COMUNICAZIONE DELLE SCIENZE
Caola Teresa, matricola 231137

MUSICA E MATEMATICA: IL SUONO DELLA GEOMETRIA

Introduzione

Il tema della comunicazione della matematica è un tema oggigiorno di fondamentale importanza. Sempre più matematici si stanno rendendo conto della rilevanza di saper trasmettere alla società le proprie scoperte, l'argomento dei propri studi.
La questione di come sia possibile comunicare tale scienza a persone che stanno al di fuori della piccola nicchia di studiosi specialisti, assume nella società odierna un ruolo centrale.

Ciò che principalmente è oggetto di discussione tra gli esperti in materia è: "come insegnare la matematica" e "come trasmetterla, come renderla attraente".

Ragionando su tali questioni ho individuato due elementi, che credo sia necessario tenere in considerazione per una efficace comunicazione.

In primo luogo, penso sia fondamentale nella divulgazione riuscire a colpire l'ascoltatore, suscitando in lui **emozioni**.
Come sostiene anche Carrada, nel suo scritto "Comunicare la scienza. Kit di sopravvivenza per ricercatori", "il primo passo [...] di una comunicazione è individuare l'emozione sulla quale fare leva. Una comunicazione emotivamente piatta infatti 'non passa', o viene subito dimenticata. Questo semplice fatto è stato peraltro riscoperto anche dalle neuroscienze, che hanno rivalutato il **ruolo dei sentimenti e delle emozioni nelle nostre capacità cognitive**."

Oltre a ciò, penso che una comunicazione moderna della matematica non può assolutamente ignorare i **legami che ci sono fra matematica e realtà**, e deve cercare di andare oltre a uno sterile esercizio di abilità formali, che per quanto possa essere attraente agli occhi di un matematico, spesso non suscita interesse in persone non appassionate alla materia.
Credo infatti che, per rendere un materia apparentemente astratta più intrigante, bisogna insegnare a **riconoscerla "implicita" nelle più svariate situazioni del mondo reale, a collegarla alla quotidianità.** Poiché solo quando si comprende che la matematica non è soltanto un ragionamento astratto, se ne possono dedurre appieno le potenzialità e di conseguenza ci si rende conto del fascino di tale materia e dell'importanza degli studi in tal campo.

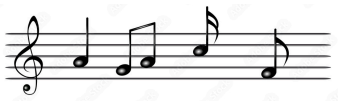
Da queste due idee di base sul come comunicare una scienza, nasce tale elaborato, scritto nel tentativo di far crescere l'interesse per la matematica nelle persone che pensano che essa sia soltanto una raccolta di formule astratte, di difficile applicazione nella vita reale.
Per raggiungere tale scopo è necessario un metodo di comunicazione che può:

- arrivare all'emotività dell'ascoltatore;
- mantenere un legame con la vita di tutti i giorni senza risultare troppo astratto
- far comprendere delle idee matematiche, trasmettere delle nozioni, in maniera leggera, piacevole e comprensibile a tutti.

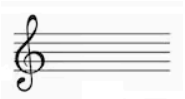
Nel tentativo di trovare un metodo che soddisfacesse tali punti, ho avuto l'idea di **parlare di matematica utilizzando la musica**. Infatti quale altro mezzo se non il linguaggio universale della musica, è in grado di comunicare direttamente alle persone di qualsiasi età e indipendentemente dal loro livello di conoscenza in campo?

In particolare lo scopo di tale progetto è quello di **mostrare come lo studio delle figure geometriche possa essere affrontato anche da un punto di vista diverso a quello proprio della geometria euclidea**. In particolare il presente lavoro mette in risalto l'aspetto interdisciplinare dello studio delle **trasformazioni geometriche, del nastro di Moebius e della figura del toro con la musica**, con l'intento di rendere tali figure meno astratte.
Con questo elaborato mostro un esempio di come con l'ausilio della musica sia possibile **non solo vedere alcune applicazioni di tale geometria ma anche ascoltare l'effetto che possono avere su una melodia** e ciò a mio avviso rende lo studio di tale materia decisamente più coinvolgente.

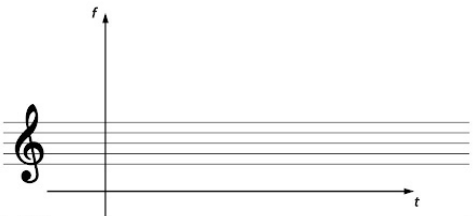
— — — — — — + — — — — — —

La musica, un po' come la matematica, ha un suo linguaggio particolare. Così come la matematica si esprime tramite simboli matematici, la musica si esprime tramite le note, che sono rappresentate su un insieme di cinque righe parallele detto pentagramma.

Per poter individuare la presenza della matematica nella musica è necessario accomunare in parte questi due linguaggi. In particolare per mettere in relazione quello che è lo spartito musicale con le trasformazioni geometriche è conveniente vedere tale spartito come un piano cartesiano, e il susseguirsi delle note su di esso come una funzione. Vediamo come.

Lo spartito musicale come piano cartesiano

Il pentagramma in musica

pentagramma vuoto

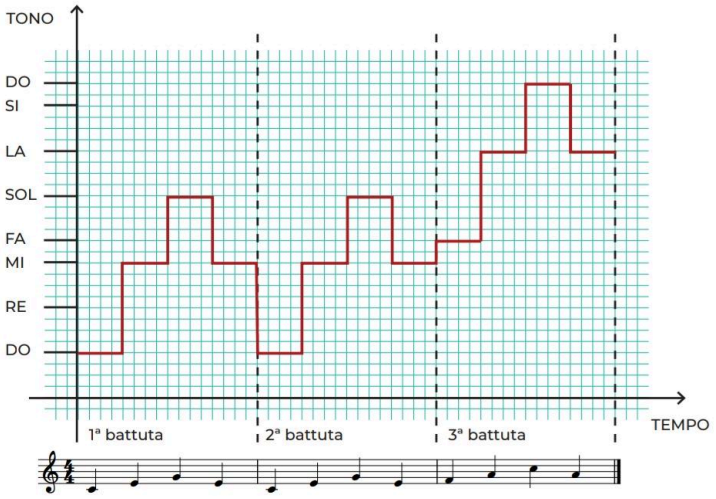
è l'equivalente di un piano cartesiano in matematica: l'asse delle ascisse rappresenta il tempo (t), la durata delle note; quello delle ordinate la frequenza (f), ovvero l'altezza delle note indicata col loro nome.



pentagramma visto come un piano cartesiano

Prendiamo il piano (x,y) e riportiamo sull'asse x il tempo (che in musica corrisponde a una successione di battiti ad intervalli costanti) e sull'asse y l'altezza del suono in ordine crescente dal più grave al più acuto. Così facendo una qualsiasi melodia può essere rappresentata da una legge f in modo che y = f(x). Ogni melodia può cioè essere interpretata come una funzione.

Ecco un esempio di come è possibile interpretare matematicamente un pentagramma:



Visualizzazione di una melodia su un piano cartesiano, tramite una funzione. Nell'asse delle ascisse di un ipotetico piano musicale ordinato troviamo il tempo. Il pentagramma in basso è diviso in 3 battute, cioè tre intervalli temporali di durata uguale. L'unità di misura fondamentale della durata delle note, e quindi del tempo, è il quarto (1/4). Tutte le figure musicali normalmente hanno cioè una durata che sia multipla o sottomultipla del quarto. Nell'esempio in figura ogni nota rappresentata sul pentagramma dura un tempo che vale ¼ del tempo complessivo della battuta (che vale 4/4, come specificato all'inizio del rigo), essendo in questo caso le note tutte uguali. In definitiva, su un pentagramma è possibile eseguire una nota di durata qualsiasi, a patto che abbia valore razionale (e quindi esprimibile sotto forma di **frazione**). Questa particolarità del piano musicale rispetto a quello cartesiano implica che entrambe le dimensioni (altezza e tempo) siano sottoposte alle trasformazioni geometrico-musicali separatamente.

Tale rappresentazione grafica indica contemporaneamente il valore di durata dei singoli suoni, in altre parole il loro scorrere nel tempo (asse del tempo), e l'altezza di ognuno di essi, ovvero il tono.

Le TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE nello SPARTITO MUSICALE

Una volta individuato tale legame tra pentagramma e piano cartesiano, possiamo passare all'argomento principale di questo elaborato: **le trasformazioni geometriche**.

Definizione.

In geometria si definisce *trasformazione geometrica piana* una corrispondenza biunivoca del piano con se stesso che associa ad ogni punto del piano un punto del piano stesso. Detto Ω l'insieme dei punti del piano, una trasformazione geometrica piana è una funzione $f:\Omega\to\Omega$ che a un punto P del piano associa un altro punto P' del piano, detto immagine di P, mediante la trasformazione. Inoltre tale trasformazione deve essere biettiva, cioè per ogni punto P' del piano deve esistere un solo punto P, di cui P' è l'immagine mediante f.

In base al numero di invarianti, ovvero alle proprietà delle figure che non cambiano nell'applicazione di una trasformazione, possiamo stilare una classificazione sintetica delle trasformazioni geometriche:

- omotetie (trasformazione geometrica che conserva le ampiezze degli angoli);
- identità (manda ogni punto del piano in sé stesso);
- similitudini (conserva i rapporti tra le distanze);
- *isometrie* (che corrispondono a movimenti rigidi delle figure sul piano, dunque sono conservate le distanze) che comprendono traslazioni, simmetrie assiali e rotazioni.

Andiamo a studiare una possibile applicazione di tali trasformazioni geometriche alla musica e l'effetto che esse producono su una melodia.

La TRASLAZIONE

Definizione.

Per definire la traslazione dobbiamo considerare un segmento orientato v, detto vettore, cioè un segmento su cui è definito un verso di percorrenza.

La *traslazione* di un vettore v è l'applicazione che ad ogni punto P del piano associa il punto P' tale che il segmento orientato di primo estremo P e secondo estremo P' (PP') rappresenti il vettore v (cioè i due vettori v e PP' abbiano stessa lunghezza, stesso verso e siano paralleli).

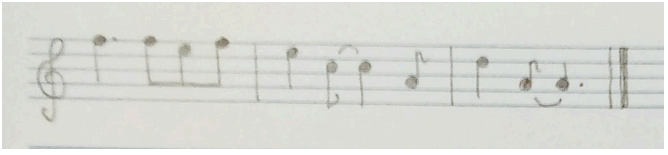
E' dunque una trasformazione isometrica (mantiene i rapporti tra le distanze) che provoca uno spostamento della figura su un asse, senza che venga modificata o ruotata.

La traslazione nella musica corrisponde a una **tecnica compositiva** usata da secoli per sviluppare una melodia a più voci. Essa è particolarmente presente nel *canone* e nella *fuga* in cui una melodia (o tema principale), viene prima esposta da un'unica voce (o strumento) e mediante opportune trasformazioni geometriche è poi affidata alle altre voci.

La traslazione di una melodia può avvenire:

a) *rispetto all'asse x* (la melodia traslata (seconda voce) viene eseguita dopo una pausa)
b) *rispetto all'asse y* (tutti i suoni della melodia sono innalzati o abbassati di tono)

Consideriamo a titolo di esempio la seguente melodia:

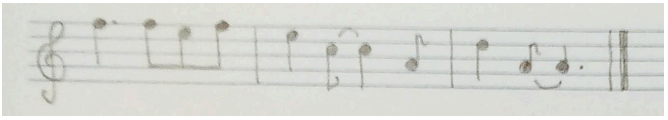


Breve melodia estratta dal brano "We are the Champions" di Freddie Mercury, arr. Tim Waters.

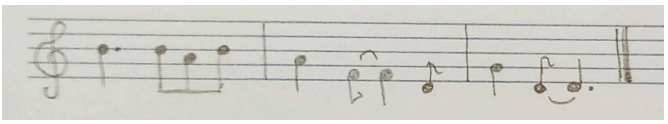
Per comprendere meglio il concetto di traslazione rispetto a diversi assi proviamo ad applicare a tale melodia una:

a) **traslazione rispetto all'asse y** (La melodia traslata viene eseguita ad un tono più basso: ciò vuol dire che tutti i suoni sono stati abbassati di un valore, riproducendo la stessa melodia ad un'altezza inferiore.)

   Il risultato grafico è:



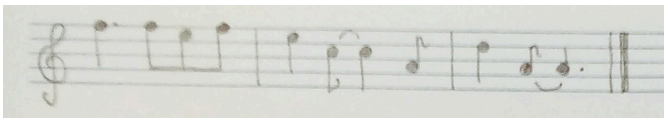
Melodia originale.



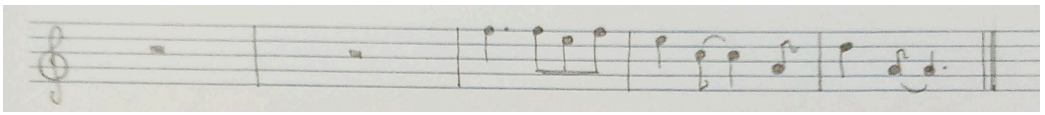
Melodia traslata.

b) **traslazione rispetto all'asse x** (La melodia traslata viene eseguita dopo il momento di silenzio indicato dalla pausa.)

   Il risultato grafico è:



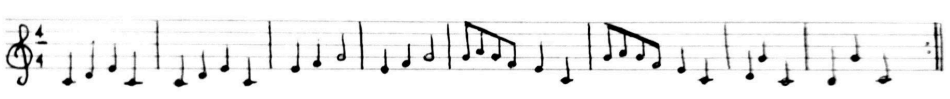
Melodia originale.



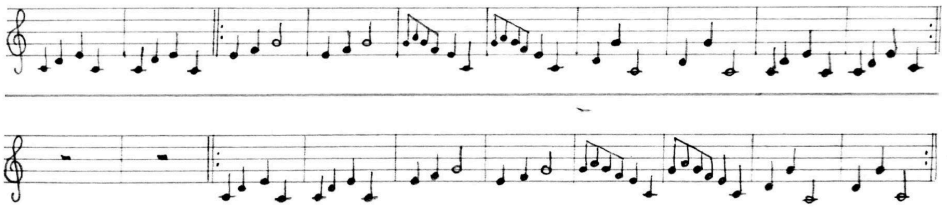
Melodia traslata.

La traslazione sull'asse x in musica permette di comporre i CANONI

Prendendo spunto da un articolo di Benedetto Scimemi possiamo vedere un esempio completo di traslazione lungo l'asse x attraverso la popolare melodia Fra Martino campanaro (ovvero Frère Jacques).

Tale melodia è un **canone**, cioè una composizione musicale in cui più voci (in questo caso due) eseguono la stessa melodia principale,

Melodia principale di Frère Jacques (Fra Martino).

ma in cui la seconda voce inizia dopo un intervallo di tempo rispetto alla prima e così via.

Il risultato è il seguente:

Spartito della melodia Frère Jacques.
In questo caso sono presenti due righi (invece di uno solo come nell'esempio precedente) perchè sono presenti due voci (due strumenti) che creano un canone mescolandosi.
In Frère Jacques la melodia è lunga 8 misure (battute). Nella misura (battuta) 3 una seconda voce inizia a ripetere ciò che cantava la prima voce. Le due voci si incastrano musicalmente (si "armonizzano"); l'armonia continua attraverso le misure (battute) 9 e 10, dove la prima voce ricomincia mentre la seconda voce sta finendo. Poi entra di nuovo la seconda voce e la sequenza dalla battuta 3 alla 10 forma uno stato stazionario che si ripete naturalmente ancora e ancora.

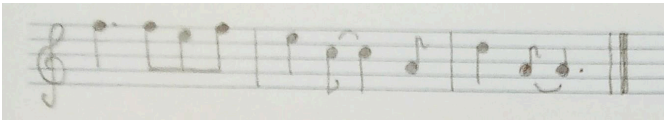
Due voci suonano la stessa melodia, ma traslata di due battute a destra nella seconda voce rispetto alla prima.

Un'altra trasformazione geometrica frequentemente utilizzata per sviluppare una melodia è la simmetria assiale (o riflessione).

La RIFLESSIONE

Definizione.
Fissata una retta *r*, la riflessione (o simmetria assiale) di asse *r* è la trasformazione del piano cha associa ad ogni punto P del piano il punto P' in modo che la retta *r* sia l'asse del segmento PP' (cioè che *r* sia perpendicolare al segmento PP' e passi per il suo punto medio). La retta *r* prende il nome di asse di simmetria.

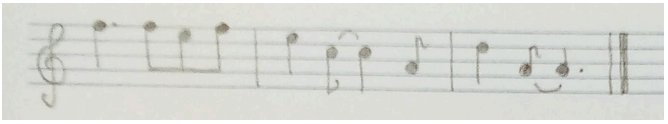
Consideriamo a tipo di esempio di nuovo la melodia di prima:



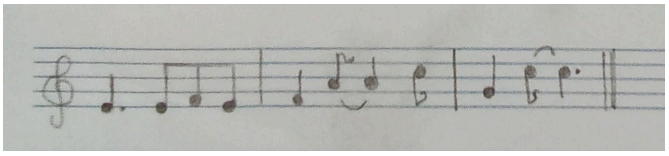
Breve melodia estratta dal brano "We are the Champions" di Freddie Mercury, arr. Tim Waters.

Per comprendere meglio il concetto di riflessione rispetto a diversi assi proviamo ad applicare a tale melodia una:

a) **riflessione rispetto all'asse x**. Gli intervalli della melodia originale sono eseguiti in senso inverso: ciò vuol dire che il primo intervallo che è di un tono ascendente nella riflessione diventa un tono discendente.
In musica questa trasformazione ha il nome di ***canone per moto contrario*** o ***inversione*** o ancora ***canone a specchio*** quando melodia originale e riflessa iniziano simultaneamente.

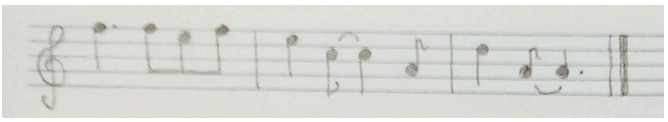


Melodia originale.

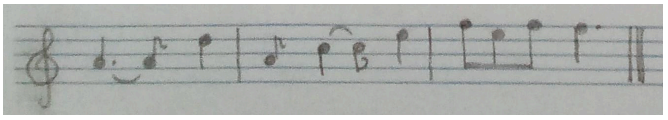


Melodia riflessa.

b) **riflessione rispetto all'asse y**. La melodia riflessa è costituita dalle stesse note alla stessa altezza di quella originale in una successione di suoni a ritroso: essa inizia dall'ultima nota della melodia originale per concludere con la prima.
In musica questa trasformazione si chiama ***retrogrado*** o ***canone a granchio***.

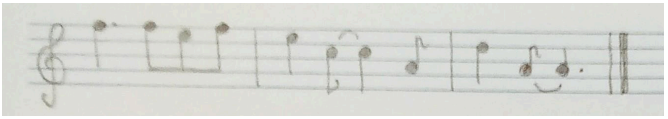


Melodia originale.

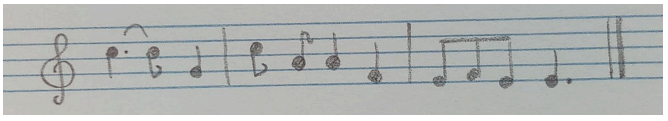


Melodia riflessa.

c) **simmetria rispetto all'origine** (composizione delle riflessione rispetto all'asse x e all'asse y). La melodia riflessa si costruisce dalla composizione simultanea delle riflessioni a) e b): in pratica si invertono gli intervalli e si procede a ritroso.
In musica questa trasformazione si chiama ***retrogrado dell'inverso***.



Melodia originale.



Melodia riflessa.

— — — — — — + — — — — — —

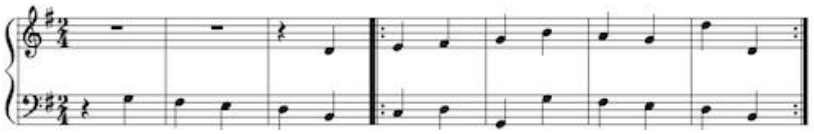
Grandi compositori nella storia si sono affidati a tali trasformazioni geometriche nella composizione di brani musicali diventati anche molto celebri. E anche diversi compositori di oggi lo fanno! L'idea è quella che, partendo da una melodia principale, per creare le altre voci che permettano di stilare l'opera musicale nel suo complesso, ci si possa fare aiutare dalla geometria. Nello specifico si può provare ad applicare a tale melodia principale delle trasformazioni geometriche (come la traslazione ma non solo) per ottenere nuove musiche. Non sempre ovviamente il risultato è soddisfacente, ma a volte si ottengono combinazioni sorprendenti.

JOHANN SEBASTIAN BACH

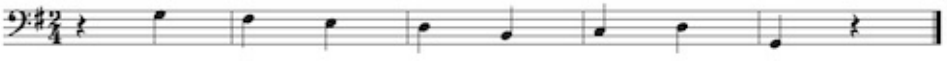
Il più famoso tra tutti i compositori che si affidarono alla matematica fu Johann Sebastian Bach (1685-1750), che frequentemente si fece aiutare dalla geometria per stilare i suoi capolavori.

I canoni erano una specialità del grande compositore barocco Bach (1685-1750). Infatti la migliore immagine che abbiamo di lui lo mostra con in mano la partitura di un canone, il tredicesimo della serie di 14 da lui intitolato "Quattordici Canoni sulle prime otto note fondamentali dell'aria [dalle Variazioni Goldberg]".

Canone 3 da BWV 1087

Analizziamo il *Canone 3* (BWV 1087) dal *Bach-Werke-Verzeichnis*, ovvero il 'catalogo delle opere di Bach'.

Canone 3, BWV 1087

Il *Canone 3* è un'applicazione della **riflessione rispetto all'asse x** unita ad una **traslazione rispetto all'asse x** e ad una **traslazione rispetto all'asse y**.

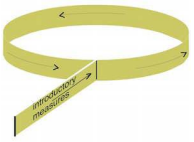
Esso è un canone a due voci che coinvolge una voce principale

Melodia principale del canone 3.

e la sua inversione (cioè la melodia principale riflessa rispetto all'asse delle x), dove tutti gli intervalli sono invertiti, scendendo quando l'originale si muove verso l'alto, e viceversa (Bach li descrive come *motu recto et contrario*).

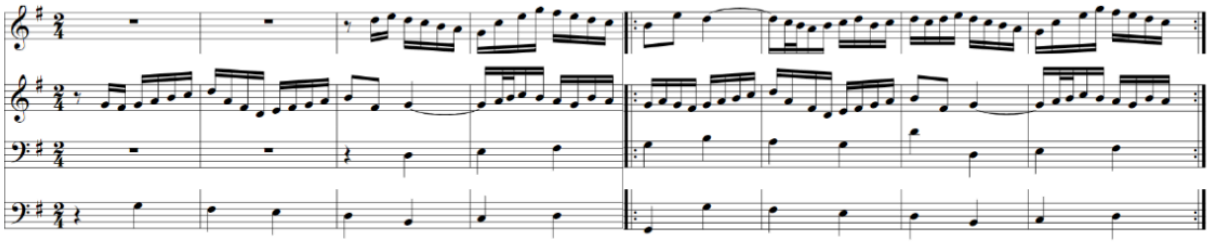
Melodia principale del canone 3 rovesciata, cioè sottoposta a una **RIFLESSIONE rispetto all'asse x**.

Per formare il Canone 3, quest'ultima melodia viene anche traslata rispetto all'asse y, cioè tutte le sue note sono spostate più in basso (variazione del tono).

Topologicamente, sia *Frère Jacques* (Fra Martino) che *BWV 1087, Canone 3* hanno la stessa struttura: dopo le misure introduttive, il canone si stabilizza in uno stato stazionario cilindrico. Tutti i canoni di Bach sono organizzati in questo modo.



Canone 5 da BWV 1087: Il NASTRO DI MOEBIUS

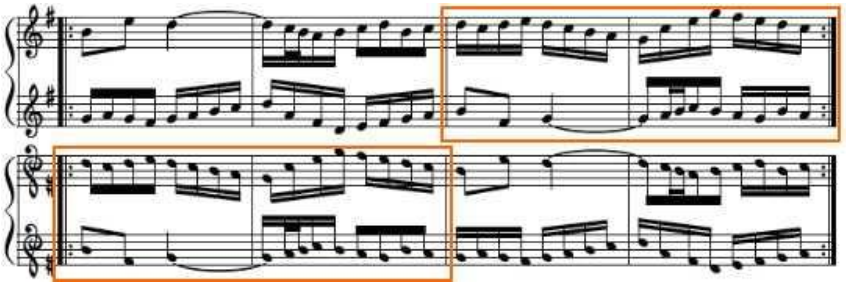
Interessante dal punto di vista topologico è anche il *Canone 5*, sempre di Bach.
Per la realizzazione dello stesso il compositore utilizza una composizione di una **simmetria rispetto all'asse x** con una **traslazione**.

Canone 5, BWV 1087

Nel *Canone 5* ci sono 4 voci che cantano due canoni in parallelo. Uno dei canoni utilizza le due voci del *Canone 3* (terza e quarta voce nello spartito in figura), tranne per il fatto che la terza voce viene spostata di un'ottava (**traslazione rispetto all'asse y**); ad esso è sovrapposto un altro canone (vedi prima e seconda voce nello spartito in figura) con la stessa costruzione: la seconda voce imita la prima, iniziando dopo due battute (**traslazione rispetto all'asse x**) e capovolto (**riflessione rispetto all'asse x**).

Il canone 5 è particolarmente interessante perché si rifà a una bellissima forma matematica chiamata nastro di Moebius. Infatti, se ci concentriamo sulle due voci più alte di tale canone, esse presentano due particolarità.

La prima è che possono essere codificate su di un cilindro, basta legare le due estremità. E quindi il pezzo può continuare ad essere suonato all'infinito. E' dunque un testo periodico.

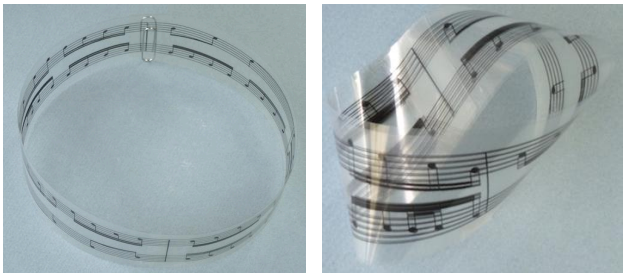
La seconda si vede confrontando la partitura con la sua immagine speculare (capovolta verso il basso, cioè una riflessione rispetto all'asse x di entrambe le voci insieme): le ultime due misure della partitura possono essere viste come identiche alle prime due misure capovolte (riquadri arancioni nell'immagine) e viceversa.



La partitura delle voci più alte del *Canone 5* ha una simmetria di glide-reflection.

Come si può interpretare geometricamente tale composizione?

Qualsiasi testo musicale con tali proprietà può essere codificato su una **striscia di Möbius**. In particolare se il cilindro viene avvolto in due strati, con una torsione, i due insiemi di simboli corrispondono esattamente. Le note che sono su un lato del nastro, sono esattamente le stesse note che ci sono dall'altra se potessimo vedere attraverso. Questo si comprende meglio utilizzando un foglio trasparente (come in figura). L'oggetto risultante è un nastro di Möbius.



La partitura delle due voci superiori del Canone 5 stampata su un cilindro.

Il cilindro si avvolge due volte su se stesso, con una torsione, fino a formare un nastro di Möbius. Nota che le due copie di ciascuna nota ora corrispondono esattamente (ad eccezione delle code).

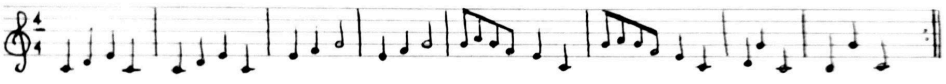
Da notare che i simboli vivono nella striscia, e non solo su di essa: possono essere letti da entrambi i lati.

Anche la partitura per le due voci inferiori (sempre del canone 5) gode delle due proprietà elencate sopra: anch'essa può essere codificata su un nastro di Möbius, ma su uno diverso, essendo gli assi di simmetria diversi.

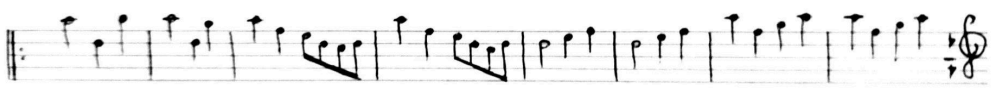
Anche il Canone 3 può essere letto da un nastro di Möbius.

La RIFLESSIONE in musica trasmette EMOZIONI

La stessa melodia, se viene riflessa può portare a caratteri malinconici, solenni oppure introspettivi, a seconda del tipo di riflessione applicata.

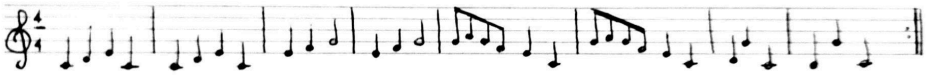
- Utilizzando nuovamente la melodia Fra Martino

ed applicando ad essa la **riflessione lungo l'asse x** otteniamo una sensazione malinconica caratteristica del modo minore.

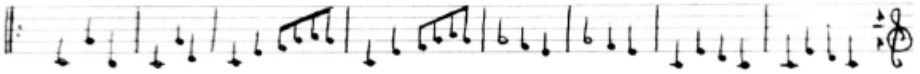
Il risultato grafico è il seguente:



Melodia riflessa.

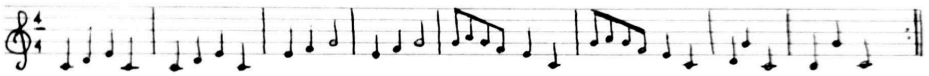
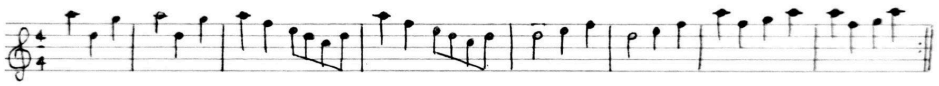
- Per quanto riguarda la **riflessione rispetto all'asse y** va osservato che la melodia rovesciata ha un significato assai diverso da quello originale e in questo caso assume un carattere solenne e da marcia, rafforzato dal rapporto fra la struttura ritmica del brano e i valori di durata dei suoni della melodia; infatti, all'inizio di ogni inciso si trova la figura musicale di maggior valore diversamente da quanto avviene nella melodia originale.

  Il risultato grafico è il seguente:

Melodia principale.



Melodia riflessa.

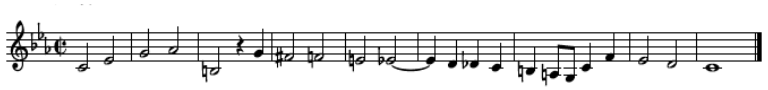
- Infine, la **riflessione rispetto all'origine** modifica profondamente la melodia originale. La melodia assume un carattere introspettivo e intimistico evidenziato dall'andamento della successione dei suoni che procede prima verso le note gravi e poi verso il punto d'origine, esattamente l'inverso della melodia originale.

  Il risultato grafico è il seguente:

Melodia principale.

Melodia riflessa.

— — — — — — + — — — — — —

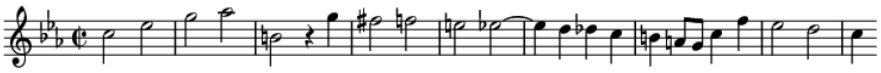
C’è un gruppo di composizioni di Bach degno di nota dal punto di vista geometrico. Si chiama *Offerta musicale*.

Le TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE nell' "*OFFERTA MUSICALE*" di BACH

L'*Offerta musicale* è un'opera preparata da Bach dopo la sua visita alla corte del re Federico II di Prussia (Federico il Grande) a Potsdam il 7 maggio 1747. Il re, che era lui stesso un musicista, propose un tema, detto *Thema Regium* su cui Bach, sul posto, improvvisa una fuga in 3 parti (a tre voci).

Il "Tema reale" proposto a Bach da Federico il Grande. Nota che inizia e finisce sulla stessa nota.

Federico II sfidò anche Bach a improvvisare sul posto una fuga in 6 parti sul tema, ma il compositore rifiutò questo compito molto più difficile. Però tornato poi a casa a Lipsia, Bach riuscì a scrivere la fuga in 6 parti richiesta da Federico II, a cui aggiunse anche una sonata a tre (un trio) e una serie di dieci canoni, tutti basati sul "Tema reale". Li fece stampare per il re: questa era l'*Offerta musicale*.

Il *Thema Regium* con la sua melodia incisiva, magnificamente rotonda, con il suo ritmo energico, offre delle potenzialità eccellenti, per la costruzione del controsoggetto. Offre inoltre delle opportunità illimitate per le variazioni, ed è in questo senso che Bach principalmente lo esplora.

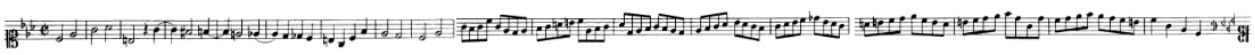


Tema Regium, Offerta Musicale.

Nelle composizioni dell'Offerta musicale troviamo una **rigorosa applicazione delle trasformazioni geometriche** e l'analisi **non** è **artificiosa in quanto Bach si è servito intenzionalmente di esse** nella stesura dell'opera.
Il risultato è matematico e musicale, un fluire di eventi rigorosamente controllati dove con l'immaginazione e l'inventiva la composizione è sempre espressiva e originale..

Concentriamoci sul *Canone a 2* di tale *Offerta musicale*.

"CANON A' 2": riflessione rispetto all'asse x



Per crearlo Bach parte dal Thema regium, e lo modifica opportunamente aggiungendo una seconda parte. Facendo ciò rende possibile la lettura di tale melodia sia da destra verso sinistra che da sinistra verso destra. In musica questo si chiama *retrogrado*.

Infatti se il lettore mette la musica originale al rovescio e legge da destra a sinistra troverà le note esatte con cui la parte imitativa deve essere costruita.
Dal punto di vista della geometria cioè Bach applica una riflessione rispetto all'asse delle y, che diventa la seconda voce.

In pratica è come se i due suonatori partissero a suonare tale melodia allo stesso tempo, ma uno la leggesse diritta così com'è scritta mentre l'altro partisse dall'ultima nota e leggesse tutto all'indietro fino alla prima nota.

— — — — — — + — — — — — —

La sperimentazione compositiva di Bach consiste proprio nel combinare diverse trasformazioni geometriche per osservarne il risultato melodico. Bach si diverte nelle sue composizioni a giocare con tali trasformazioni, ottenendo composizioni anche molto complesse, veri e propri capolavori.
Possiamo dunque affermare che la musica di Bach è il processo di suonare la matematica. Egli sapeva alla perfezione applicare nel modo corretto le regole matematiche alle melodie che aveva sotto mano per generare nuova musica.
A tal punto che i suoi canoni non si riducono più ad un esempio concreto della applicazione rigorosa della riflessione ma sono un modello di originalità, di equilibrio e di espressione affascinante.
L'arte di Bach consiste nella sua capacità di applicare la giusta dose di matematica alla melodia di base, per creare una composizione più complessa e gradevole armonicamente.

— — — — — — — + — — — — — — —

Bibliografia:

- "Aspetti didattici dello studio delle trasformazioni geometriche: L'Offerta Musicale di J. S. Bach" di Daniela Galante
- Surface Topology in Bach Canons, I: The Möbius strip (AMS)
- Tra musica e geometria... riflessioni e traslazioni (video Ornella Robutti)
- Music on a Clear Möbius Strip - Numberphile (video Marcus Du Sautoy)
- Matematica, creatività e canto (Politecnico di Torino)
- J S Bach Crab Canon on a Moebius Strip (Attila Subicz)