

Musica, dadi e... matematica

Anna Cendron

Gennaio 2023

La matematica può essere considerata una molteplicità di cose: un linguaggio, uno strumento, un gioco. Potrà non sembrare un gioco quando cerchiamo di fare il compito a casa o superare un esame, ma per me una delle parti più entusiasmanti della ricerca nel settore è questa: quando si affronta un argomento nuovo, si comincia a trastullarsi con le idee per puro divertimento.

La matematica dell'infinito
Eugenia Cheng

1 Introduzione

Ho scelto di presentare come progetto un percorso interdisciplinare per la Scuola Secondaria di Primo Grado il cui obiettivo è l'introduzione ai concetti matematici attraverso il gioco e il linguaggio musicale.

Lo scopo di questo percorso è quello di introdurre argomenti complessi in modo maggiormente coinvolgente per i ragazzi. È indirizzato a studenti della Scuola Secondaria di Primo Grado e prevede come conoscenza pregressa la lettura di semplici spartiti in chiave di violino, obiettivo che si può trovare nei curricula di educazione musicale di questo ordine di scuola. L'attività con i ragazzi è suddivisa in tre parti: il gioco dei dadi di Mozart, analisi dei minuetti composti, definizione di probabilità e sua applicazione.

Il progetto si riferisce in modo particolare alle seguenti Competenze Chiave europee:

- **COMUNICAZIONE NELLA MADRELINGUA:** interagire con i compagni utilizzando un linguaggio specifico; esprimere le proprie opinioni all'interno di una conversazione; argomentare in modo corretto
- **COMPETENZA MATEMATICA E COMPETENZE DI BASE IN CAMPO SCIENTIFICO E TECNOLOGICO:** gli alunni devono dedurre logicamente i passaggi tra musica e matematica;

- **CONSAPEVOLEZZA ED ESPRESSIONE CULTURALE:** riconoscere l'importanza espressiva e comunicativa della musica attraverso alcune caratteristiche del linguaggio musicale;
- **IMPARARE AD IMPARARE:** utilizzare nuovi metodi di apprendimento; saper ricostruire il percorso fatto, anche avvalendosi della interazione in gruppo.

2 Il gioco dei dadi di Mozart

Il celebre compositore Wolfgang Amadeus Mozart nel 1793 pubblicò a Berlino e ad Amsterdam il "Musikalisches Würfelspiel" (gioco dei dadi musicale). Si tratta di un'opera postuma la cui paternità è stata messa in discussione fino al ritrovamento di alcuni scritti autografi dell'autore che ne hanno confermato l'autenticità. Lo stesso Mozart dichiara di aver scritto tale opera nel corso della propria infanzia per puro diletto.

Il gioco a cui si riferisce l'autore è quello dei dadi. Vengono lanciati due dadi 16 volte, tante quante sono le battute che compongono un minuetto, a ciascun lancio corrisponde un numero riportato in una tabella riferito ad una specifica battuta. Mozart scrisse quindi $11 \times 16 = 176$ diverse battute (si veda allegato).

Agli alunni vengono forniti: il foglio pentagrammato, la tabella di Mozart e i due dadi. Ciascuno di loro dovrà lanciare i dadi e copiare sul foglio pentagrammato la battuta corrispondente al numero uscito annotando anche il risultato del lancio. Finita la trascrizione sarà possibile riprodurre il proprio minuetto al pianoforte oppure con l'ausilio di applicazioni per la scrittura e riproduzione digitale di musica, come per esempio MuseScore.

3 Analisi dei minuetti

In una fase successiva la classe viene divisa in gruppi. In ogni gruppo si procede all'ascolto dei brani di tutti i componenti. Si invitano gli alunni a trovare analogie e differenze delle proprie composizioni, sia dal punto di vista matematico (in riferimento al risultato dei lanci), sia dal punto di vista musicale (riconoscimento di una melodia). L'insegnante di educazione musicale fornisce il lessico appropriato (melodia, minuetto e le sue peculiarità) affinché gli alunni possano esporre in modo corretto le proprie osservazioni.

A questo punto gli alunni avranno compreso che:

- ogni minuetto è melodico, è piacevole all'ascolto. Il minuetto è dotato infatti di una struttura semplice e regolare che si presta ad una composizione "automatica" come quella di questo gioco. Si consideri che le regole di armonia dell'epoca seguivano schemi estremamente rigidi che ne facilitarono la composizione del gioco;
- con un semplice gioco è possibile comporre brani piacevoli;

- se si ascolta con attenzione ci si accorgerà che ogni settima e quattordicesima battuta all'orecchio suonano incomplete, a causa di una nota detta SENSIBILE, che crea un momento di forte tensione musicale. Verrà completata infatti con l'ottava e la sedicesima battuta (che per questo scopo conterranno o una nota detta DOMINANTE oppure un'altra che si chiama TONICA).

Il numero di minuetti componibili a partire dalle 176 battute scritte da Mozart è esorbitante. Per eseguire il calcolo dobbiamo fare il numero di righe totali elevato al numero di colonne:

$$11^{16} = 45949729863572161$$

Numero che equivale a più di 45 quadrilioni, precisamente $4.594972986... \times 10^{16}$.

Un numero davvero impressionante che dovrebbe incuriosire i ragazzi. Sono davvero tante le composizioni possibili con un numero così limitato di battute. Loro stessi probabilmente hanno composto un brano che con molta probabilità lo stesso Mozart non aveva mai scritto.

A questo punto le composizioni dei ragazzi possono essere lette anche in chiave matematica. Nel corso del confronto all'interno del lavoro di gruppo i ragazzi avranno sicuramente notato che ci sono numeri che escono con maggiore frequenza di altri, la loro uscita è cioè più **probabile**. Sono queste osservazioni che portano all'introduzione di un importante concetto matematico: il concetto di probabilità.

4 Definizioni di probabilità ed applicazione

La **probabilità** di un evento E è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli f e quello dei casi possibili TOT , quando essi sono tutti ugualmente possibili.

$$p(E) = \frac{f}{TOT}$$

Nel nostro caso si è notato che il numero uscito con più facilità dal lancio dei due dadi è il 7, proviamo a scoprire il perché. Il 7 si può ottenere dalle combinazioni:

1. $1+6=7$
2. $2+5=7$
3. $3+4=7$
4. $4+3=7$
5. $5+2=7$
6. $6+1=7$

Sono quindi 6 i casi favorevoli su 36 casi possibili. Calcoliamo quindi la probabilità dell'evento "la somma dei due dadi è 7":

$$p(E_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Questo è l'evento più probabile? Senza eseguire nuovamente i calcoli, i risultati per gli altri numeri sono:

$$p(E_2) = \frac{1}{36} \quad p(E_3) = \frac{1}{18} \quad p(E_4) = \frac{1}{12} \quad p(E_5) = \frac{1}{9} \quad p(E_6) = \frac{5}{36}$$

$$p(E_8) = \frac{5}{36} \quad p(E_9) = \frac{1}{9} \quad p(E_{10}) = \frac{1}{12} \quad p(E_{11}) = \frac{1}{18} \quad p(E_{12}) = \frac{1}{36}$$

Quindi effettivamente la battuta che corrisponde al numero 7 è quella più facilmente ottenibile.

Al momento non sappiamo se Mozart avesse pensato a questa eventualità e nella stesura del suo libro abbia deciso di mettere le battute meglio riuscite in corrispondenza del 7, possiamo però provare ad ascoltare come suona un minuetto con le sole battute corrispondenti al 7.