perché riteneva che l'armonia fosse data dalle caratteristiche geometriche delle singole parti.

67

In tempi recenti,

- i cubisti scompongono la realtà in piani e volumi elementari (cubetti).

68

- Mirò, propone un mondo parallelo popolato di forme geometriche colorate sospese.

69

- Gli astrattisti come Kandinskij e Klee volevano cogliere l'essenza della realtà e per questo, invece che rappresentarla come essa appare, facevano uso di figure e linee. Soprattutto Kandinskij studiò le relazioni tra forme, colori ed emozioni. Secondo la sua teoria quando un colore viene associato alla sua forma privilegiata gli effetti e le emozioni che scaturiscono dai colori e dalla forma vengono potenziati. Il giallo ha un rapporto privilegiato con il triangolo, il blu con il cerchio e il rosso con il quadrato. Molto importante è anche l'orientamento delle forme sulla superficie pittorica, ad esempio, il quadrato su un lato è solido, consapevole, statico; su un vertice è instabile e gli si assocerà una tonalità di colore diversa.

70

- Un artista che della geometria ne ha fatto uno stile pittorico è Mondrian, i cui quadri sono composti interamente da rettangoli e quadrati colorati.

71

72

In ambito architettonico, si può citare il movimento razionalista, nato durante il periodo nazi-fascista, il quale utilizzava forme rigide, volumi semplici e netti, linee e angoli retti per trasmettere l'idea di ordine e solennità tipiche del pensiero politico di quegli anni.

Nel piano si parla di figure geometriche, nello spazio tridimensionale troviamo i **solidi** e se si aumentano le dimensioni dello spazio si parla di **politopi**.

73

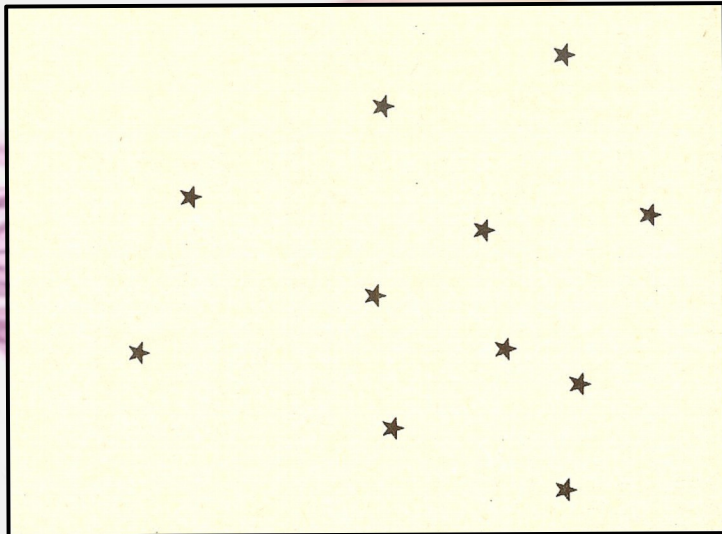
74

Esempi di politopi che troviamo nell'arte sono l'icosaedro, già noto a Leonardo Da Vinci, il dodecaedro e l'ipercubo presente in una famosa opera di Salvador Dalì.

75

Giochiamo insieme!

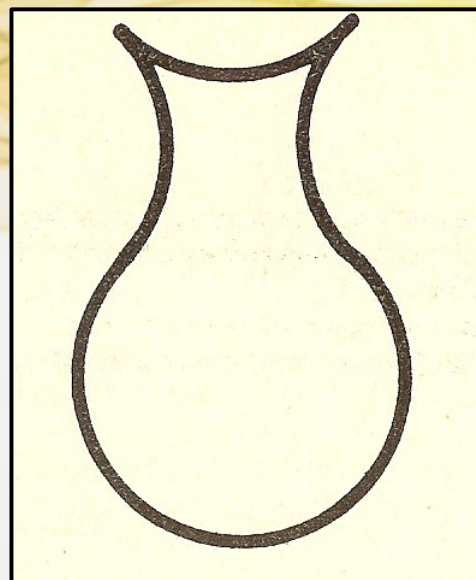
Cielo stellato



Quante rette si devono tracciare perché ogni stella sia separata dalle altre e racchiusa in una porzione di cielo tutta sua?

Un vaso a pezzi!

Taglia il vaso in tre parti in modo tale che i pezzi possano essere ricomposti a formare un quadrato.



Tutti al MUSE!

Cinque amici decidono di andare al MUSE per vedere la mostra *Made In Math*.

Ma quando? Sono tutti molto occupati...

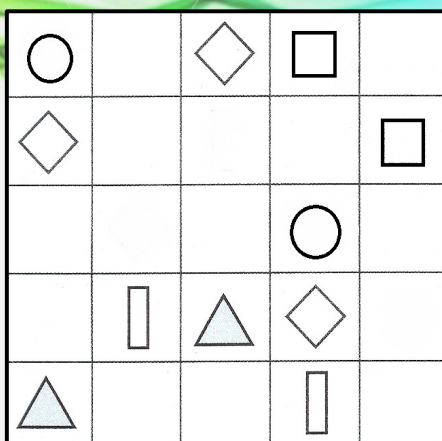
Filippo: "Io lavoro tutti i giorni fino a mezzogiorno compresa la domenica."

Olivia: "Anche io lavoro tutti i giorni, tranne il giovedì e la domenica."

Claudio: "Sono libero il quarto giorno al pomeriggio, e il sesto al mattino."

Giulia: "Chiudo la mia gioielleria la domenica, il giovedì e il lunedì pomeriggio."

Angelo: "Io purtroppo sono sempre occupato, ma posso farmi sostituire da mio fratello anche per un'intera giornata."



Quadro astratto

Un artista vuole dipingere un quadro astratto. Aiutalo inserendo in ciascuna casella libera uno dei 5 simboli in modo che sulla stessa riga o colonna non ci siano mai due simboli uguali.

Matematica...

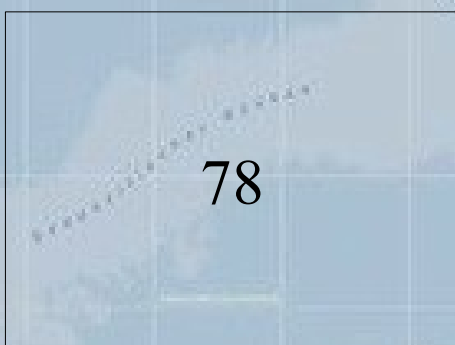


Il mappamondo, poiché rispetta la forma del nostro pianeta è il modo più esatto per rappresentare la Terra, però presenta anche una serie di inconvenienti pratici in quanto non consente una visione d'insieme, simultanea, dei continenti e, con le sue superfici curve, rende difficoltoso l'uso di compassi e righelli per calcolare distanze e rotte.

Si è dovuto quindi usare delle **proiezioni** che permettessero di rappresentare la Terra su una superficie piana. Le superfici curve però non possono essere rappresentate sul piano senza deformazioni. Quindi i planisferi possono essere molto diversi tra loro, a seconda del tipo di proiezione che utilizzano. Ne vediamo alcune:

Proiezione di Mercatore

La **proiezione di Mercatore** è cilindrica e centrografica, cioè la superficie terrestre viene proiettata su un cilindro immaginario che la avvolge e il punto di vista della proiezione è al centro della Terra stessa. Questo provoca la dilatazione delle superfici verso i poli: gli stati molto a Nord e a Sud appaiono molto più grandi di quello che sono nella realtà, ad esempio la Groenlandia è grande quanto l'Africa, mentre nella realtà è 14 volte più piccola.



La carta di Mercatore ha la caratteristica di presentarci *Meridiani*¹ e *Paralleli*² sempre perpendicolari tra di loro, quindi i Meridiani risultano paralleli tra di loro mentre nella realtà non lo sono perché convergono ai due poli. Il rapporto tra gli angoli della mappa invece è lo stesso di quello che c'è nella realtà. Questa proprietà si chiama isogonia.

...nella Geografia

Le parole che non so:

1. **Meridiano** = linea immaginaria con direzione Nord-Sud.
2. **Parallelo** = linea immaginaria con direzione Est-Ovest.

Curiosità: Chi la utilizza?

La proiezione di Mercatore viene tutt'ora usata da Google Maps.

Proiezione di Gall-Peters

La proiezione di Gall-Peters è anch'essa cilindrica ed è equivalente, cioè mantiene inalterato il rapporto tra le aree. Però i continenti hanno una forma molto allungata, non conforme alla realtà.

79

Curiosità: Gall-Peters, colori e usi...

Nella proiezione di Gall-Peters viene assegnato un colore base per ogni continente e ai singoli stati una diversa sfumatura di quel colore. La proiezione di Gall-Peters è oggi adottata dall'ONU.

Proiezione Stereografica

La proiezione stereografica è realizzata proiettando da un punto della sfera (ad esempio il Polo Nord) tutti gli altri punti della superficie della sfera sul piano tangente nel punto opposto (Polo Sud).

Questa proiezione è isogonica, come quella di Mercatore, e i continenti mantengono la loro forma ma non la loro area.

Una proiezione stereografica è detta **polare**, **equatoriale** o **obliqua** a seconda del punto di proiezione (un polo, un punto sull'Equatore, o altrove).

80

Proiezione Ortografica

Nella **proiezione ortografica** il punto di vista è situato all'infinito e sono conservate le distanze reali. In questo tipo di proiezione si hanno poche e trascurabili distorsioni intorno al centro, ma evidenti compressioni quando ci si allontana da esso.

81

Perché abbiamo bisogno delle proiezioni?

82

I matematici hanno studiato che la sfera non può essere appiattita su un piano senza fare dei tagli. Proviamo a vedere con un esperimento, questo risultato matematico:

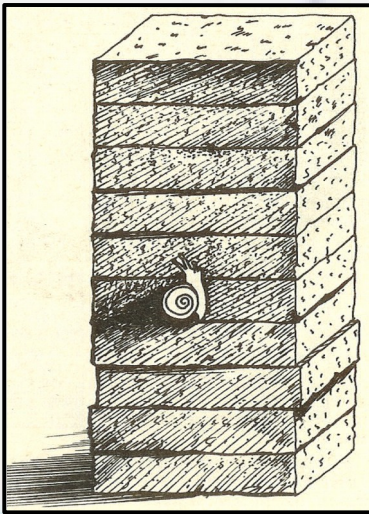
prendiamo un pallone tagliato a metà lungo una circonferenza massima. Provate ad appiattirlo: non ci riuscirete!

Possiamo pensare, affidandoci all'intuizione, che in questo caso ci sia "meno superficie" di quante ne serva per essere appiattita. L'unico modo è quello di operare dei tagli radiali (maggiore è il numero dei tagli, maggiore sarà l'aderenza al piano). Tra un taglio e l'altro della superficie si vengono a creare degli spazi che corrispondono a superficie mancante.

È per questo che non possiamo rappresentare in modo perfetto il mondo su una cartina, ma dobbiamo scegliere ciò che vogliamo conservare corretto e ciò che possiamo deformare. Questa scelta dipende dall'utilizzo che dovremo fare della carta.

83

Giochiamo insieme!



La scalata della lumachina

Una lumachina ha intrapreso la scalata di una pila di 10 mattoni. Riesce a salire di 4 mattoni ogni ora. Ma, poiché lo sforzo è per lei molto grande, passa tutta l'ora seguente a dormire e durante il sonno scivola in basso di 3 mattoni.

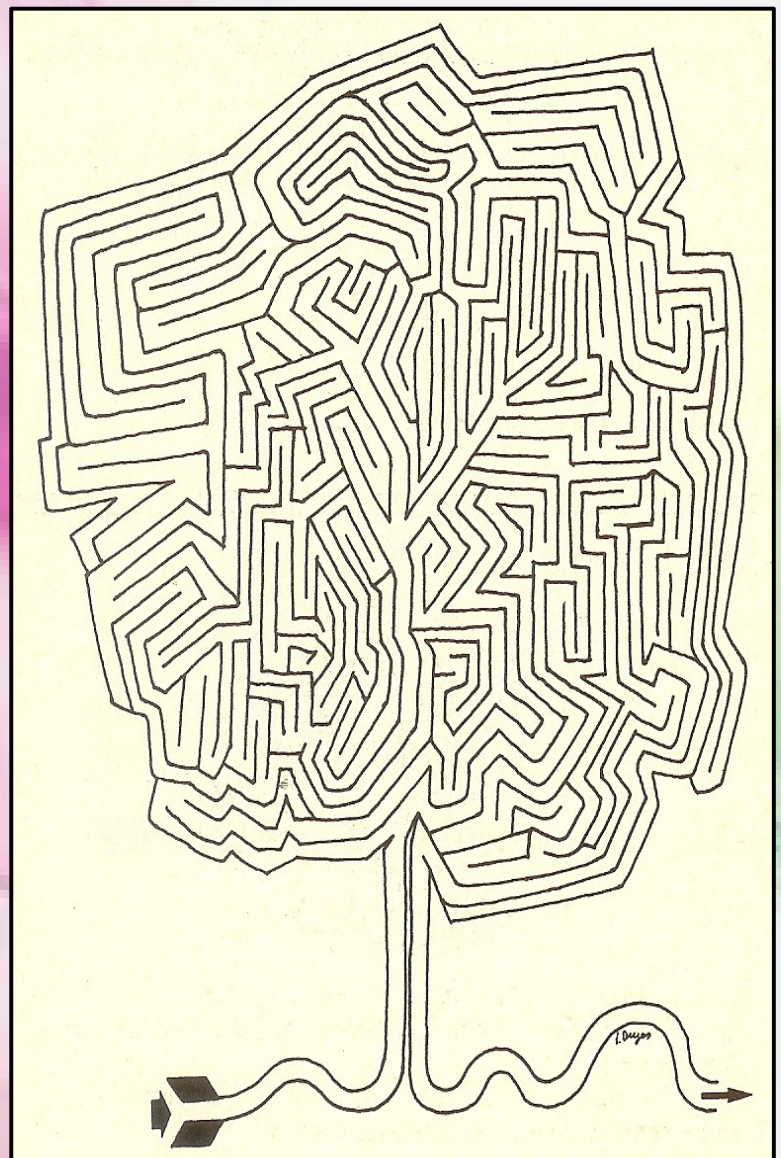
Quanto tempo impiegherà la lumachina ad arrivare in cima?

Sul fiume...

Due battelli fanno la spola tra due città, A e B, bagnate dallo stesso fiume. Hanno la stessa velocità costante: sono ugualmente veloci quando vanno nel senso della corrente e ugualmente lente quando devono risalirla. A una data ora ognuno parte da una delle due città. Si incrociano una prima volta a 7 km dalla città A. Arrivati a destinazione, si fermano entrambi 4 minuti per far scendere i passeggeri. Poi ripartono e si incrociano nuovamente, ma questa volta a 9 km dalla città A. Quanto distano l'una dall'altra A e B?

Il labirinto!

Entra nel labirinto e...cerca di uscirne!



Matematica...



Api

84

Le api quotidianamente risolvono **problemi di ottimizzazione**, come quelli di **minimo spazio**: le api operaie costruiscono i favi per ospitare le uova che l'ape regina depone e per custodire il miele, secondo un'ottimale razionalizzazione dello spazio e un risparmio del materiale da costruzione, la cera.

85

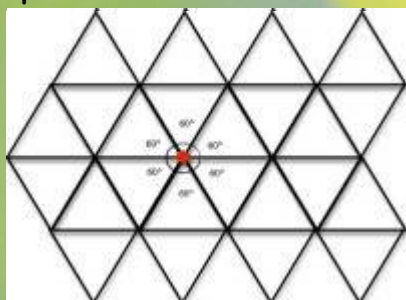
Il favo, infatti, è costituito da celle a forma di prismi la cui sezione trasversale è un esagono regolare, ossia con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza, 120° .

Perché questa è la scelta ottimale?

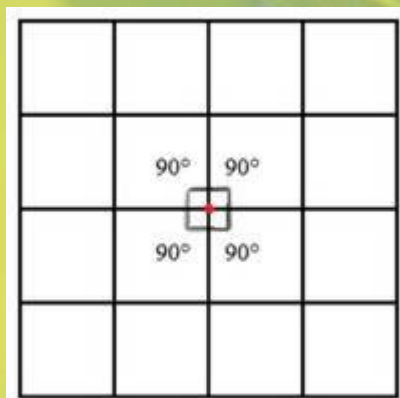
Le figure geometriche che, a parità di area, hanno perimetro minore sono: il cerchio, il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono. I poligoni, a differenza del cerchio, riescono a realizzare una tassellatura del piano, ossia riescono a ricoprirlo interamente senza sovrapposizioni o spazi vuoti.

In base a tali considerazioni, la tassellatura in due dimensioni di un favo potrebbe essere rappresentata da sezioni delle celle di forma:

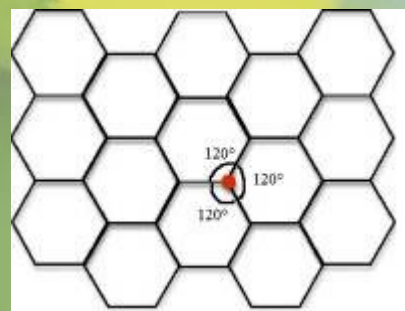
triangolare, facendo in modo che 6 triangoli abbiano sempre un vertice in comune, affinché $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ e quindi non si lascino spazi vuoti.



quadrata, facendo in modo che in ogni vertice convergano 4 quadrati, affinché $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.



esagonale, facendo in modo che ogni vertice sia comune a 3 esagoni, affinché $3 \times 120^\circ = 360^\circ$.



...nella **Biologia**

Nelle tre situazioni precedenti si riesce a ricoprire uniformemente la superficie senza lasciare spazi vuoti, né sovrapporre i poligoni, ma il valore del perimetro complessivo cambia e, di conseguenza, la quantità di cera necessaria a costruire le pareti del favo: un favo con prismi esagonali minimizza la quantità di cera e ottimizza l'immagazzinamento di miele all'interno delle celle.

Curiosità: *La danza delle api...*

Le api hanno la capacità di ottimizzare sia la distanza che la quantità di nettare disponibile in ogni fiore. A parità di quantità di nettare, le api volano lungo la traiettoria più breve. Se un fiore contiene più nettare di un altro, le api lo visitano per primo solo se questo non implica un significativo aumento della distanza totale. Sanno mettere in atto capacità geometriche nel comunicarsi la posizione esatta in cui si trova il cibo, eseguendo danze lungo le pareti verticali dei favi: una danza circolare indica una sorgente di cibo nel raggio di 25 m dall'alveare, una danza ondeggiata a forma di 8 indica una fonte di cibo tra i 25 e i 100 m dall'alveare.

86

Ridiamoci su!

Una maestra detta i compiti per casa alla classe.

- "I compiti assegnati sono: i primi 15 problemi del capitolo 3, poi i primi 10 del capitolo 5 e per finire i primi 12 del capitolo 7."

Allora uno scolaro sospira:

- "Povero papà...!"



Bolle di sapone

Chi non ha mai giocato, da piccolo, con le bolle di sapone? Non sono solo un passatempo per grandi e piccini, ma anche un valido esempio di come concetti astratti di matematica possano essere compresi e visualizzati concretamente in fenomeni empirici.

Perché le bolle di sapone hanno proprio quella forma sferica che osserviamo?

Questo accade perché la **sfera** minimizza la superficie necessaria a rivestire un determinato volume, vale a dire che di tutte le superfici che delimitano solidi di uguale volume, la sfera ha l'area minore. Ricordiamo che anche nel caso bidimensionale, la **circonferenza** è la curva chiusa di lunghezza minore rispetto al perimetro di qualsiasi poligono avente l'area uguale al cerchio da essa racchiuso.

87

88

Se poi proviamo a mettere due cerchi metallici paralleli di grandi dimensioni nell'acqua saponata, ci accorgiamo che non si forma un cilindro (come potrebbe sembrare logico) ma un altro solido, più particolare e strozzato, noto ai matematici col nome di **catenoide**.

Il catenoide è per l'appunto un esempio di superficie minima.

Un altro esempio ancora è dato dall'**elicoide retto**, un solido molto simile ad una scala a chiocciola: se prendiamo una striscia di metallo corrispondente ai bordi dell'elicoide e la immergiamo in acqua saponata, questo è il risultato che si ottiene:

89

Seguendo lo stesso principio, si può immergere nel sapone qualsiasi forma e notare che la lamina si dispone in modo da minimizzare l'area.

Tutti questi modelli di superfici minime furono studiate sperimentalmente da Plateau, che preparava lamine saponate di tutti i tipi. Durante i suoi esperimenti, Plateau riusciva sempre ad ottenere una lamina saponata, qualunque fosse la forma del telaio usato. Questi esperimenti quindi dimostravano che le superfici minime finora conosciute non erano che una piccolissima parte delle superfici minime esistenti, delle quali bisognava però trovare le espressioni matematiche.

90

91

92

Visto il successo degli esperimenti di Plateau, da allora il problema di trovare la superficie di area minima avente come bordo un qualunque numero di curve chiuse nello spazio prende il nome di problema di Plateau, divenendo, di fatto, un problema di matematica pura o, al limite, di fisica matematica.

Curiosità: Angoli e bolle...

Se uniamo più lamine di sapone, queste si incontrano sempre a gruppi di tre o di quattro formando di conseguenza angoli di 120° e di $109,47^\circ$.

Frattali

I **frattali** sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi fino all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta.

Il termine venne coniato da Benoît Mandelbrot e deriva dal latino *fractus* che significa rotto, spezzato.

I frattali compaiono un po' ovunque, ma il luogo dove stupisce maggiormente la loro presenza è la natura!

93

Ad esempio, in una felce. Una parte della felce è simile a tutta la felce stessa, ovvero è una copia in piccolo della foglia completa. Allo stesso modo si può procedere innumerevoli volte fino a ridursi a parti sempre più piccole. La parte evidenziata in **rosso** è la copia in piccolo dell'intera foglia. La parte evidenziata in **blu** a sua volta è la copia ridotta della parte in rosso. Infine la parte **celeste** è la copia ridotta della parte blu. Questa proprietà prende il nome di autosimilarità (o autosomiglianza): una parte dell'oggetto è simile al tutto.

Altri frattali che possiamo notare in natura sono i broccoli romaneschi, i fiocchi di neve, le piante grasse, i girasoli. Infatti la natura si muove attraverso schemi non geometrici: le montagne non possono essere definite coni, le nuvole non sono sfere e un fiume non è una semplice linea. La natura, quindi, ha bisogno di un sistema non puramente geometrico per definirsi, ed è quello frattale.

94

95

Anche il nostro corpo è costituito da tantissimi frattali. Non ci credete?

Pensate al sistema vascolare o all'apparato respiratorio: la natura ha scelto di organizzarli così per ottimizzarli! Prendiamo ad esempio i piccoli vasi sanguigni del cuore e le loro ramificazioni in vasi ancora più ridotti. Se poi vogliamo arrivare alla base di tutto, pensiamo ai nostri neuroni!

Sequenza di Fibonacci

“Da una coppia di conigli, animali che si riproducono in modo molto rapido, in un momento dato nasce un'altra coppia di conigli.

Passa un mese e la coppia iniziale genera un'altra coppia di animali, mentre la prima coppia nata, che è ancora troppo giovane per riprodursi, dovrà aspettare il mese successivo. Al terzo mese, questa coppia e quella iniziale generano ognuna un'altra coppia di conigli. Lo stesso accade il mese successivo e così via, supponendo dunque che coppie nuove di conigli inizino ad avere figli solo a partire dal secondo mese dopo la loro nascita.”

96

97

Ci possiamo chiedere quante coppie di conigli ci saranno in tutto alla fine di un certo periodo di tempo, supponendo che siano rimasti tutti in vita.

Proviamo a rispondere contando il numero di coppie che si hanno mese per mese. Si parte da 1 coppia, cioè all'inizio la risposta è 1. Al primo mese abbiamo ancora una sola coppia, perché i conigli sono ancora troppo giovani per riprodursi.

Al secondo mese abbiamo 1 coppia più la coppia di figli appena nata, cioè 2 coppie. Al terzo mese, solo 1 delle 2 coppie può avere figli, e dunque si avranno in tutto 3 coppie. Al quarto mese, delle 3 coppie esistenti al mese precedente solo 2 possono avere figli, e avremo 5 coppie. Il mese successivo potranno avere figli solo le coppie che erano presenti al mese precedente, cioè 3 coppie, e si avranno dunque in tutto 8 coppie.

Il meccanismo è chiaro: per avere il numero di coppie di conigli presenti in un certo mese, quello che dobbiamo fare è sommare le coppie presenti il mese prima a quelle presenti nel mese ancora precedente, che sono le sole in grado di procreare al mese considerato.

98

La successione di numeri che viene fuori è 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., che vengono chiamati **numeri di Fibonacci**, perché il matematico italiano è stato il primo a prenderli in considerazione, proprio esaminando il problema dei conigli.

Come abbiamo visto, è molto facile costruire i termini successivi della **successione di Fibonacci**. Tutto quello che dobbiamo fare è sommare ogni volta gli ultimi due numeri della successione per trovare il termine successivo. Così, dopo 55, si avrà $34+55$, cioè 89, dopo di che $55+89=144$ e così via.

Curiosità: Dove si trova la successione di Fibonacci?

Si tratta di una delle successioni di numeri più celebri considerate in matematica, anche per le numerose applicazioni che trova in ambito reale, per esempio in campo artistico, in connessione con il celebre rapporto numerico chiamato sezione aurea.

99

Difficilmente in natura troverete fiori con un numero di petali diverso da un numero di Fibonacci, ad esempio i gigli ne hanno 3, e le margherite e i girasoli possono averne 34, 55, o 89.

Se contiamo le spirali dell'involucro di una pigna, scopriremo che ce ne sono 8 in senso orario e 13 in senso antiorario. Ma anche l'ananas segue tale successione nel numero delle scaglie.

100

101

Simmetrie

Nel corso della storia, il significato di **simmetria** è stato associato all'idea di bellezza e armonia, mentre oggi ha un significato più matematico anche se rimane un canone di bellezza.

Esistono due tipi di simmetria: quella rispetto ad un centro e quella rispetto ad un asse.

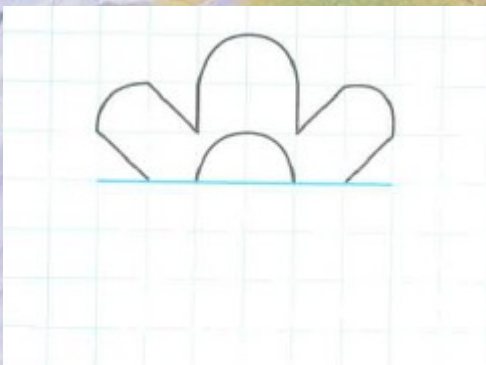
- Una figura è **simmetrica rispetto a un centro** se la sua forma presenta una certa regolarità attorno a tale punto centrale.
Ad esempio i fiocchi di neve, le stelle marine, alcuni fiori tra cui i girasoli.

102

103

- Una figura è **simmetrica rispetto a un asse** (o **simmetrica assialmente**) se la sua forma, da una parte e dall'altra di tale asse, è uguale ma ribaltata. La simmetria assiale è detta anche **riflessione**. L'asse di simmetria può essere sia interno, ad esempio le farfalle, le coccinelle, gli uccelli ed altri animali e il corpo umano, che esterno come quando ci riflettiamo per intero nello specchio o nell'acqua.

Gioco: Disegna la parte simmetrica!



Curiosità: Parole allo specchio!

Anche alcune parole o frasi sono simmetriche, cioè si possono leggere sia da sinistra a destra che da destra a sinistra. Esse vengono dette palindromo. Ad esempio otto, radar, Anna, in amor io diffido i romani,...

104

Matematica...

Fin dall'antichità l'uomo ha avvertito l'esigenza di nascondere ad occhi indiscreti il contenuto di comunicazioni riservate e rivelarlo solo al destinatario. Il pericolo dell'intercettazione da parte di eventuali avversari e la necessità di trovare stratagemmi per comunicare in modo segreto e sicuro hanno favorito la nascita della Crittografia.

105

La **Crittografia** (dal greco: *kryptòs* = nascosto, *gràphein* = scrivere cioè scrittura nascosta) è l'arte di rendere un messaggio illeggibile a qualunque persona non autorizzata a leggerlo.

Esempi storici di scritture segrete sono:

- Scitala spartana (V sec a.C.):
Consisteva in un'asta cilindrica (detta scitala), costruita in due esemplari identici posseduti dai due corrispondenti, su cui era avvolta ad elica una fettuccia di cuoio. Il messaggio era scritto sulla fettuccia secondo le generatrici del cilindro. La fettuccia era quindi svolta e spedita al destinatario che poteva interpretarne il contenuto riavvolgendola sull'asta e ricostituendo così i giusti accostamenti tra le lettere.

106

- Disco di Enea (390 - 360 a.C.):
Si tratta di un disco sulla zona esterna del quale erano contenuti 24 fori, contrassegnati dalle lettere disposte in ordine alfabetico. Un filo, partendo da un foro centrale, si avvolgeva passando per i fori delle successive lettere del testo. Il destinatario del messaggio svolgeva il filo del disco segnando le lettere da esso indicate. Il testo si doveva poi leggere al contrario.

107



...nell'Informatica

- **Cifrario di Cesare:**
L'idea di base del cifrario di Cesare è molto semplice: il cifrato è ottenuto dal messaggio in chiaro sostituendo ogni lettera del messaggio in chiaro con la lettera che la segue tre posizioni più avanti nell'alfabeto.

108

Prova tu!

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <i>Alfabeto normale:</i> | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| <i>Alfabeto cifrante:</i> | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z | A | B | C |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|--|---|---|--|---|---|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| <i>Messaggio originale:</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <i>Messaggio cifrato:</i> | F | L | I | U | D | U | L | R | | G | L | | F | H | V | D | U | H | | | | | | | | | |

- **Macchine cifranti: Enigma**
Nella prima metà del XX secolo cominciarono a diffondersi le macchine cifranti tra le quali l'esempio più celebre è la macchina cifrante Enigma, ideata nel 1918 dal tedesco Arthur Scherbius per fronteggiare il nuovo fenomeno dello spionaggio industriale e adottata poi dall'esercito e dalla marina militare tedesca fino alla seconda guerra mondiale per proteggere le comunicazioni militari nella Germania nazista.

La macchina Enigma aveva l'aspetto di una macchina per scrivere con due tastiere: una vera inferiore, e la seconda superiore costituita da lettere luminose che si accendevano ad ogni tasto premuto sulla tastiera inferiore. La sequenza delle lettere che si illuminavano dava il messaggio cifrato (o quello in chiaro, se si digitava il testo cifrato). Il sistema di codifica della macchina Enigma era così sofisticato che nessuno riteneva possibile la decrittazione dei suoi messaggi: già il modello base permetteva di arrivare a circa 150 milioni di milioni di milioni di combinazioni diverse.

109

Solo grazie al primo computer, Colossus, costruito da Max Newman e Tommy Flowers basandosi sugli studi del matematico Alan Turing nel 1944, furono decifrati i messaggi tedeschi e in questo modo si anticipò di due anni la fine della guerra.

110

Come funziona la crittografia?

111

“Alice vuole inviare un messaggio riservato a Bob utilizzando un canale di trasmissione non sicuro e teme che un intruso, Eva, possa intercettarlo per leggerlo, modificarlo o sostituirlo.

Per proteggere la comunicazione Alice si preoccuperà di cifrare il messaggio in chiaro utilizzando una funzione matematica idonea ed una chiave di cifratura predeterminata e inviare il cifrato, così ottenuto, a Bob.

Quando Bob riceve il messaggio cifrato, lo decifra applicando la funzione matematica inversa ed una chiave di decifra, non necessariamente uguale a quella di cifratura, ottenendo il testo del messaggio.

Eva non conosce la chiave di decifra, per cui quando intercetta il testo cifrato non può decifrarlo immediatamente, dovrà sforzarsi di capire come violare il sistema di cifratura adottato da Alice.”

Quindi la Crittografia è costituita da **cifratura**, **decifratura** e **attacchi dall'esterno**.

112

113

Curiosità: Chi usa la Crittografia?

La Crittografia viene utilizzata in diversi dispositivi, tra i quali:

- cellulari;
- Bancomat;
- Internet: e-mail, acquisti online.

114

La Crittografia si basa sulla **fattorizzazione di numeri primi**, cioè sul fatto che matematicamente è molto facile moltiplicare due numeri primi, ma molto difficile partendo dal prodotto risalire ai numeri primi usati. È per questo che il prodotto viene solitamente usato per crittografare, mentre i due numeri primi sono la chiave conosciuta solo da chi riceve il messaggio e usata per decifrarlo.

Crivello di Eratostene:

Il matematico greco Eratostene, vissuto intorno al 200 a.C., inventò un metodo per scoprire i numeri primi nella tabella dei primi 100 numeri: tale metodo venne poi chiamato **crivello (=setaccio) di Eratostene**.

Segui le istruzioni e scoprirai come fece Eratostene a setacciare i numeri naturali in modo da ottenere solo numeri primi:

- Cancella con una **X** l'1 perché non è considerato un numero primo avendo un solo divisore.
- Cerchia il 2 e cancella con una **X** tutti i suoi multipli.
- Cerchia il 3 e cancella con una **X** tutti i suoi multipli.
- Cerchia il 5 e cancella con una **X** tutti i suoi multipli.
- Cerchia il 7 e cancella con una **X** tutti i suoi multipli.
- Cerchia i numeri rimasti.
Tutti i numeri cerchiati sono numeri primi!

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Curiosità: Il problema di Goldbach.

Nel Settecento, un matematico di nome Goldbach, sosteneva che tutti i numeri pari potevano essere scritti come la somma di due numeri primi. Nessuno è mai riuscito a dimostrare che è così, ma nessuno ha mai neppure dimostrato il contrario. Ancora oggi, che i matematici hanno a disposizione il computer per fare i calcoli, non si è giunti a una soluzione!

115

Soluzioni dei giochi!

Nell'orto sul Tigri:

I frutti nel cesto sono 4:
2 mele e 2 fichi.

La piramide del faraone:

| | | | | |
|-----|----|----|----|---|
| 100 | | | | |
| 48 | | 52 | | |
| 25 | 23 | 29 | | |
| 15 | 10 | 13 | 16 | |
| 9 | 6 | 4 | 9 | 7 |

Cruciverba:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | | 1 | 6 | | 1 | 2 | 5 |
| 1 | 0 | | 6 | 9 | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 7 | | 4 | 4 | | 2 | 0 | 1 | 2 |
| | | 1 | 6 | 8 | 4 | | | 5 | |
| | 2 | 5 | | | 8 | 0 | 0 | | 3 |
| 1 | 4 | 9 | 2 | | 4 | 0 | | 1 | 3 |

La scalata della lumachina:

La lumachina sale in media di un mattone ogni 2 ore. Dopo 12 ore, si sveglia riposata in cima al sesto mattone, impiega l'ora successiva a percorrere gli ultimi 4 mattoni, arrivando in cima alla 13^a ora.

Indovina indovinello:

1 uomo + 4 mogli x 4 sacche x 4 gatte x 4 gattini = 1 + 4⁴ = 257

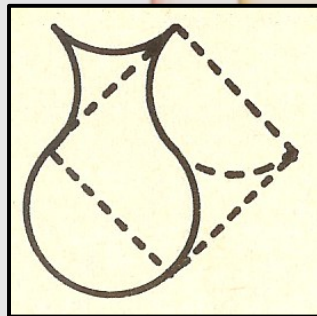
Sul fiume:

Poiché i due battelli partono e arrivano insieme, il problema è simmetrico e la situazione potrebbe essere invertita senza cambiare i dati numerici. Il primo e il secondo punto d'incontro coincidono: questo unico punto si trova dunque a 9 km da una città e a 7 km dall'altra. Le due città distano 16 km.

L'enigma della Ziggurat:

| | | |
|---|----|---|
| 9 | 2 | 7 |
| 4 | 6 | 8 |
| 5 | 10 | 3 |

Un vaso a pezzi:



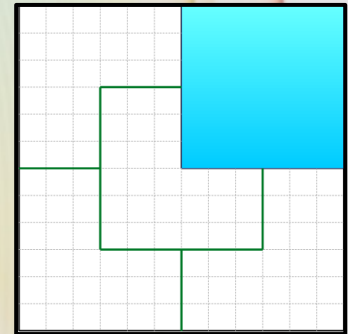
Quadro astratto:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ○ | △ | ◇ | □ | ▭ |
| ◇ | ○ | ▭ | △ | □ |
| ▭ | ◇ | □ | ○ | △ |
| □ | ▭ | △ | ◇ | ○ |
| △ | □ | ○ | ▭ | ◇ |

Tutti al MUSE:

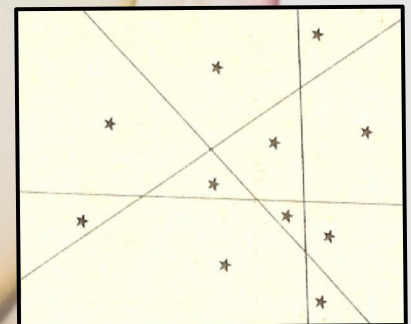
sono tutti liberi il giovedì pomeriggio.

Un campo da dividere:

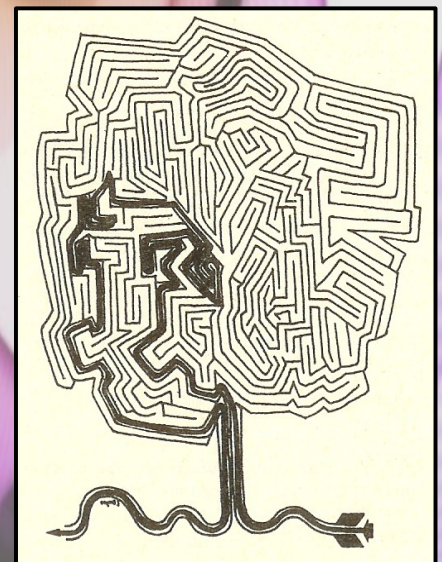


Cielo stellato:

bastano 4 rette



Il labirinto:



*Certificato del
Matematico Esperto*

Congratulazioni _____ !

*Hai completato il tuo viaggio alla
scoperta della matematica!*

*Sei dunque ufficialmente un
Esploratore della Matematica.*

Firma

Isabella Coccinella

