Manuale delle istruzioni per giocare e capire Snake Matematico

Francesco Odorizzi

giugno 2023

Il gioco che tutti conosciamo

Anno 1977, viene rilasciata la prima versione di un celebre videogioco a cui tutti, almeno una volta nella vita, abbiamo giocato: Snake. L'idea del gioco è semplice: il giocatore controlla un serpente, che può muoversi solamente in quattro direzioni, ovvero su, giù, destra, sinistra. A differenza dei normali serpenti, però, questo personaggio è impossibilitato a contrarre il corpo, e quindi non ha modo di stritolare le sue prede come farebbe un serpente boa; lui è costretto a muovere in avanti la testa, e a far seguire tutto il corpo. Per sua fortuna l'ambiente in cui vive non è una temibile foresta pluviale sudamericana, ma un semplice quadrato grigio, in cui è possibile trovare degli sporadici frutti, delle mele verdi, di cui il nostro rettile è ghiotto: ogni volta che riesce a mangiarne una il suo corpo si allunga un po'. Il serpente è famelico e morde tutto quello che incontra, risulta quindi vitale per la sua sopravvivenza non raggiungere mai con la testa un punto della sua coda. Inoltre, naturalmente, se uscisse dal suo habitat naturale si perderebbe, quindi deve assolutamente evitare di lasciare il quadrato in cui si trova.

Abbiamo quindi il nostro semplice ma intrattenente videogioco che ha regalato un momento di serenità a tre generazioni, giocato agli inizi sui vecchi computer Commodore, successivamente sui telefonini Nokia ed infine in rete, su siti dedicati.

Ecco qui una nuova versione, non troppo dissimile da quelle storiche, per rispolverare la memoria e riprendere dimestichezza con le meccaniche del gioco.

Per cambiare direzione si possono usare i tasti WASD della tastiera del computer. In caso di sconfitta, con il pulsante P è possibile iniziare una nuova partita. Il serpente, dal corpo giallo e la testa arancione, si muove all'interno del campo di gioco alla ricerca dei frutti, dei piccoli cerchi verdi che compaiono e scompaiono col passare del tempo. Il punteggio è segnato nella parte superiore dello schermo, ed aumenta di 1 ad ogni cattura.

Gioco classico: clicca per giocare

Videogioco sicuramente avvincente, ma rischia di risultare un po' ripetitivo, dopo qualche partita.

Ecco quindi che mi sono preso la libertà di crearne delle versioni nuove, contenenti piccole variazioni rispetto al gioco originale. Ognuna, oltre ad essere un simpatico gioco con cui distrarsi per una manciata di minuti, nasconde in sé delle intuizioni matematiche, che proverò di volta in volta a sviscerare.

Propongo di provare, prima di partire con le varianti vere e proprie, una versione leggermente semplificata del gioco classico, in cui non è più possibile perdere la partita a causa dell'impatto con il bordo del campo. Se si esce dal terreno di gioco si verifica quello che viene spesso chiamato "effetto Pac-Man", ovvero si spunta dalla parte opposta del campo. (Questa piccola modifica era già presente nella versione del gioco presente sul Nokia 3310, e a noi torna utile per evitare di rendere esageratamente complicate le partite con le regole più particolari che compariranno più avanti)

Le regole sono analoghe al gioco classico, con l'eccezione che ora non si può morire toccando le pareti.

Gioco semplificato: clicca per giocare

Tutte le varianti utilizzeranno questo come gioco di base, a cui verranno via via aggiunte delle regole.

Prima variante: crescita esponenziale contro crescita lineare

Prima di parlare di matematica e della differenza tra una crescita esponenziale rispetto ad una crescita lineare, consiglio di provare queste due versioni del gioco: l'unica differenza che incontrerete sarà la quantità di quadratini che otterrà il serpente dopo aver mangiato ogni frutto.

Per entrambi i giochi, le regole sono identiche a quelle della versione semplificata.

Gioco veloce primo: clicca per giocare

Gioco veloce secondo: clicca per giocare

Si sarà certamente notata la differenza: ora, anche solo dopo aver catturato una manciata di mele, ci si ritrova con un personaggio lungo decine di quadretti, mentre prima, anche impegnandosi, sarebbe occorso molto più tempo.

Ma ora arriva il nodo della questione: in cosa differiscono tra loro questi due giochi più veloci? Riassumiamo in una tabella la crescita del serpente nei due casi:

Mele mangiate	Primo serpente	Secondo serpente
0	1	1
1	6	2
2	11	4
3	16	8
4	21	16
5	26	32
6	31	64
7	36	128
8	41	256
9	46	512
10	51	1024

Inizialmente, mentre si mangiano le primissime mele, le due versioni non sembrano differire troppo. Certo, il primo gioco sembra procedere più svelto: dopo 2 sole mele mangiate ci ritroviamo già con un serpente lungo 11, quasi tre volte di più rispetto al secondo in cui siamo ancora a 4 (a fronte di 3, che sarebbe stata la lunghezza nel gioco base). È però sufficiente catturare solo due o tre frutti in più per arrivare quasi a un pareggio: 21 a 16, oppure 26 a 32. Forse non cambia poi così tanto. Ecco che mangiamo altre tre mele: ora la differenza è lampante, il secondo gioco comincia a presentare le prime difficoltà: dobbiamo manovrare un animale lungo 256 quadratini in un ambiente composto da appena 900 quadratini (la griglia su cui è possibile muoversi è infatti di 30x30 caselle); il primo è ancora a 41, perfettamente gestibile. Ma le cose sono solo destinate a peggiorare: nel secondo gioco, al decimo frutto mangiato quello che ormai possiamo definire un mostro occupa già 1024 caselle, ovvero 124 in più del numero totale delle caselle del quadrato di gioco, nel primo invece il serpente ne occupa 51, nemmeno il 6% del campo.

Questo può dunque farci riflettere sulla profonda differenza che sussiste tra quelle che vengono, in termini matematici, chiamate crescita lineare e crescita esponenziale. La crescita lineare è caratterizzata, in questo caso, da un aumento di 5 unità ogni punto ottenuto. Quella esponenziale, d'altro canto, permette al serpente di raddoppiare la propria lunghezza ad ogni mela, portando ai risultati appena analizzati.

Nella Figura 1 troviamo un grafico riassuntivo di quello che abbiamo appena imparato, sull'asse orizzontale viene rappresentato il numero di frutti raccolti, su quello verticale la lunghezza del serpente. Ne mostriamo tre ingrandimenti diversi, per mostrare come all'inizio il serpente che si allunga con velocità lineare sembra crescere più velocemente rispetto a quello che cresce con velocità esponenziale, mentre con l'aumentare delle mele ci si accorge che, nel lungo termine, vale esattamente il contrario.

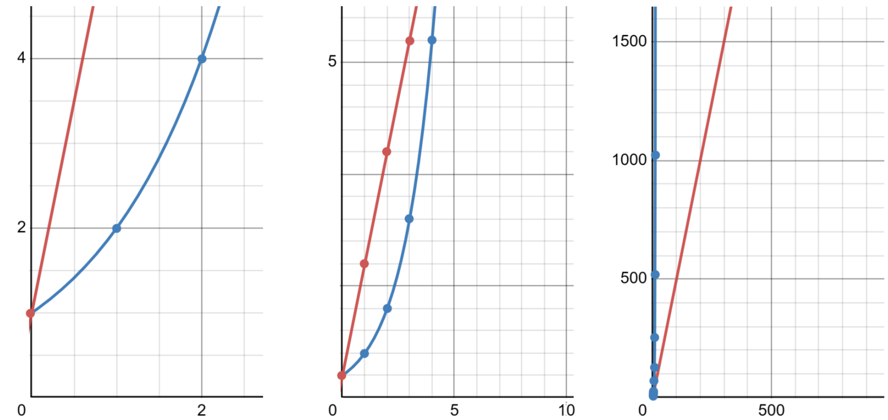

Figura 1: Grafici delle funzioni $L = 5M$ e $L = 2^M$ (Con L indichiamo la lunghezza del serpente, con M il numero di mele mangiate)

Seconda variante: muoversi in più dimensioni

In questa seconda variante mi trovo, purtroppo, obbligato a fare una piccola introduzione matematica prima di presentare il gioco.

Come tutti sappiamo fin da piccoli, noi viviamo in tre dimensioni; ovvero quelle che noi chiamiamo altezza, larghezza e profondità, nel gergo comune. Il serpente con cui abbiamo giocato fino ad ora, invece, vive in uno spazio bidimensionale (ovvero a due dimensioni), infatti esistono solamente due coppie di direzioni in cui possiamo farlo muovere (su - giù e destra - sinistra). Ma se lo spostassimo in un cubo, piuttosto che in un quadrato? Cosa cambierebbe nel gioco? Ebbene, è quello che ora proveremo a fare. Prima però bisogna introdurre un concetto molto importante tanto nella matematica quanto nella geografia: le coordinate. Esse sono una coppia (per lo spazio a due dimensioni) oppure una tripla (nel caso tridimensionale) che descrivono la posizione di un punto relativamente ad un altro punto fisso, chiamato origine. Per capire meglio questo concetto, propongo di giocare nuovamente al gioco base, ma con scritte accanto le coordinate del serpente (a destra, in rosso) e della mela (a sinistra, in verde).

Regole identiche alla versione base, le coordinate (0,0) coincidono con il centro del quadrato.

Gioco con coordinate: clicca per giocare

È facile notare come l'istante in cui il serpente mangia la mela coincida sempre con il momento in cui le coordinate scritte in verde coincidono esattamente con quelle scritte in rosso (come viene naturale immaginare, dato che il serpente mangia nel momento in cui la posizione della mela coincide con quella della sua testa).

Ora che sappiamo interpretare le coordinate, dobbiamo risolvere solo un ultimo problema prima di poterci gustare una partita a snake tridimensionale: come visualizzare uno spazio in tre dimensioni su uno schermo di due. La soluzione che ho scelto di adottare è quella di proiettare il serpente e le mele su un piano scelto dal giocatore. Chiamiamo X, Y e Z le tre coordinate. Il primo dei piani, quello XY, mostrerà come variano le coordinate X e Y sia del serpente che della mela, analogamente faranno i piani XZ e YZ, mostrando, rispettivamente, la variazione delle coordinate X e Z e delle coordinate Y e Z. Sembra confuso? È più facile a farsi che a dirsi, non appena aperto il gioco tutto risulterà più chiaro.

Regole uguali alla versione base, vengono aggiunti i tasti T e G per direzionare il serpente verso l'interno o verso l'esterno dello schermo. Premendo i tasti X, Y e Z è invece possibile modificare il piano di visualizzazione, ovvero la direzione da cui si guarda il campo di gioco. Naturalmente, sarà visibile solo una parte del serpente alla volta; se, ad esempio, avesse la testa rivolta verso di noi non riusciremmo a vedere una parte della coda, se, al contrario, si stesse rivolgendo verso l'interno dello schermo, non avremo modo di vedere la testa.

Gioco tridimensionale: clicca per giocare

Facciamo alcune considerazioni. Appena inizia la partita ci si accorge di quanto sia più difficile raggiungere le mele prima che si spostino, il dover far combaciare tre coordinate invece che due è aumento di difficoltà non irrilevante. Si nota però anche un'altra cosa, se si gioca per abbastanza tempo: c'è molto più spazio per muoversi! Quindi è più facile evitare di mordersi la coda. Questa differenza è dovuta al fatto che, se prima avevamo a disposizione 900 quadratini in cui giocare, ora abbiamo 27.000 cubetti in cui muoverci! Se prima un serpentello da 9 quadratini occupava l'1% dello spazio disponibile, ora un serpentello equivalente da 9 cubetti occupa appena lo 0,033% del campo.

Ora che sappiamo come giocare in spazi con più dimensioni rispetto al nostro schermo, cosa ci impedisce di provare a fare una partita in un campo quadrimensionale?

Naturalmente dobbiamo tenere in conto alcune considerazioni importanti. Ora giochiamo in un ambiente che non siamo fisicamente in grado di immaginare per intero, dato che supera la nostra comprensione e la nostra intuizione; dobbiamo fidarci delle coordinate, che naturalmente diventano quattro (X, Y, Z e W), per orientarci. Si noti anche che i possibili piani con cui visualizzare gli avvenimenti diventano 6: XY, XZ, XW, YZ, YW, ZW.

Regole uguali al gioco tridimensionale, vengono aggiunti i tasti Y e H per muoversi nella quarta dimensione. Per scegliere quale dei 6 piani visualizzare, basta premere un numero da 1 a 6 sulla tastiera. Le mele in questa versione non si spostano finché non vengono mangiate.

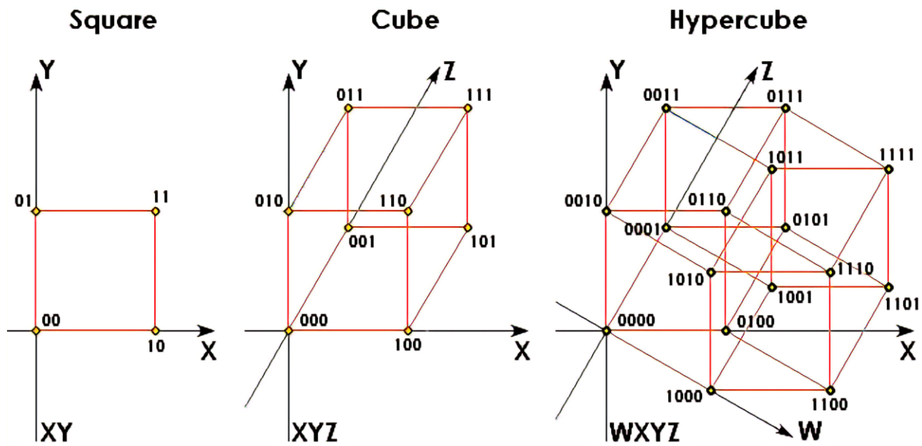

Figura 2: un'intuizione grafica dei cubi di dimensiuoni 2, 3 e 4, su cui giochiamo

Gioco quadrimensionale: clicca per giocare

Mi concedo un ultimo commento sul volume del tesseratto (nome dell'ipercubo quadrimensionale) in cui abbiamo giocato: sono presenti infatti 810.000 ipercubetti (termine inventato, mi scuserete) in cui possiamo muoverci ed in cui possono apparire frutti. Per ottenere un verme in grado di riempire tutto questo spazio occorrerebbe giocare in modo ottimale per ben 75 giorni, senza sbagliare e senza fermarsi mai! (Per confronto: Per riempire lo spazio bidimensionale del gioco base è sufficiente circa un'ora di gioco, mentre ne servirebbero circa 45 per quello tridimensionale). Con questo abbiamo anche accennato a come si calcola il volume di un ipercubo n-dimensionale, ovvero $V = l^n$ (con V volume, l lunghezza del lato, n dimensione).

Terza variante: intuire la topologia

In questa terza e ultima variante vorrei esplorare un aspetto di questo gioco che fino adesso abbiamo trascurato: il significato geometrico dell'effetto Pac-Man. Ho introdotto questa regola per semplificarci la vita nelle partite più complesse (sarebbe stato spiacevole morire nel tesseratto per un accidentale impatto con un muro che non potevamo nemmeno vedere in quel momento).

Proviamo a riflettere sul gioco di base: due dimensioni, quando si raggiunge una parete si compare sulla parete opposta; ci si può porre la domanda: nel mondo reale come potremmo ottenere un effetto del genere? Ciambelle! So che può risultare buffo, ma la forma geometrica su cui dovrebbe muoversi il nostro serpente assomiglia molto a quella di una ciambella, i matematici la chiamano "toro" (vedi Figura 3).

Ora chiedo di fare uno sforzo di immaginazione. Provate a pensare di posizionare un bruco su un foglio di carta, e di lasciarlo muovere sulla sua superficie:

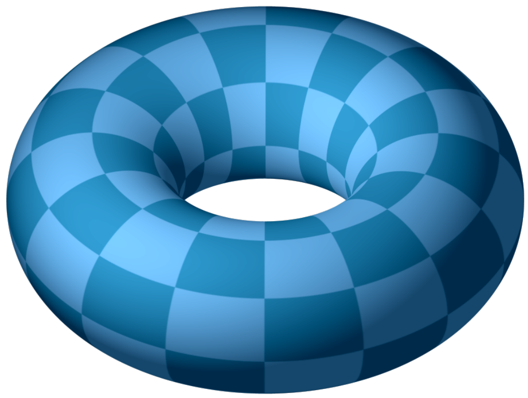

Figura 3: La figura geometrica chiamata ”toro”

otteniamo un risultato non troppo diverso da quello che vediamo nel videogioco. Ora però sorge il problema: se il bruco raggiunge un lato del foglio, cade fuori dal foglio, non compare dall'altra parte. Eppure, a ben pensare, esiste un modo per evitare questo: è sufficiente arrotolare il foglio in modo da far coincidere due lati opposti, formando un cilindro. Ecco che, incollando i due lati che abbiamo fatto combaciare, otteniamo una parte del risultato cercato: il bruco, muovendosi nella direzione secondo cui abbiamo arrotolato, non cascherà mai, continuerà a girare attorno al cilindro, esattamente come il serpente di snake nel suo quadrato se lo si lascia andare in una sola direzione. Ora dobbiamo risolvere il secondo problema: se il bruco cambia direzione rischia di cadere anche dal cilindro. Immagino che la soluzione sia ormai chiara: basta arrotolare anche il cilindro, in modo da ottenere una forma a ciambella, per l'appunto, e incollare le due estremità tra loro. Siamo quindi riusciti ad interpretare geometricamente questo effetto, ed ecco che le situazioni in cui il serpente risultava follemente diviso in più parti, dopo aver attraversato qualche parete, ora hanno tutto un nuovo significato: basta immaginarsi di piegare il campo da gioco come detto sopra per per rendersi conto che il serpente è, in realtà, ancora perfettamente integro (vedi Figura 4).

Quando in matematica (in particolare nella branca chiamata “topologia”) si vogliono incollare tra loro dei lati di poligoni, si utilizza la notazione riportata in Figura 5.

La sua interpretazione è semplicissima: bisogna considerare come incollati i lati associati alla stessa lettera, in modo che le rispettive frecce puntino nella stessa direzione.

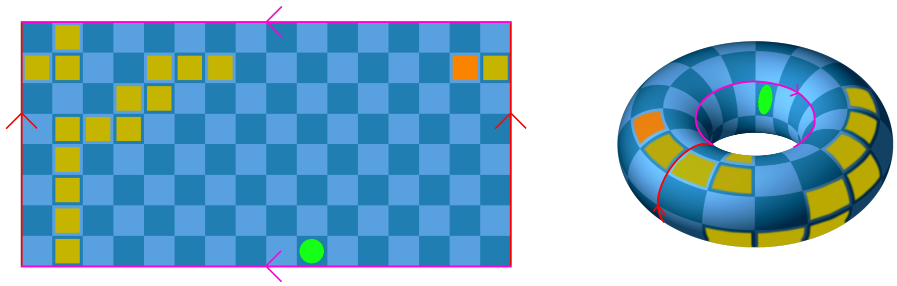

Figura 4: Ecco come si può ottenere un toro a partire da un rettangolo, incollando fra loro i lati rossi e i lati rosa, rispettivamente, mantenendo l'orientazione (fatto che discuteremo tra un attimo). Ora è evidente il significato geometrico del cosiddetto "effetto Pac-Man"

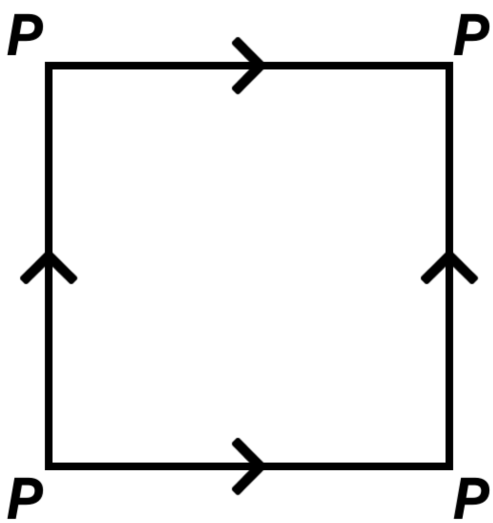

Figura 5: Notazione utilizzata in matematica (in particolare in topologia) per indicare quali lati vadano incollati fra loro, e con quale verso. Si noti come, dopo aver fatto gli incollamenti, i quattro vertici del quadrato si troveranno nello stesso punto, quindi li indichiamo con la stessa lettera (P).

Come si sarà già intuito, possiamo fare la stessa cosa anche nel nostro gioco: *Le regole di gioco sono le solite.*

GIOCO SU UN TORO TOPOLOGICO: clicca per giocare

Con un ultimo sforzo di immaginazione possiamo provare a capire cosa succede se decidiamo di invertire il verso di una delle frecce.

Le regole di gioco sono le solite, viene solo aggiornato il sistema di movimento.

GIOCO SU UNA BOTTIGLIA DI KLEIN TOPOLOGICA: clicca per giocare

Una piccola modifica e ci sono già dei cambiamenti importanti: nel momento in cui si attraversa il bordo superiore oppure quello inferiore, ecco che diventiamo più sbiaditi e compariamo anche in un posto diverso rispetto a quello che siamo abituati ad aspettarci. Le novità però non si fermano qui: mentre siamo sbiaditi non possiamo nemmeno mangiare la frutta!

Come mai tutte queste novità? E a livello geometrico cosa si ottiene? Invito a pensarci un attimo oppure, se si ha la possibilità, a provare a far combaciare i lati di un quadrato di carta nel nuovo modo.

Non è semplicissimo, dato che siamo costretti, fatta la prima piega, a tagliare via un pezzetto di cilindro per far passare una delle estremità, come si può vedere nella Figura 6.

Questa celebre figura geometrica viene chiamata "Bottiglia di Klein" ed è un oggetto importantissimo nello studio della geometria. Come si può vedere non ha un "dentro" e un "fuori" (in termini matematici si dice che la superficie è "non-orientabile"). Ecco quindi spiegato l'effetto: quando il serpente passa per il lato superiore oppure per quello inferiore, quello che succede è che noi iniziamo a vederlo attraverso il campo da gioco, e quindi un po' più sbiadito. Naturalmente se le mele si trovano dalla parte opposta del campo rispetto a noi non le possiamo raccogliere.

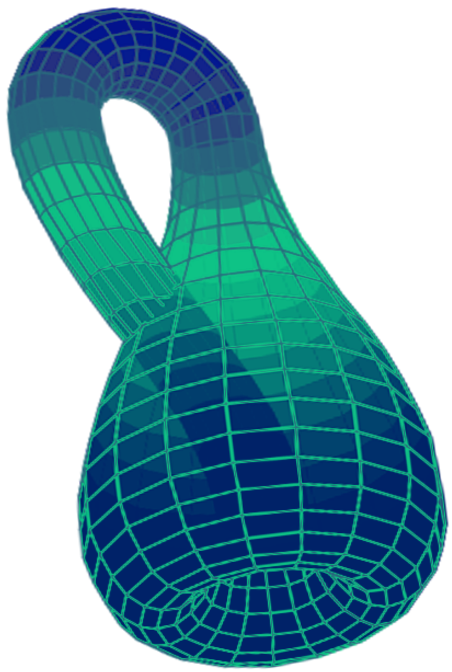

Figura 6: La bottiglia di Klein

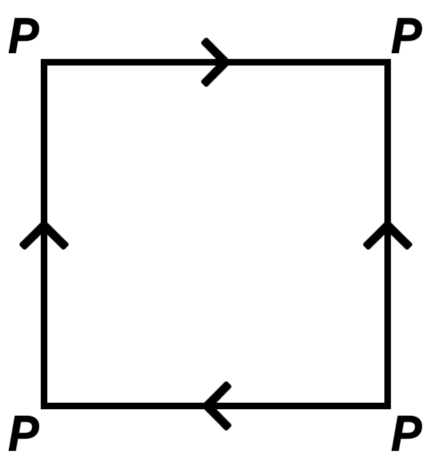

Figura 7: Rappresentazione con la notazione usata in topologia della bottiglia di Klein, analoga al campo su cui abbiamo giocato.