In Vino Veritas …
E Nelle Botti?

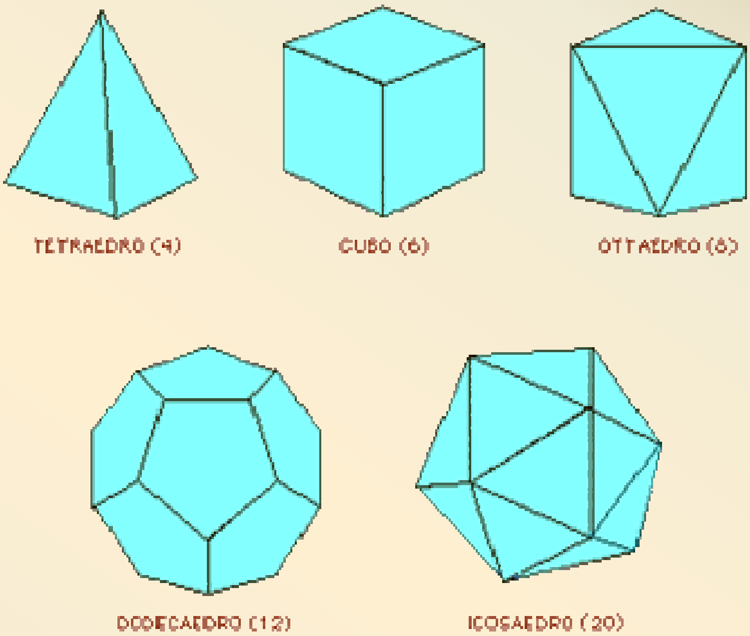
Un percorso riguardante la storia del calcolo dei volumi ai suoi albori che partendo da un’indagine matematica che profuma di idealismo platonico va intrecciandosi con la problematica pratica di conoscere quanto vino può contenere una botte e prende il sapore di un indovinello medievale diffuso nelle scuole d’abaco.

Alle Origini

Narra la leggenda che il problema della duplicazione del cubo è legato all'isola di Delo. Apollo avrebbe richiesto, per mezzo di un oracolo, di raddoppiare il volume del suo altare mantenendone la forma cubica. Gli abitanti si misero alla ricerca del procedimento per ottenere un volume doppio, ma questo problema si rivelò tutt'altro che semplice. Infatti se si raddoppia il lato si ottiene un cubo di volume non doppio ma otto volte maggiore. Quindi si rivolsero a Platone il quale interpretò la richiesta di Apollo come un monito per riflettere sull'importanza della matematica.

All'inizio di questo percorso sul calcolo dei volumi, ricordiamo i primi passi compiuti nello studio dei solidi. Infatti, già nelle antiche civiltà il solido è stato oggetto di interesse, ma non tanto per il desiderio di calcolarne il volume, bensì per il fascino che suscita la ricerca di sue particolari simmetrie e regolarità.

Primi fra tutti in questa indagine collochiamo i pitagorici che probabilmente conoscevano i solidi regolari che poi passeranno alla storia sotto il nome di solidi platonici.
Di Ippocrate invece ricordiamo la formulazione del *problema di Delo*, che richiede dato un cubo di costruirne uno di volume doppio.

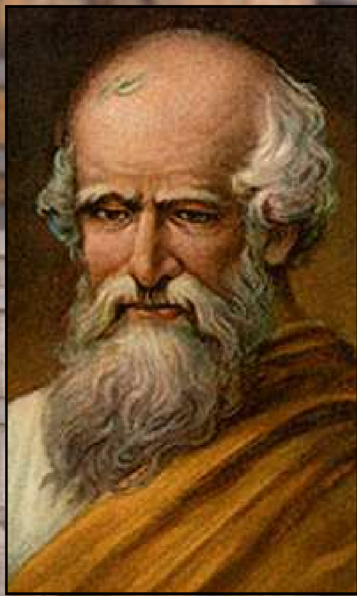


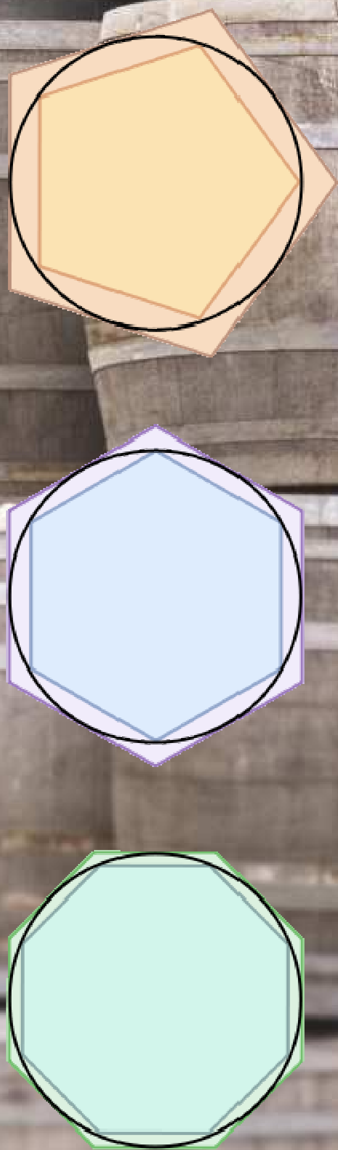
Non dimentichiamo l'influenza di Platone nell'approccio alla geometria, tramite il suo interesse per i cinque solidi regolari: *tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro*. Anche in ambito matematico l'attenzione del filosofo è rivolta ad ammirare nelle forme la bellezza delle idee e ciò contribuì allo sviluppo della ricerca della perfezione a scapito dell'indagine pratica finalizzata alla misura del volume.
Con Euclide si avrà poi una strada spianata per lo studio della geometria piana e occorre però aspettare Archimede per parlare di calcolo del volume di un solido.

Archimede e il Calcolo per Esaustione

Tra le scoperte e le invenzioni del genio siracusano del III sec a.C ricordiamo lo studio sulla relazione tra sfera e cilindro descritta nell'opera *Sulla sfera e sul cilindro*. Considerato un cilindro alto quanto il raggio della circonferenza di base, il cono e la mezza sfera inscritti in esso, Archimede ha mostrato che la mezza sfera è equivalente al cono. Essendo il volume del cono 1/3 di quello del cilindro, si può affermare che il volume della sfera è 2/3 di quello di un cilindro avente per base un cerchio massimo della sfera e per altezza il diametro di essa.

$V_{Sfera}=V_{Cilindro}-V_{Cono}$





"Quando ero questore in Sicilia mi misi a cercare la sua tomba invasa dalle erbe e dagli sterpi, che i siracusani non conoscevano e anzi negavano che esistesse. Avevo infatti sentito parlare di alcuni versi incisi sulla tomba che spiegavano perché essa fosse sormontata da una sfera e da un cilindro. Fuori da Porta Agrigentina c'è un gran numero di sepolture, e a forza di cercare e di guardare notai finalmente una piccola colonna che appena superava la boscaglia di sterpi, e su di essa erano raffigurati una sfera e un cilindro".

Racconto di Cicerone tratto da Tusculanae Disputationes

...il metodo per esaustione…
Consiste nel pensare all'area di un cerchio come ad una quantità minore dell'area di un poligono circoscritto ad esso e maggiore dell'area di un poligono inscritto in esso. Aumentando sempre più il lati dei poligoni si avrebbe un'approssimazione migliore dell'area del cerchio. Analogamente il volume della sfera assume un valore compreso tra i volumi di due poliedri uno inscritto e l'altro circoscritto ad essa.

Archimede e il Calcolo per Esaustione

Egli fornisce questo enunciato: *"Ogni sfera è quadrupla del cono avente per base il cerchio massimo della sfera e per altezza il raggio della sfera"*.

Diamo ora un'idea della dimostrazione presentata da Archimede. Egli considera un nuovo cono di volume 4 volte maggiore di quello descritto nell'enunciato e mostrerà la sua uguaglianza con la sfera.
Lo costruisce mantenendo l'altezza invariata e prendendo come cerchio di base un cerchio che sia 4 volte il cerchio massimo della sfera cioè un cerchio con raggio doppio di quello della sfera.
Procede dimostrando l'uguaglianza tra la sfera e questo cono.
Per assurdo suppone che la sfera abbia volume diverso da quello del cono: sarà quindi minore o maggiore. Utilizzando il metodo di esaustione si giunge a risultati contrastanti.
Quindi si conclude che la sfera è uguale al cono che ha per base il quadruplo del cerchio massimo della sfera.

Visualizziamo ora la dimostrazione condotta, tramite il metodo degli indivisibili, da Luca Valerio un matematico del 1500.

Consideriamo un cono e una semisfera inscritti nel cilindro.

Togliamo la semisfera dal cilindro e otteniamo un solido che chiamiamo scodella.

Tagliamo con un piano parallelo alla base sia il cono sia la scodella ad una distanza *h* a partire dall'alto.

Si formano le due sezioni: un cerchio di raggio *k* e una corona circolare di raggio esterno *R* e raggio interno *r*.

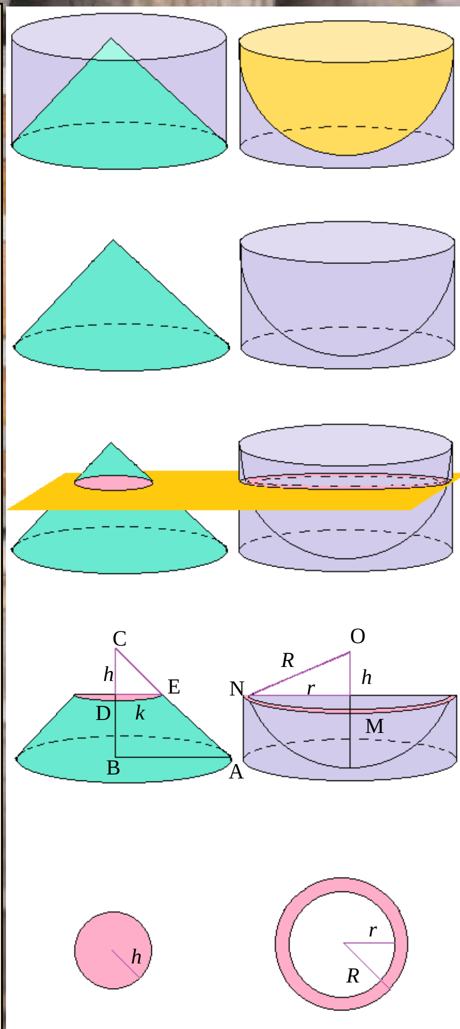
Essendo il cono costituito da raggio di base uguale all'altezza, il triangolo ABC è retto in B e isoscele e il triangolo DEC è simile ad esso. Perciò $k = h$.

Per quanto riguarda, invece, la sezione di scodella si osserva che il triangolo NMO è retto in M e ha per ipotenusa il raggio R della sfera essendo O il centro. Per il teorema di Pitagora $r^2 = R^2 - h^2$

Calcolando l'area delle sezioni delle due figure, noto che sono uguali:

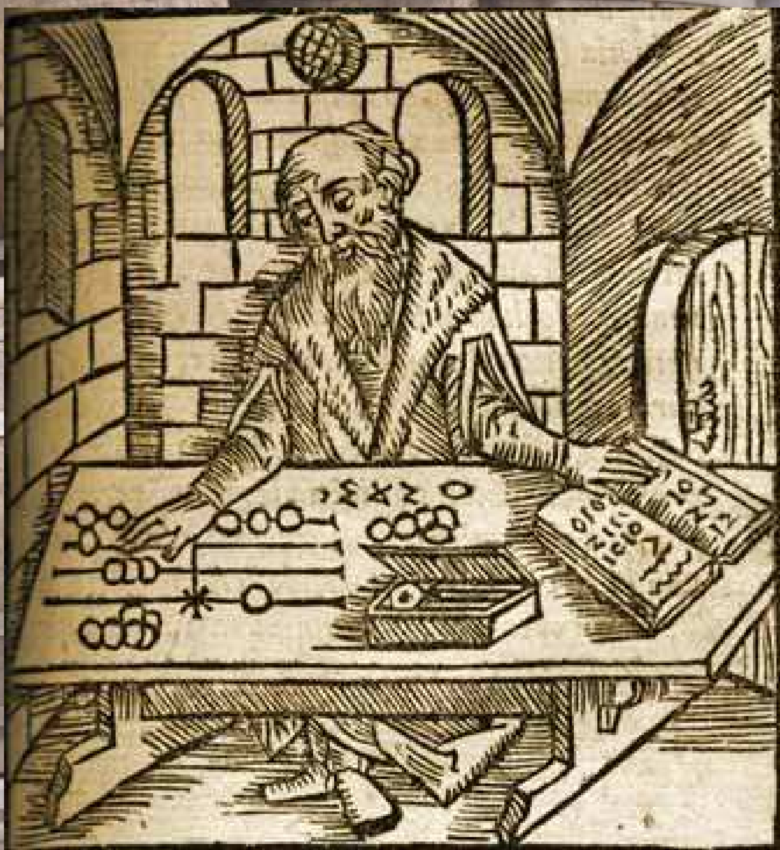
$$A_{\text{Corona circolare}} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi R^2 - \pi(R^2 - h^2) = \pi h^2 = A_{\text{Cerchio}}$$

Questo vale per tutti i piani, che, sovrapposti tra loro, costituiscono le figure. Allora si conclude che il cono e la scodella hanno lo stesso volume. Cioè il cilindro privato della mezza sfera è equivalente al cono.



Scuole d'Abaco e la Capacità di una Botte

Tra la fine del Medio Evo e l'inizio del Rinascimento sia ha una fioritura in Italia delle cosiddette scuole d'abaco, centri di insegnamento della matematica. In questi ambienti oltre ad essere redatti veri e propri libri di testo, i trattati d'abaco, si affrontano molti problemi pratici che hanno a che vedere spesso con questioni di tipo economico finanziario o addirittura tecnico logistico.
Tra questi indaghiamo i modi in cui i maestri d'abaco si cimentano nel dare una soluzione al quesito: quanto vino può contenere una botte?



Il problema lo vediamo spiegato in *Liber geometriae* un trattato di aritmetica, algebra e geometria composto ad opera di Tommaso Agazzari più noto come Tommaso dalla Gazzaia, matematico senese vissuto tra il XIV e il XV secolo.
Nel manoscritto è esposto un metodo che approssima il volume della botte a una frazione di quella del cilindro lungo quanto la botte e con circonferenza di base determinata dal diametro medio.

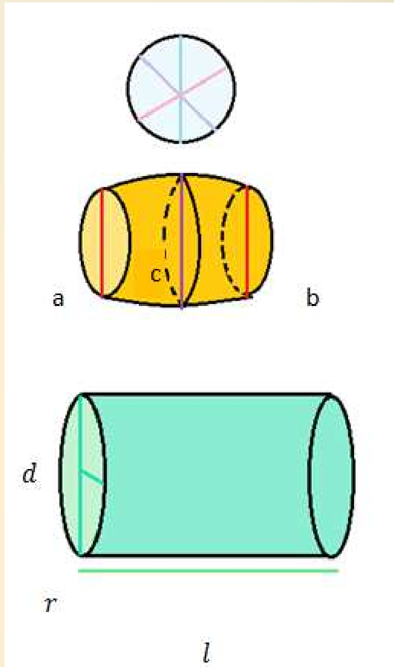
Scuole d'Abaco e la Capacità di una Botte

Secondo i consigli del nostro autore, considerate le due circonferenze laterali *A* e *B* della botte e la circonferenza centrale *C*, occorre calcolare il diametro medio nel seguente modo:

Calcolare il diametro di ognuna delle circonferenze prendendo per ciascuna di esse 3 misure del diametro e facendone la media (trovo tre valori *a*, *b*, *c*);

Calcolare il diametro medio delle circonferenze laterali $s = \frac{a+b}{2}$

Fare la media tra il diametro piccolo e quello grande $d = \frac{s+c}{2}$



Successivamente si calcola il volume del cilindro lungo *l* e con diametro di base *d* lo si divide per 5, si moltiplica per 29 e si divide per 30.

$V_{Cilindro} = \pi r^2 l$

$d = 2r$

$\pi \approx \frac{22}{7}$ *(l'approssimazione in uso nelle scuole medievali)*

Si trova allora la formula: $V_{Botte} = \pi r^2 l \, \frac{1}{5} \frac{29}{30}$ ovvero $V_{Botte} = d^2 l \frac{11}{14} \, \frac{1}{5} \frac{29}{30}$

LE REGOLUZZE

DI

MAESTRO PAOLO DELL' ABBACO

MATEMATICO DEL SECOLO XIV.

S' AGGIUGNE

UNA NOTIZIA BIBLIOGRAFICA

DELLE OPERE DI LUI.

PRATO,

DALLA TIPOGRAFIA GUASTI.

MDCCCLX.

Dal modo in cui l'argomento viene esposto nel trattato non sembra intenzione dell'autore dare una dimostrazione della formula e spiegare il motivo della scelta dei valori per i quali dividere e moltiplicare.

Sono invece esposti numerosi esempi con varianti alla formula dovuti a rimescolamenti a volte di difficile comprensione dei termini costanti in relazione anche alle unità di misura utilizzate: dallo *zuccolo* allo *staio*, dal *braccio di canna senese* al *ponto*.

Sono inoltre riportate delle tavole riguardanti la regola del 60, un'impresa dovuta a Paolo dell'abaco, maestro d'abaco della scuola di Santa Trinità a Firenze, vissuto nel XIV secolo, autore di *Trattato di aritmetica* e *Regoluzze*.

Un Indovinello Medievale

In molti scritti medievali, tra cui il Trattato d'aritmetica di Paolo dell'abaco, si incontrano problemi e indovinelli riguardanti la possibilità di isolare una parte di vino a partire da un certo numero di botti di capacità fissata.
Dilettiamoci con l'indovinello descritto verso la fine del 1400 in De Viribus Quantitatis da Luca Pacioli, frate appassionato di matematica.

Due persone devono dividere il vino contenuto in una botte da 8 some in modo da averne 4 some ciascuno, e non hanno misure o strumenti per poterlo dividere se non altre due botti vuote, una da 5 some e l'altra da 3. Domando come fanno a dividerlo equamente.

Doi ànno a partire una bote de vino che tene some 8 e si ne deve ciaschuno avere some 4 in sua parte, e non ànno altri mesure né instrumenti de poderlo partire se non do' altre botti voite, che l'una tiene some 5 e l'altra tiene some 3. Dimando commo lo partiranno giustamente.
Empi quella da 3 e voitala in quella da 5, e poi empi un'altra volta quella da 3 e con essa fornesci de empire quella da 5, e avrai in quella da 8 some 2 e in quella da 3 some una e quella da 5 sirà piena. Ora voita quella da 5 in quella da 8 e siranci some 7, e poi voita quella da 3 in quella da 5: arai in quella da 5 some una e in quella da 8 some 7; poi rempi quella de 3 un'altra volta e remaran in quella da 8 some 4, e poi voite questa da 3 in quella da 5, che ci n'era una e sirancine 4, e così arai 4 some in qua e 4 some in là, e fia partita per l'altro modo.

De Viribus Quantitatis Luca Pacioli

Inizialmente la botte da 8 è piena mentre le altre due sono vuote.

Riempi quella da 3

svuotala in quella da 5

poi riempi un'altra volta quella da 3

riempi completamente quella da 5, così avrai 2 some in quella da 8, una soma in quella da 3 e quella da 5 sarà piena.

ora svuota quella da 5 in quella da 8 e si arriva a 7

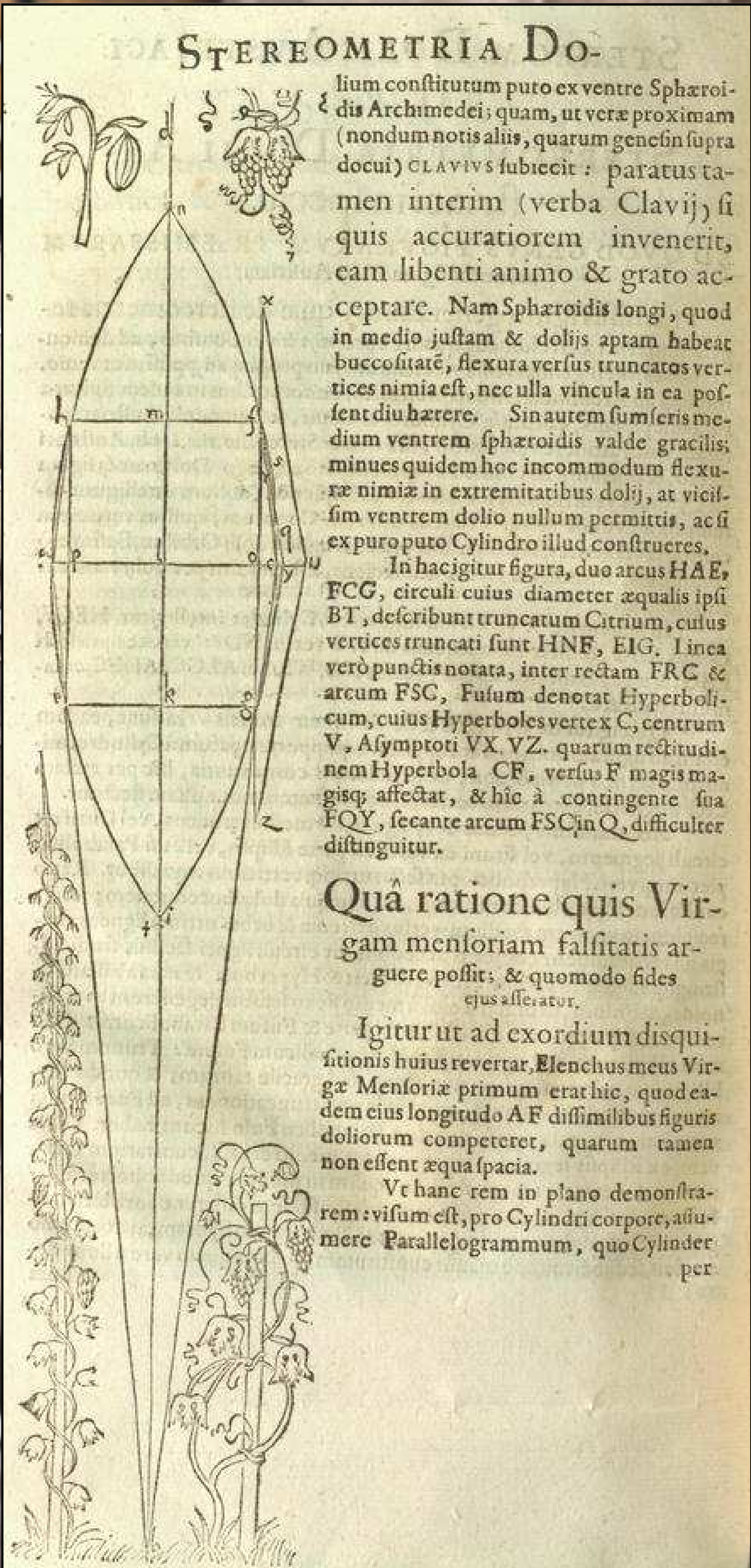
poi svuota quella da 3 in quella da 5: avrai una soma in quella da 5 e 7 some in quella da 8

poi riempi quella da 3 un'altra volta e rimarranno 4 some in quella da 8

poi svuota questa da tre in quella da 5, in cui ce n'era una e si arriva a 4.

botte da 8 litri	botte da 5 litri	botte da 3 litri
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Il Parere di Keplero



STEREOMETRIA DOlium constitutum puto ex ventre Sphæroidis Archimedei; quam, ut veræ proximam (nondum notis aliis, quarum genesin supra docui) CLAVIVS subiecit: paratus tamen interim (verba Clavij) si quis accuratiorem invenerit, eam libenti animo & grato acceptare. Nam Sphæroidis longi, quod in medio justam & dolijs aptam habeat buccositatẽ, flexura versus truncatos vertices nimia est, nec ulla vincula in ea possent diu hærere. Sin autem sumseris medium ventrem sphæroidis valde gracilis; minues quidem hoc incommodum flexuræ nimiæ in extremitatibus dolij, at vicissim ventrem dolio nullum permittis, ac si ex puro puto Cylindro illud construeres.

In hac igitur figura, duo arcus HAE, FCG, circuli cuius diameter æqualis ipsi BT, describunt truncatum Citrium, cuius vertices truncati sunt HNF, EIG. Linea verò punctis notata, inter rectam FRC & arcum FSC, Fusum denotat Hyperbolicum, cuius Hyperboles vertex C, centrum V, Asymptoti VX, VZ. quarum rectitudinem Hyperbola CF, versus F magis magisq; affectat, & hic à contingente sua FQY, secante arcum FSC in Q, difficulter distinguitur.

Quâ ratione quis Virgam mensoriam falsitatis arguere possit: & quomodo fides ejus asseratur.

Igitur ut ad exordium disquisitionis huius revertar, Elenchus meus Virgæ Mensoriæ primum erat hic, quod eadem eius longitudo AF dissimilibus figuris doliorum competeret, quarum tamen non essent æqua spacia.

Vt hanc rem in plano demonstrarem: visum est, pro Cylindri corpore, assumere Parallelogrammum, quo Cylinder per

Keplero nel 1615 scrisse *Nova stereometria doliorum vinariorum*, un’opera tutta dedicata a risolvere il problema della tenuta delle botti. Egli stesso afferma come nacque il suo interesse per l’argomento: in occasione del suo matrimonio in Austria comprò il vino e rimase stupito dalla facilità con cui il venditore calcolava il numero di anfore contenute nel barile a partire da un semplice misura.

Metteva la punta di rame di un'asta graduata nel buco di riempimento del barile, attraversandolo fino ad arrivare al tallone di ognuno dei dischi di legno ai quali ci riferiremo semplicemente come i fondi, e non appena la lunghezza rilevata dal buco di riempimento ad entrambi i talloni dei dischi era la stessa, il venditore dava il numero di anfore contenute nel barile dopo aver letto il numero dell'asta graduata nel punto dove la lunghezza in questione terminava. Rimasi stupito!

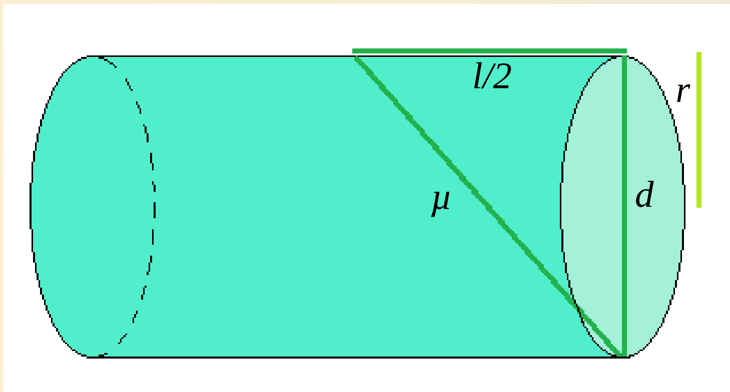
Il Parere di Keplero

Riassumiamo così lo studio matematico che ne seguì.
In prima approssimazione considera il volume del cilindro nelle variabili raggio *r* e lunghezza *l*.
Il suo scopo è esprimerlo in funzione della sola variabile μ che rappresenta la lunghezza misurata dal venditore con l'asta graduata.

Per il teorema di Pitagora $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2 = \mu^2$

Introduciamo la nuova variabile $s = \frac{l}{d}$

e scriviamo il volume del cilindro in funzione di s e μ



sostituendo $l = sd$ nella formula $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2 = \mu^2$ si trova:

$$\left(\frac{sd}{2}\right)^2 + d^2 = \mu^2$$

$$d^2\left(\frac{s^2}{4} + 1\right) = \mu^2$$

$$d^2\left(\frac{s^2+4}{4}\right) = \mu^2$$

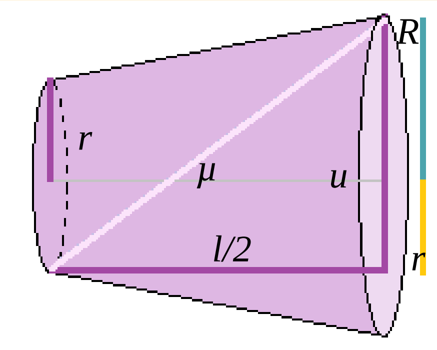
$$d = 2\mu(s^2+4)^{-\frac{1}{2}}$$

Ora calcolo il volume: $\pi r^2 l = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 sd = \frac{\pi s d^3}{4} = 2\pi s\mu^3(4+s^2)^{-\frac{3}{2}}$

Keplero osservò che la massima capienza si ha per un $s = \sqrt{2}$ e ipotizzò che i fabbricanti di botti austriaci utilizzassero un tale *s*. Perciò sostituendo $s = \sqrt{2}$ nella formula si giunge ad una espressione del volume del cilindro che dipende solo da μ quella distanza che il venditore di vino misurava con l'asta graduata.

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 l = 2\pi s\mu^3(4+s^2)^{-\frac{3}{2}} = 2\pi\sqrt{2}\mu^3\left(4+\sqrt{2}^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 2\pi\sqrt{2}\mu^3(6)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{2}\mu^3}{6\sqrt{6}} = \frac{\pi\mu^3}{3\sqrt{3}}$$

Il Parere di Keplero



Procediamo in modo analogo considerando che la botte assomiglia maggiormente a due tronchi di cono uguali che combaciano lungo la circonferenza maggiore. Il volume di un tronco di cono con R il raggio della circonferenza maggiore e r quello della circonferenza minore è dato da: $V_{\text{Tronco}} = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + rR)h$

Considerato che per il teorema di Pitagora $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + u^2 = \mu^2$

e introdotta la nuova variabile $u = R + r$ la formula per il calcolo del volume diventa:

$$V_{\text{Tron}} = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr)h = \frac{\pi}{3}((u-r)^2 + r^2 + r(u-r))\sqrt{\mu^2 - u^2}.$$

Dove abbiamo utilizzato le sostituzioni:

$$R = u - r$$

$$h = \frac{l}{2} = \sqrt{\mu^2 - u^2}$$

Lasciando costante μ, i valori di u e r che ottimizzano il volume sono tali che $u = 2r$

Se questo vale, allora si avrà $R = r$.

Ci si riduce così nuovamente ad un cilindro il cui volume è stato già espresso in funzione della sola variabile μ . Così Keplero risolse l'enigma svelando il mistero dei vinai austriaci.

È plausibile per Keplero che le botti austriache venissero costruite secondo una precisa regola di costi benefeci. La botte di migliore qualità è quella che a parità di legna utilizzata riesce a contenere più vino. Traduciamolo in linguaggio matematico: quella che a parità di superficie ha volume maggiore. Da ciò che abbiamo visto la risposta è la botte che più facilmente si approssima ad un cilindro.

Sì può partire dalla sola misura di μ per avere una abbastanza precisa della capacità di una botte austriaca utilizzando la formula:

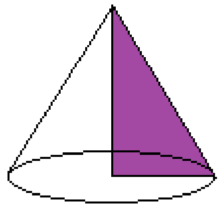
$$V_{\text{Cilindro}} = \frac{\pi\mu^3}{3\sqrt{3}}$$

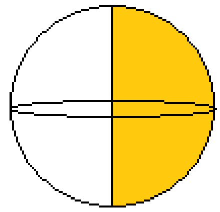
Il Parere di Keplero

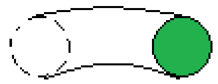
> *...li distinse con le col nome delle figure cui si assomigliavano, come a ragion di esempio, di anello, di fascia, di fuso, di cratere, di turbante, di tiara, di noce, di fragola, d'olivo, di fico, di cedro, di pero di mela, di cotogna...*

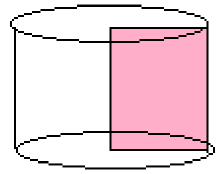
Il merito di Keplero nello sviluppo della matematica riguarda non tanto la soluzione dell'enigma ma ciò su cui questo episodio della sua vita lo farà riflettere: lo studio dei solidi di rotazione e il calcolo dei loro volumi.
Anzitutto il solido di rotazione è un solido che si può ottenere come rotazione di una figura piana attorno ad un asse. Ecco alcuni esempi:

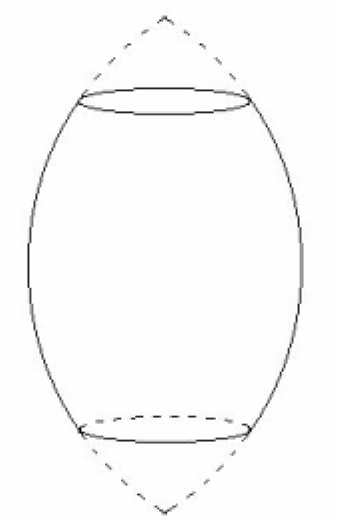
Solido	Figura piana	Asse
cono	Triangolo rettangolo	cateto
sfera	semicerchio	diametro
anello	cerchio	Retta esterna
cilindro	rettangolo	lato



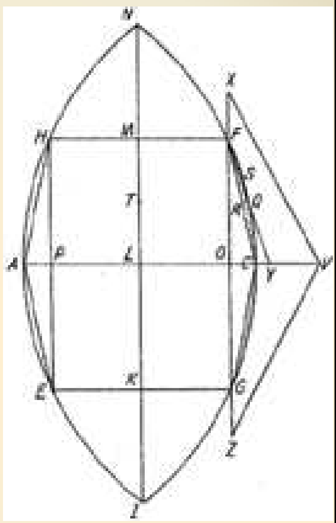








...il metodo della buccia…
Tra gli 87 solidi di cui si occupa è presente anche una figura a forma di cedro che può interessare alla nostra indagine data la sua somiglianza con la botte.
Egli immagina il solido come rotazione di un ramo di circonferenza attorno ad un asse interno al semicerchio. Ne calcola il volume sommando via via cilindri e porzioni massime di cilindri contenute all'interno questo suo metodo di calcolo è detto metodo a buccia proprio perché si parte dal centro del solido e si toglie il cilindro maggiore, e si cerca di immaginare le parti restanti come porzioni di cilindri sempre più piccoli.



Ulteriori passi nella storia della misura sono stati compiuti da Bonaventura Cavalieri nel XVII secolo con l’introduzione del metodo degli indivisibili, esposto nell’opera *Geometriae indivivisibilibus continuorum,* che si basa sulla considerazione di linee come un infinito numero di punti, di superfici come un infinito numero di linee e di volumi come un infinito numero di superfici.

Fu poi esteso al metodo degli indivisibili curvilinei da Evangelista Torricelli. Egli nell’opera *Nova per armillas stereometria* si promette di calcolare il volume dei solidi di rotazione e le superfici tramite la valutazione della stereometria delle armille solide e piane, che costituiscono rispettivamente il volume residuo di una sfera circoscritta a un solido e la superficie residua di una circonferenza circoscritta a un poligono.
Egli afferma così la possibilità di misurare la capacità di qualunque vaso, di qualsiasi forma esso sia.

Il salto dagli indivisibili al mondo dell’infinitesimale lo compì sul finire del XVII secolo Leibniz, che diede un contributo fondamentale al calcolo differenziale.
E da qui ha inizio il viaggio verso lo studio degli integrali che impegnerà le menti scientifiche dei secoli successivi.