

# REGOLE DEL GIOCO

Niccolò Porta

# Contents

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>REGOLE</b>                                                | <b>1</b>  |
| 1.1      | Obiettivo del gioco . . . . .                                | 1         |
| 1.2      | Preparazione del gioco . . . . .                             | 1         |
| 1.3      | Svolgimento del gioco . . . . .                              | 1         |
| 1.4      | Fine del gioco . . . . .                                     | 2         |
| <b>2</b> | <b>Derivate</b>                                              | <b>3</b>  |
| 2.1      | Introduzione alle derivate . . . . .                         | 3         |
| 2.2      | Regole di derivazione . . . . .                              | 4         |
| 2.2.1    | Esempi di calcolo delle derivate . . . . .                   | 5         |
| 2.3      | Punti di non derivabilità . . . . .                          | 6         |
| 2.4      | Teoremi utili nel calcolo differenziale . . . . .            | 6         |
| <b>3</b> | <b>Studio delle funzioni</b>                                 | <b>9</b>  |
| 3.1      | Schema generale per lo studio di una funzione . . . . .      | 9         |
| 3.2      | Esempio di studio di una funzione polinomiale . . . . .      | 10        |
| 3.3      | Esempio di studio di una funzione razionale fratta . . . . . | 12        |
| <b>4</b> | <b>Integrali</b>                                             | <b>16</b> |
| 4.1      | Integrali indefiniti . . . . .                               | 16        |
| 4.1.1    | Alcuni metodi utili . . . . .                                | 17        |
| 4.2      | Integrali definiti . . . . .                                 | 18        |
| 4.3      | Proprietà degli integrali definiti . . . . .                 | 18        |

|                 |   |
|-----------------|---|
| <i>CONTENTS</i> | 3 |
|-----------------|---|

|       |                                |    |
|-------|--------------------------------|----|
| 4.3.1 | Alcuni teoremi utili . . . . . | 19 |
| 4.3.2 | Calcolo delle aree . . . . .   | 19 |



# Chapter 1

## REGOLE

In questa sezione sono descritte le regole del gioco.

### 1.1 Obiettivo del gioco

L'obiettivo del gioco è accumulare il maggior numero di punti rispondendo correttamente alle domande poste durante il gioco.

### 1.2 Preparazione del gioco

Prendete le carte che trovate nella scatola e dividetele nei 3 mazzi a seconda del punteggio scritto sul retro della carta. A questo punto potete decidere se giocare tutti contro tutti oppure a squadre.

### 1.3 Svolgimento del gioco

Il gioco si svolge a turni, ogni giocatore parte da un punteggio base di 10 punti. Ad ogni turno un giocatore pesca una carta da uno dei tre mazzi a sua scelta. Se risponde correttamente alla domanda scritta

sulla carta guadagna i punti indicati sul retro della carta, altrimenti li perde. Durante ogni turno si ha diritto a tirare il dado presente nella scatola una volta per poter consultare la sezione ripasso del libro e aiutarsi a rispondere alla domanda. A seconda del numero uscito sul dado si può consultare il libro per un numero di secondi dato dal numero uscito moltiplicato per 10.

## 1.4 Fine del gioco

Il gioco termina quando un giocatore raggiunge i 30 punti, quando si esauriscono le carte o dopo un numero di turni da voi deciso all'inizio del gioco. Vince il giocatore o la squadra con il punteggio più alto.

# Chapter 2

## Derivate

In questa sezione è inserita una spiegazione sulle derivate.

### 2.1 Introduzione alle derivate

La derivata di una funzione in un punto misura la variazione istantanea della funzione in quel punto. Formalmente, la **derivata** di una funzione  $f(x)$  in un punto  $x = a$  è definita come:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se questo limite esiste.

In pratica, la derivata rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $a$ . Se la derivata è positiva, la funzione è crescente in quel punto; se è negativa, la funzione è decrescente.

A questo punto possiamo introdurre il concetto di derivata destra e derivata sinistra in un punto.

**La derivata destra** di una funzione  $f(x)$  in un punto  $x = a$  è definita come:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se questo limite esiste.

Analogamente, **la derivata sinistra** di una funzione  $f(x)$  in un punto  $x = a$  è definita come:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se questo limite esiste.

Questi concetti sono utili per analizzare il comportamento della funzione vicino al punto  $a$ , specialmente in presenza di discontinuità o punti angolosi. Inoltre ci permettono di introdurre alcuni concetti avanzati come la derivabilità e la continuità delle funzioni.

Una funzione è detta **derivabile** in un punto  $a$  se la derivata destra e la derivata sinistra in quel punto esistono ed sono uguali, cioè:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

Se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto.

## 2.2 Regole di derivazione

Alcune regole fondamentali per calcolare le derivate sono:

- Derivata di una costante:  $\frac{d}{dx}[c] = 0$
- Derivata di una potenza:  $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
- Regola della somma:  $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- Regola del prodotto:  $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- Regola del quoziente:  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- Derivata del reciproco:  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{f(x)} \right] = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$
- Derivata della funzione esponenziale:  $\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$
- Derivata della funzione logaritmica:  $\frac{d}{dx} [\ln(x)] = \frac{1}{x}$
- Derivata della funzione seno:  $\frac{d}{dx} [\sin(x)] = \cos(x)$
- Derivata della funzione coseno:  $\frac{d}{dx} [\cos(x)] = -\sin(x)$
- Derivata della funzione tangente:  $\frac{d}{dx} [\tan(x)] = \sec^2(x)$
- Derivata della funzione cotangente:  $\frac{d}{dx} [\cot(x)] = -\csc^2(x)$
- Derivata di una funzione composta (Regola della catena):

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

### 2.2.1 Esempi di calcolo delle derivate

**Esempio 1:** Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 7$$

Soluzione:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 2$$

**Esempio 2:** Calcolare la derivata della funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 + 3}{x - 1}$$

Soluzione:

$$g'(x) = \frac{(4x)(x-1) - (2x^2+3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 3}{(x-1)^2}$$

**Esempio 3:** Calcolare la derivata della funzione

$$h(x) = \sin(x^2)$$

Soluzione:

$$h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2)$$

## 2.3 Punti di non derivabilità

Una funzione può non essere derivabile in un punto per diversi motivi:

- **Discontinuità:** Se la funzione non è continua in un punto, non può essere derivabile in quel punto.
- **Punto angoloso:** Se la funzione ha un angolo o cuspide in un punto, la derivata destra e sinistra in quel punto non sono uguali.
- **Verticalità della tangente:** Se la retta tangente al grafico della funzione in un punto è verticale, la derivata in quel punto non esiste.

## 2.4 Teoremi utili nel calcolo differenziale

**Teorema 2.1** (Teorema di Rolle). *Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$  e derivabile su  $(a, b)$ , con  $f(a) = f(b)$ . Allora esiste almeno un punto  $c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ .*

Questo teorema afferma che se una funzione inizia e finisce allo stesso valore su un intervallo, allora deve avere almeno un punto all'interno dell'intervallo dove la pendenza della tangente è zero.

**Teorema 2.2** (Teorema del valore medio). *Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$  e derivabile su  $(a, b)$ . Allora esiste almeno un punto  $c \in (a, b)$  tale che:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Questo teorema afferma che in un intervallo, c'è almeno un punto dove la pendenza della tangente è uguale alla pendenza della retta secante che collega gli estremi dell'intervallo.

**Teorema 2.3** (Teorema di Lagrange). *Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$  e derivabile su  $(a, b)$ . Allora esiste almeno un punto  $c \in (a, b)$  tale che:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Questo teorema è una riformulazione del teorema del valore medio e fornisce un legame tra la variazione della funzione su un intervallo e la sua derivata in un punto all'interno dell'intervallo.

**Teorema 2.4** (Teorema di Cauchy). *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue su un intervallo chiuso  $[a, b]$  e derivabili su  $(a, b)$ , con  $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in (a, b)$ . Allora esiste almeno un punto  $c \in (a, b)$  tale che:*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Questo teorema generalizza il teorema del valore medio a due funzioni e stabilisce un rapporto tra le loro derivate e le loro variazioni su un intervallo.

**Teorema 2.5** (Teorema di de l'Hôpital). *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni derivabili su un intervallo aperto contenente  $a$ , eccetto forse in  $a$  stesso. Supponiamo che:*

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  oppure
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$
- $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x$  nell'intervallo.

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se il limite a destra esiste o è infinito.

Questo teorema è utile per calcolare limiti di forme indeterminate come  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Teorema 2.6** (Teorema di Fermat). *Sia  $f$  una funzione derivabile in un punto  $c$  interno al suo dominio. Se  $f$  ha un massimo o minimo locale in  $c$ , allora  $f'(c) = 0$ .*

Questo teorema stabilisce che nei punti di massimo o minimo locale (interni al dominio), la derivata della funzione deve annullarsi. In altre parole, la retta tangente al grafico della funzione in questi punti è orizzontale.

# Chapter 3

## Studio delle funzioni

In questa sezione è inserita una spiegazione sullo studio delle funzioni.

### 3.1 Schema generale per lo studio di una funzione

Per studiare una funzione  $f(x)$ , seguite questi passaggi:

1. **Dominio:** Determinate il dominio della funzione, cioè l'insieme dei valori di  $x$  per cui la funzione è definita.
2. **Intersezioni con gli assi:** Calcolate le intersezioni della
3. **Simmetrie:** Verificate se la funzione è pari, dispari o periodica.
4. **Limiti:** Calcolate i limiti della funzione agli estremi del dominio e nei punti di discontinuità.
5. **Derivata prima:** Calcolate la derivata prima  $f'(x)$  e determinate i punti critici

6. **Monotonia:** Analizzate il segno della derivata prima per determinare gli intervalli di crescita e decrescita della funzione.
7. **Derivata seconda:** Calcolate la derivata seconda  $f''(x)$ .
8. **Concavità e punti di flesso:** Analizzate il segno della derivata seconda per determinare gli intervalli di concavità e convessità, e individuate i punti di flesso.
9. **Asintoti:** Determinate gli asintoti verticali, orizzontali e obliqui della funzione.
10. **Grafico:** Utilizzate tutte le informazioni raccolte per tracciare il grafico della funzione.

## 3.2 Esempio di studio di una funzione polinomiale

Consideriamo la funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ .

1. **Dominio:** La funzione è definita per tutti i numeri reali, quindi il dominio è  $\mathbb{R}$ .
2. **Intersezioni con gli assi:**
  - Asse  $y$ :  $f(0) = 4$  quindi l'intersezione è  $(0, 4)$ .
  - Asse  $x$ : Risolvendo  $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$  troviamo le intersezioni con l'asse  $x$ .
3. **Simmetrie:** La funzione non è né pari né dispari.
4. **Limiti:** Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

5. **Derivata prima:**

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

I punti critici sono  $x = 0$  e  $x = 2$ .

6. **Monotonia:** Analizzando il segno di  $f'(x)$ :

- Per  $x < 0$ ,  $f'(x) > 0$  (crescente)
- Per  $0 < x < 2$ ,  $f'(x) < 0$  (decrescente)
- Per  $x > 2$ ,  $f'(x) > 0$  (crescente)

Quindi abbiamo un massimo locale in  $x = 0$  e un minimo locale in  $x = 2$ .

7. **Derivata seconda:**

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

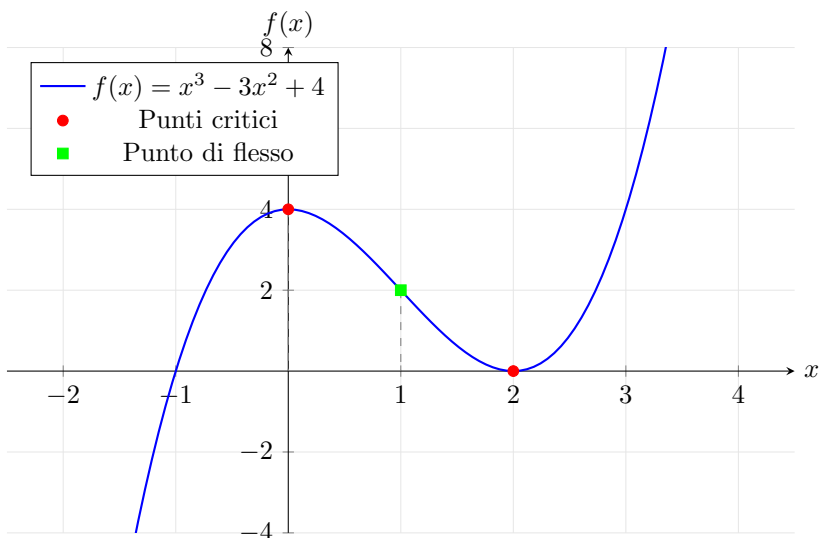
Il punto critico della derivata seconda è  $x = 1$ .

8. **Concavità e punti di flesso:** Analizzando il segno di  $f''(x)$ :

- Per  $x < 1$ ,  $f''(x) < 0$  (concava verso il basso)
- Per  $x > 1$ ,  $f''(x) > 0$  (concava verso l'alto)

Quindi la funzione è concava verso il basso per  $x < 1$  e concava verso l'alto per  $x > 1$ . Il punto  $(1, f(1)) = (1, 2)$  è un punto di flesso.

9. **Asintoti:** La funzione non ha asintoti verticali, orizzontali o obliqui.
10. **Grafico:** Utilizzando tutte le informazioni raccolte, possiamo tracciare il grafico della funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ .



### 3.3 Esempio di studio di una funzione razionale fratta

Consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-1}$ .

1. **Dominio:** La funzione è definita per tutti i numeri reali tranne  $x = 1$ , quindi il dominio è  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
2. **Intersezioni con gli assi:**
  - Asse  $y$ :  $f(0) = -3$  quindi l'intersezione è  $(0, -3)$ .
  - Asse  $x$ : Risolvendo  $2x^2 + 3 = 0$  non ci sono intersezioni reali con l'asse  $x$ .
3. **Simmetrie:** La funzione non è né pari né dispari.

### 3.3. ESEMPIO DI STUDIO DI UNA FUNZIONE RAZIONALE FRATTA13

4. **Limiti:** Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio e in  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

5. **Derivata prima:**

$$f'(x) = \frac{(4x)(x-1) - (2x^2+3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 3}{(x-1)^2}$$

I punti critici sono:  $x = -\frac{1}{2}$  e  $x = 3$ .

6. **Monotonia:** Analizzando il segno di  $f'(x)$ :

- Per  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $f'(x) > 0$  (crescente)
- Per  $-\frac{1}{2} < x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  (decrescente)
- Per  $1 < x < 3$ ,  $f'(x) < 0$  (decrescente)
- Per  $x > 3$ ,  $f'(x) > 0$  (crescente)

Quindi abbiamo un massimo locale in  $x = -\frac{1}{2}$  e un minimo locale in  $x = 3$ .

7. **Derivata seconda:**

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{2x^2 - 4x - 3}{(x-1)^2} \right)$$

Sviluppando la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - (2x^2-4x-3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(4x-4)(x-1) - 2(2x^2-4x-3)}{(x-1)^3}$$

Il punto critico della derivata seconda è  $x = \frac{5}{4}$ .

8. **Concavità e punti di flesso:** Analizzando il segno di  $f''(x)$ :

- Per  $x < 1$ ,  $f''(x) < 0$  (concava verso il basso)
- Per  $1 < x < \frac{5}{4}$ ,  $f''(x) < 0$  (concava verso il basso)
- Per  $x > \frac{5}{4}$ ,  $f''(x) > 0$  (concava verso l'alto)

Quindi la funzione è concava verso il basso per  $x < \frac{5}{4}$  e concava verso l'alto per  $x > \frac{5}{4}$ . Il punto  $(\frac{5}{4}, f(\frac{5}{4}))$  è un punto di flesso.

9. **Asintoti:**

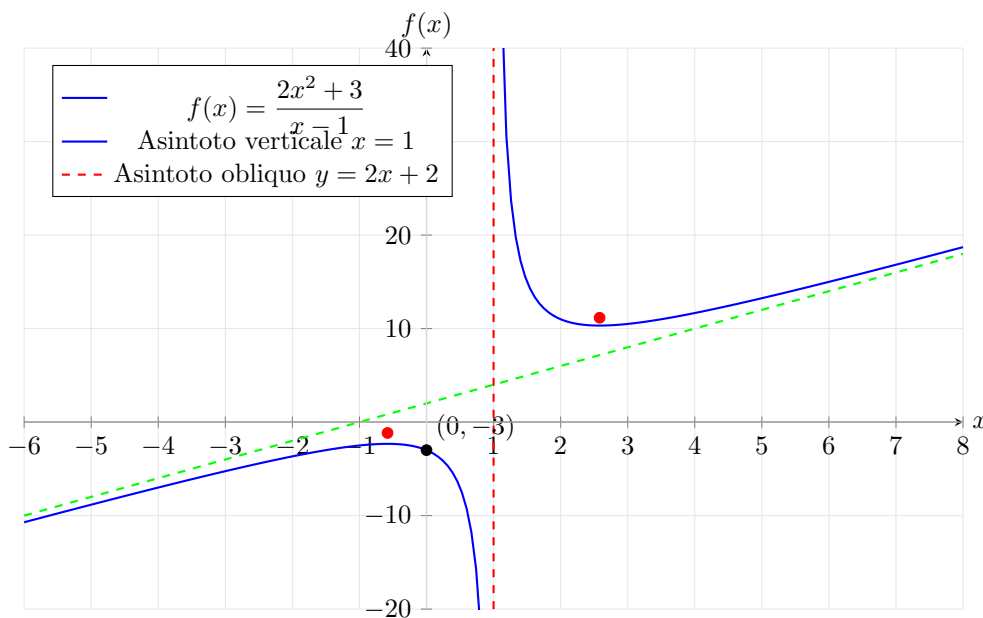
- Asintoto verticale in  $x = 1$ .
- Asintoto obliquo: Calcoliamo il limite per  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (2x + 5)) = 0$$

Quindi l'asintoto obliquo è  $y = 2x + 5$ .

10. **Grafico:** Utilizzando tutte le informazioni raccolte, possiamo tracciare il grafico della funzione  $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-1}$ .

### 3.3. ESEMPIO DI STUDIO DI UNA FUNZIONE RAZIONALE FRATTA15



# Chapter 4

## Integrali

In questa sezione è inserita una spiegazione sugli integrali.

### 4.1 Integrali indefiniti

Sappiamo che  $F(x)$  una **primitiva** della funzione  $f(x)$  se  $F'(x) = f(x)$ . La primitiva di una funzione non è unica, infatti se  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$  allora anche  $G(x) = F(x) + C$  è una primitiva di  $f(x)$  per ogni costante  $C$  appartenente ai numeri reali. L'**integrale indefinito** di una funzione  $f(x)$  è l'insieme di tutte le sue primitive

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

dove  $F'(x) = f(x)$  e  $C$  è una costante arbitraria. Non tutte le funzioni ammettono una primitiva esprimibile in forma chiusa tramite funzioni elementari.

La condizione sufficiente affinché una funzione ammetta una primitiva è che sia continua.

Gli integrali indefiniti godono della proprietà di linearità:

- $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$  per ogni costante  $k$

Alcune primitive fondamentali sono:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  per  $n \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$  per  $x \neq 0$
- $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
- $\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$

#### 4.1.1 Alcuni metodi utili

Quando la soluzione dell'integrale non è immediata può essere utile applicare il **metodo di sostituzione**. L'idea è di sostituire una parte dell'integrando con una nuova variabile per semplificare l'integrale. Consideriamo l'integrale:

$$\int f(x) dx$$

Poniamo  $x = g(t)$  e quindi  $dx = g'(t)dt$ . L'integrale diventa:

$$\int f(g(t))g'(t) dt$$

Dopo aver calcolato l'integrale in termini di  $t$ , si sostituisce nuovamente  $t$  con  $x$  per ottenere la primitiva originale.

Un altro metodo utile è l'**integrazione per parti**, basato sulla formula:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

dove  $f(x)$  e  $g(x)$  sono funzioni differenziabili.

## 4.2 Integrali definiti

L'**integrale definito** di una funzione  $f(x)$  su un intervallo  $[a, b]$  è definito come:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dove  $F(x)$  è una primitiva di  $f(x)$ . L'integrale definito rappresenta l'area netta tra il grafico della funzione  $f(x)$  e l'asse  $x$  nell'intervallo  $[a, b]$ .

## 4.3 Proprietà degli integrali definiti

Gli integrali definiti godono delle seguenti proprietà:

- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  per ogni costante  $k$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- Se  $a < c < b$ , allora  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- Se  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ , allora  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

### 4.3.1 Alcuni teoremi utili

**Teorema 4.1** (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$  e sia  $F$  una primitiva di  $f$ . Allora:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Teorema 4.2** (Teorema della media integrale). *Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$ . Allora esiste almeno un punto  $c \in [a, b]$  tale che:*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

### 4.3.2 Calcolo delle aree

L'area tra il grafico di una funzione  $f(x)$  e l'asse  $x$  su un intervallo  $[a, b]$  è data dall'integrale definito:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

Se la funzione è positiva su tutto l'intervallo, l'area è semplicemente:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

altrimenti è necessario considerare le parti dell'intervallo dove la funzione è negativa separatamente, in questo modo:

$$A = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

dove  $c$  è il punto in cui la funzione cambia segno.

L'area compresa tra due curve  $f(x)$  e  $g(x)$  su un intervallo  $[a, b]$  è data da:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$