

Relazione di accompagnamento a "Sotterranei & Sottoinsiemi"

Filippo Troncana

A.A. 2024/2025

Introduzione

L'idea di questo progetto è nata quando al primo anno alcuni miei colleghi ed io abbiamo iniziato a giocare a *Dungeons & Dragons* insieme: essendo tutti studenti di matematica, molto velocemente ci siamo chiesti se esistessero espansioni per il gioco create da utenti¹ a tema matematico.

In effetti ne abbiamo trovate alcune, ma ci hanno sempre lasciati insoddisfatti per la basilarità degli argomenti utilizzati, più affini alla matematica delle scuole medie o superiori che a quella universitaria, molto più affascinante. Scontento del materiale trovato, ho deciso di creare alcuni elementi di gioco a tema matematico che andassero a toccare una varietà di campi della matematica senza sacrificare la giocabilità.

Quello che presento qui sono quattro sottoclassi, ovvero delle "specializzazioni" per un personaggio, che mi sono premurato di raffinare e bilanciare più o meno sullo standard di quelle del materiale di base, in modo da renderle compatibili con la maggior parte delle ambientazioni e campagne. Un obiettivo futuro è quello di compilare una vera e propria espansione da pubblicare e lasciare in libero accesso alla comunità, magari attraverso enti come l'UMI, con sottoclassi per tutte e dodici le classi e molto altro materiale.

Un ringraziamento speciale va a mio fratello minore Nicolò e ai suoi amici, i quali si sono prestati come "cavie" senza possedere nessuna conoscenza di matematica avanzata.

1 Chierico - Teoria dei Numeri

1.1 Domini di integrità

Le sottoclassi del Chierico in *Dungeons & Dragons* sono chiamate "domini divini", dunque è stato naturale scegliere il tema di questa sottoclasse

Definizione 1.1: Dominio di integrità

Sia $(R, +, \times)$ un anello commutativo^a con zero 0.

R si dice **dominio di integrità** se e solo se vale una delle seguenti proprietà equivalenti, dette **leggi di cancellazione**:

- $\forall a, b \in R, a \times b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$
- $\forall a, b, c \in R : a \neq 0, ab = ac \Leftrightarrow b = c$

^aSpesso viene richiesto che R sia anche unitario, ma non in tutte le fonti

Le leggi di cancellazione rendono i domini di integrità gli ambienti naturali nei quali parlare di divisibilità.

1.2 Divisione con resto

La nozione di divisione con resto imparata alle elementari è una nozione importantissima in teoria dei numeri, dove viene generalizzata in questo modo a una classe di domini detti domini euclidei.

Definizione 1.2: Dominio euclideo

Sia $(R, +, \times)$ un dominio di integrità con zero 0 e unità 1.

Una **funzione euclidea** è una funzione $f : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ è una funzione dotata delle seguenti proprietà:

- Per ogni $a, b \in R \setminus \{0\}$ esistono unici $q, r \in R$ tali che $a = q \times b + r$, con $r = 0$ oppure $f(r) < f(b)$.
- Per ogni $a, b \in R \setminus \{0\}, f(a) \leq f(a \times b)$.

Un dominio dotato di una funzione euclidea si dice **dominio euclideo**.

¹Pratica entusiasticamente incentivata da *Wizards of the Coast*, la compagnia che detiene i diritti di *Dungeons & Dragons*

Il chierico ha generalmente un ruolo più difensivo in un *party*, dunque ho scelto di dargli un potere che gli permettesse di sobbarcarsi parte dei danni diretti ai suoi alleati, ridirigendone parte verso il nemico.

1.3 Permutazioni

Uno strumento di fondamentale importanza in teoria dei numeri e in generale nell'algebra sono le permutazioni,

Definizione 1.3: Permutazioni

Sia X un insieme. Si dice gruppo delle **permutazioni** su S il gruppo $\text{Aut}(X)$ con la composizione di funzioni, e lo indichiamo con S_X .

In particolare, se $|X| = \kappa$ per un qualche cardinale κ , si ha che $S_X \cong S_\kappa$, dunque a meno di isomorfismo consideriamo solo i gruppi di permutazioni sui cardinali, dette **permutazioni di κ elementi**.

Sono oggetti estremamente importanti, grazie soprattutto a un potente risultato di cui forniamo anche la dimostrazione in quanto particolarmente semplice:

Teorema 1.1: Teorema di Cayley

Sia G un gruppo.

G è naturalmente isomorfo a un sottogruppo di S_G .

Dimostrazione

Consideriamo la mappa $\varphi : G \rightarrow S_G$ che manda un elemento g nella mappa $h \mapsto gh$; questa è:

- Omomorfismo di gruppi, in quanto $\varphi(gh)(x) = ghx = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x)$.
- Iniettiva, in quanto $\varphi(g) = \text{id}_G$ se e solo se $g = 1$

Dunque $G \cong \varphi(G) \subset S_G$.

1.4 Principio del buon ordinamento

Nei numeri naturali vale il seguente fatto:

Teorema 1.2: Principio del buon ordinamento

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha un minimo rispetto all'usuale relazione d'ordine totale $\leq$.

Dato che molte dimostrazioni di proprietà dei numeri naturali includono il definire un qualche sottoinsieme e fare qualcosa col suo minimo, ho pensato che sarebbe stato carino un potere che sfruttasse un esempio di insieme totalmente ordinato in *Dungeons & Dragons*, ovvero l'ordine delle azioni in un turno di combattimento.

1.5 Fattorizzazione unica

Per il potere "di alto livello" del Chierico ho deciso di inventarmi qualcosa di molto caotico: sfruttare la struttura di dominio a fattorizzazione unica di $\mathbb{Z}$

Teorema 1.3: Teorema fondamentale dell'aritmetica

Sia $x \in \mathbb{N}$: questo può essere sempre scritto nella forma:

$$x = p_1^{e_1} \times \dots \times p_n^{e_n}$$

Con p_i numeri primi; per di più questa forma è unica.

Dato che il pattern seguito dalle fattorizzazioni è *notoriamente* complicato (in effetti è l'oggetto di studio centrale della teoria dei numeri), questo si presta a momenti esilaranti sul campo di battaglia: il mostro che si sta combattendo potrebbe dividersi in due come in ventinove come in cinquantasette² mostriattoli più piccoli che corrono in giro.

²Chiedendo a Grothendieck

2 Mago - Topologia e Geometria algebrica

2.1 Multipiega, ovvero *Manifold*

In qualsiasi *party* di *Dungeons & Dragons* il mago è stereotipicamente il "cervellone" del gruppo, dunque ho pensato di affibiargli due tra le branche più complicate della matematica moderna: la topologia algebrica e la topologia differenziale. Il nome mi è stato involontariamente suggerito da mio fratello quando, sbirciando il termine "manifold" sul mio computer acceso, lo ha erroneamente tentato di tradurre come "multipiega", termine che in realtà ho trovato abbastanza "azzeccato", dato che molte introduzioni divulgative alla topologia descrivono le trasformazioni interessate come dei modi di "piegare" uno spazio.

Definizione 2.1: Varietà topologica (topological manifold)

Si dice **varietà topologica** uno spazio topologico (X, τ) tale che:

- τ ammette una base numerabile.
- (X, τ) soddisfa la condizione di Hausdorff, ovvero è T_2 .
- Per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x omeomorfo a un qualche sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Il numero n è costante e si dice **dimensione** della varietà.

2.2 Grado topologico

Senza approfondire troppo (dato che si tratta di una definizione molto complicata), il grado topologico di una mappa è il numero di "soluzioni" di un'equazione associata a questa: nel caso di un mago, ho deciso di collegarlo all'incantesimo *Dardo Incantato*, che è un po' il suo coltellino svizzero, interpretando il volo di questi dardi come una mappa continua.

2.3 Spazio tangente

Lo spazio tangente ad una varietà è uno strumento tanto importante per un geometra differenziale quanto lo è l'incantesimo *Scudo* per un Mago di *Dungeons & Dragons*.

Normalmente questo gli permetterebbe di nullificare un'attacco e salvaguardare i suoi pochi punti ferita, ma la conoscenza dello spazio tangente allo scudo magico gli permette di scegliere l'angolo perfetto per riflettere l'attacco a un bersaglio a sua scelta.

2.4 Identificazione dei bordi

Un modo comune di costruire il Toro (la superficie della "ciambella") è quello di identificare i bordi di un quadrato nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{a} & P \\ \uparrow & & \uparrow \\ b & & b \\ | & & | \\ P & \xrightarrow{a} & P \end{array}$$

L'idea dietro questo potere è quella di intrappolare i propri avversari in un toro topologico o usarlo per muoversi in modo imprevedibile durante le battaglie o il gioco di ruolo.

2.5 Eversione della sfera

Un teorema piuttosto popolare³ è il seguente:

Teorema 2.1: Eversione della sfera

Sia $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'usuale immersione della sfera.

Esiste un'omotopia regolare di immersioni $f_t : [0, 1] \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f_0 = f$ e $f_1 = -f$.

(Contro)Intuitivamente, questo ci dice che esiste un modo matematico per "invertire" il dentro col fuori della sfera senza fare "strappi" o pieghe troppo "strette", un fatto sorprendente sia per i matematici che per la persona comune.

³Grazie al seguente video e alla sua popolare parodia.

3 Ranger - Teoria delle Categorie

Il tema che ho scelto per il Ranger è stato quello della teoria delle categorie, dato che *generalmente* lo stereotipo per un Ranger è quello dell'arciere e la teoria delle categorie si occupa quasi esclusivamente di "freccie"

3.1 Categorie e dualità

Senza stare a perdersi in una lunga introduzione alla teoria delle categorie, uno dei concetti principali è quello di categoria duale: una categoria è essenzialmente una collezione di oggetti e di mappe o frecce (detti morfismi) tra di essi che rispettano certi assiomi di composizione (un esempio è la classe di tutti gli insiemi con le funzioni come frecce e la solita composizione come composizione).

Ogni categoria C possiede naturalmente una categoria detta "duale" indicata con C^{op} i cui oggetti sono gli stessi di C e le cui mappe sono le stesse ma a direzione invertita, trasformando in questo modo dei diagrammi commutativi.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow g \circ f & \downarrow g \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad \Longleftrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f^{\text{op}}} & X \\
 \uparrow g^{\text{op}} & & \uparrow \\
 Z & \xrightarrow{(g \circ f)^{\text{op}} = f^{\text{op}} \circ g^{\text{op}}} & Y
 \end{array}$$

3.2 Funtore

Uno dei concetti centrali in teoria delle categorie è quello di funtore:

Definizione 3.1: Funtore

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due categorie. Un **funtore covariante** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste in due mappe $F : \text{ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{ob } \mathcal{D}$ e $F : \text{hom } \mathcal{C} \rightarrow \text{hom } \mathcal{D}$ che rispettino la composizione, ovvero:

- Per ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ vale $Ff : FX \rightarrow FY$.
- Per ogni oggetto $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ vale $F \text{id}_X = \text{id}_{FX}$.
- Per ogni coppia di morfismi componibili f, g in $\text{hom } \mathcal{C}$ vale $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.

Un **funtore controvariante** da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è un funtore covariante $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$. Un funtore si dice:

- **Fedele** se per ogni $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$ è iniettiva.
- **Pieno** se per ogni $X, Y \in \text{ob } \mathcal{C}$ la sua restrizione $F_{X,Y} : \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$ è suriettiva.

Per fare un piccolo gioco di parole, i funtori di cui si occupa il nostro Ranger non sono trasformazioni tra categorie, ma un tipo particolare di tori caratterizzati dall'essere estremamente fedeli e sempre pieni (in termini alimentari).

3.3 Lemma di Yoneda

Un risultato centrale in Teoria delle Categorie è il lemma di Yoneda, che (in un senso reso preciso dal formalismo delle trasformazioni naturali) permette di identificare gli oggetti di una categoria con la famiglia delle frecce entranti o uscenti in essi (e sotto certe ipotesi, di tornare indietro).

Teorema 3.1: Lemma di Yoneda covariante

Sia $\mathcal{C}$ una categoria localmente piccola e sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtore covariante. Allora esiste una biezione di insiemi:

$$\text{hom}(h_A, F) \cong F(A)$$

e questa è naturale in A e F .

Allo stesso modo la Faretra Filosofale di Yo-Ne'dah permette di trasformare oggetti in frecce e (limitatamente) viceversa.

3.4 Coni e coconi

Altra costruzione estremamente importante è quella di cono (e dualmente, di cocono)

Definizione 3.2: Cono e cocono

Sia $\mathcal{C}$ una categoria, sia J una sua sottocategoria finita (detta diagramma) e sia N un oggetto di $\mathcal{C}$.

Si dice **cono** in $\mathcal{C}$ su J con punta N una collezione di morfismi $\{\psi : N \rightarrow X\}_{X \in \text{ob } J}$ di $\mathcal{C}$ tali che per ogni morfismo $f : X \rightarrow Y$ in J il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \psi_X \swarrow & & \searrow \psi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Dualmente, si dice **cocono** su J con punta N un cono in $\mathcal{C}^{\text{op}}$.

Intuitivamente, fissato un diagramma un cono è un oggetto da cui partono una serie di frecce dirette verso di questo, un cocono è un oggetto verso cui vanno una serie di frecce che partono da questo, come nel potere che ho creato per il Ranger: in entrambi i casi, la punta del (co)cono corrisponderebbe al bersaglio, mentre i morfismi alle vere e proprie frecce del Ranger.

3.5 Oggetti iniziali e finali

Una categoria può contenere due oggetti particolari:

Definizione 3.3: Oggetti iniziali e finali

Sia $\mathcal{C}$ una categoria e sia I un oggetto.

I si dice **oggetto iniziale** se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\iota_X : I \rightarrow X$

I si dice **oggetto finale** se è l'oggetto iniziale di $\mathcal{C}^{\text{op}}$, o equivalentemente se per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $\zeta_X : X \rightarrow I$.

Se I è sia finale che iniziale, si dice **oggetto zero**.

Il modo in cui questo concetto si è tradotto nel potere che ho inventato è evidente, il modo in cui ho deciso di "limitare" questo privilegio è stato lasciandomi ispirare dalle condizioni di unicità, sia dei morfismi che degli oggetti in sè.

Proposizione 3.1: Unicità di oggetti iniziali e finali

Se una categoria $\mathcal{C}$ ammette un oggetto iniziale (o finale o zero), questo è essenzialmente unico.

4 Warlock - Geometria Proiettiva

Il tema di questa sottoclasse per il Warlock sono alcune nozioni elementari di geometria affine e proiettiva (e il non così elementare teorema di Bezout), in particolare ho immaginato che lo spazio proiettivo (in particolare complesso) fosse un'entità arcaica *à la* Lovecraft, in grado di sfuggire alle capacità della mente umana e di portare chi dovesse comprenderla per un istante alla pazzia⁴.

4.1 Geometria affine

Il concetto di "forma lineare associata" ad una trasformazione di spazi affini deriva dalla definizione vera e propria di trasformazione affine e da un piccolo lemma:

Definizione 4.1: Affinità

Siano A, B due spazi affini su spazi vettoriali V, W

Una mappa $f : A \rightarrow B$ si dice **affinità** (o trasformazione affine) se esiste una mappa lineare $\phi : V \rightarrow W$ tale che $f(P) - f(Q) = \phi(P - Q)$ per ogni $P, Q \in A$.

La trasformazione ϕ si definisce **forma lineare associata** ad f

⁴Questo potrebbe essere stato vagamente ispirato da quella che è stata la mia esperienza preparando l'esame di Geometria del primo anno

Lemma 4.1: Fattorizzazione di affinità

Siano A, B due spazi affini su spazi vettoriali V, W e sia $f : A \rightarrow B$ un'affinità con mappa lineare associata $\phi : V \rightarrow W$.

Allora esiste un unico vettore $v \in W$ tale che $f = L_v \circ \phi$, dove $L_v : B \rightarrow B$ indica la traslazione lungo v .

Dato che un tiro per colpire "assomiglia" sempre a un'affinità, ovvero è sempre della forma $1d20 + X$, dove X è il bonus al tiro per colpire della creatura che effettua l'attacco, mi è sembrato per lo meno simpatica l'idea di un potere che trascurasse questa "traslazione" del tiro.

4.2 Lo spazio proiettivo

Lo spazio proiettivo complesso è definito come segue:

Definizione 4.2: Spazio proiettivo

Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V un $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale non banale.

Introduciamo su $V \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza $\sim$ definita da

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} : u = \lambda v$$

Lo **spazio proiettivo** $\mathbb{P}V$ su V è definito come il quoziente $V / \sim$. Se V ha **dimensione** $n + 1$ con $n \in \mathbb{N}$, la dimensione di $\mathbb{P}V$ è definita come n .

In particolare, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e consideriamo $V = \mathbb{K}^{n+1}$ con la canonica struttura di spazio vettoriale e $n \in \mathbb{N}$, parliamo rispettivamente di **spazio proiettivo reale o complesso di dimensione** n .

Il concetto è notoriamente di ostica visualizzazione, soprattutto se pensiamo a spazi proiettivi complessi di alta dimensione, dunque ho pensato funzionasse bene col Warlock, tematicamente parlando.

4.3 Piano all'infinito

Prendiamo il caso di un punto sulla retta proiettiva reale, ovvero su $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$.

Scelta una base per $\mathbb{R}^2$, scriviamo un vettore $v = (x, y) \neq (0, 0)$ rispetto ad essa: la proiezione al quoziente di v è la sua identificazione con il suo span, ovvero la retta passante per esso (meno l'origine ovviamente), dunque $[v] = [x, y] = [3x, 3y]$ e così via; in questo modo possiamo scrivere $\mathbb{P}$ in questo modo:

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \{[a, 1] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{[0, 1]\}$$

Ovvero come una copia di $\mathbb{R}$, la retta reale, con "aggiunto" un punto "inaccessibile" muovendosi lungo di essa, il cosiddetto punto all'infinito. In dimensioni più alte questi punti diventano veri e propri spazi.

L'idea dietro a questo potere dunque è quella di far "sparire" un nemico abbattuto in uno spazio inaccessibile al fine di trarne potere o un alleato a terra al fine di metterlo al sicuro, che è molto in linea con l'identità di un Warlock in D&D.

4.4 Proiezione

L'idea dietro a questo potere⁵ è abbastanza autoesplicativa: la proiezione, ad esempio di una varietà su di un'altra a partire da un punto, è una trasformazione molto utilizzata in ogni branca della geometria e mi sembrava tematicamente adatta ad un attaccante a distanza come un Warlock, nonché in grado di offrire molte opportunità di movimento "fuori dagli schemi" ai giocatori più creativi.

4.5 Chiusura proiettiva di Bezout

Questo privilegio è ispirato da quello che è uno dei teoremi più caratteristici del piano proiettivo complesso: il teorema di Bezout.

Teorema 4.1: Teorema di Bezout

Siano C, D due curve proiettive piane di grado $n, m \geq 1$ su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{K}$.

Il numero di intersezioni contate con molteplicità di C e D è $n \cdot m$, a meno che esse non abbiano una componente in comune: in tal caso questo è infinito.

Dato che spesso le battaglie di D&D vengono rappresentate come aventi luogo su di una superficie piana reale (il tavolo), l'idea è quella di interpretare la traiettoria di un attacco come una curva su questo piano, che il Warlock saprebbe trasformare in una proiettiva complessa al fine di farla passare per il punto desiderato, ovvero il bersaglio.

⁵Che a onor del vero ho tratto dal videogioco *The Legend of Zelda: a Link Between Worlds*.