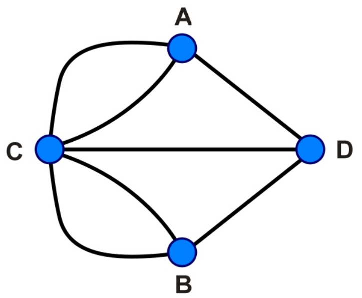
# SESTA TAPPA

Da sempre si cerca di schematizzare la realtà per poterla trattare come oggetto matematico. Raccogliere dati per costruire grafici da analizzare, scomporre aree o volumi in figure geometriche note per poterli calcolare più facilmente e così via. L'argomento che stiamo per trattare, rappresenta proprio uno di questi modi per schematizzare e analizzare ciò che ci circonda. La sua comparsa è relativamente recente; infatti viene considerato per la prima volta solo nel 1700.
Ci troviamo a Königsberg, una città sul Baltico, attraversata dal fiume Pregel e dai suoi affluenti. Questi corsi d'acqua separano la terra ferma disegnando due grandi isole connesse tra loro e con le aree principali della città da sette ponti. Una domanda serpeggia tra gli abitanti: è possibile passeggiando attraversare tutti e sette i ponti una e una sola volta?

A questa domanda vuole rispondere anche Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero, matematico svizzero che nel 1736 riuscì a risolvere il problema schematizzandolo attraverso una nuova struttura matematica: i grafi.
Che cos'è un grafo? E in che modo può aiutarmi a risolvere questo problema?
Con il termine "grafo" si intende una struttura formata da punti/cerchietti e da linee che li collegano. I primi sono detti *vertici* o *nodi*, mentre i secondi sono detti *spigoli*, *archi* o *collegamenti*.

Nel caso dei ponti di Königsberg i *nodi* rappresentano le 4 aree di terra messe tra loro in collegamento dai ponti, mentre gli *spigoli* sono i possibili collegamenti tra un'area e l'altra attraverso i ponti. Abbiamo così ottenuto un grafo con 4 nodi e 7 spigoli, che possiamo schematizzare ulteriormente nel seguente modo:

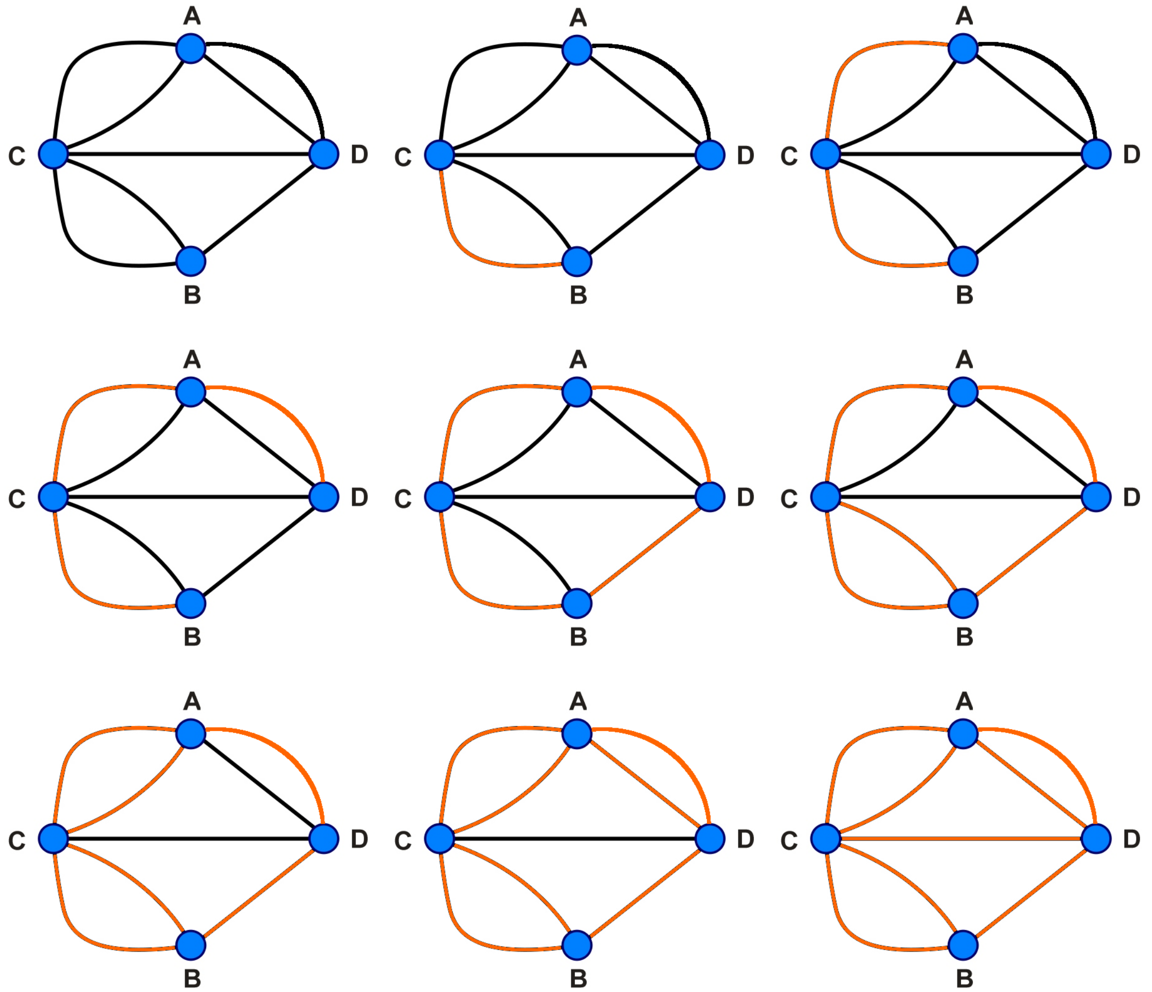



Si può osservare che dai nodi A, B e D partono (e arrivano) 3 cammini: si dice perciò che sono nodi di terzo grado. Dal nodo C invece si diramano 5 cammini, per questo è detto di quinto grado. Eulero ha cercato di capire quale collegamento ci fosse tra il grado dei nodi e la percorribilità del percorso, modificando il grafo per osservare i cambiamenti in termini di percorribilità. Ha potuto così affermare che la risposta al problema è negativa: non è possibile attraversare tutti e sette i ponti una sola volta. Infatti, con i dovuti osservamenti, è arrivato alla seguente affermazione:

*Un qualsiasi grafo è percorribile se e solo se ha tutti i nodi di grado pari, o due di essi sono di grado dispari; per percorrere un grafo "possibile" con due nodi di grado dispari, è necessario partire da uno di essi, e si terminerà sull'altro nodo dispari*.

Nel nostro caso tutti i nodi sono di grado dispari ed è perciò impossibile percorrere il grafo. Ma è possibile aggiungere un ponte per permettere di attraversare tutti i ponti una e una sola volta? Sappiamo che la condizione che rende percorribile un grafo è che abbia al massimo due nodi di grado dispari, per cui vogliamo trasformare due nodi tra A, B, C, D da grado dispari a grado pari. Per farlo basterà aggiungere un solo ponte tra due punti già collegati tra loro: a seconda di dove si aggiunge bisognerà poi avere l'accortezza di partire da un nodo di grado dispari per soddisfare la richiesta attraversando tutti i cammini fino a giungere all’altro nodo di grado dispari. Ad esempio se aggiungiamo un ponte tra A e D, partendo da B arriveremo a C.

Un esempio di percorso: BC ⟶ CA ⟶ AD ⟶ DB ⟶ BC ⟶ CA ⟶ AD ⟶ DC

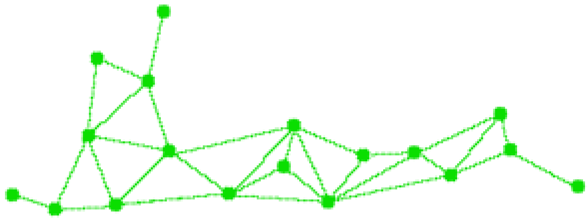



Abbiamo visto quindi che i grafi servono a schematizzare problemi, come quello dei ponti di Königsberg. In questo caso indagavamo la percorribilità del grafo, ma esistono anche altri problemi che si possono affrontare attraverso la teoria dei grafi.

Mettiamo in evidenza come la struttura del grafo può semplificare un problema e ricondurre questioni all’apparenza molto diverse ad una soluzione comune.

**Problema 1.** Vogliamo colorare una cartina in modo che ogni regione abbia un colore diverso dalla regione confinante. Quanti colori dobbiamo utilizzare?

Segniamo con un punto ogni regione e colleghiamo i punti di regioni confinanti. Escludiamo le due isole, che non confinano con le altre regioni e possono essere di qualsiasi colore. Riportiamo solo il grafo, ruotato leggermente:

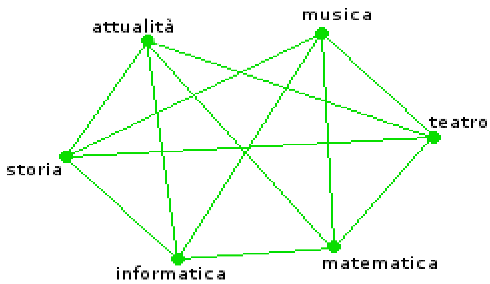


**Problema 2.** Abbiamo 5 studenti che durante un evento vogliono prendere parte ad alcune lezioni:

| | Attualità | Musica | Storia | Matematica | Informatica | Teatro |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Giacomo | X | | | X | | X |
| Alessia | | X | X | | X | |
| Pietro | X | | | X | X | |
| Giovanni | | X | | X | | X |
| Elisa | X | | X | | | X |

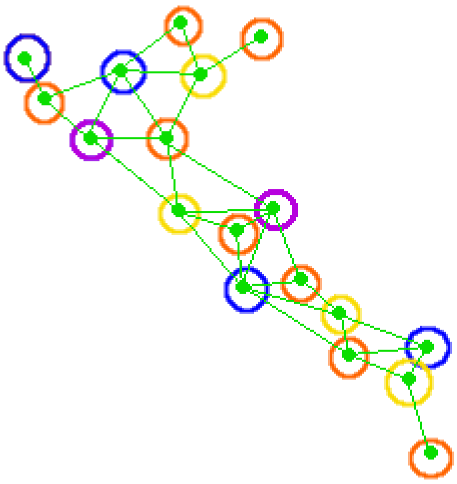
Si vuole fare in modo che le lezioni non si sovrappongano per permettere ad ogni studente di partecipare a quelle selezionate. Quanti turni bisogna organizzare?

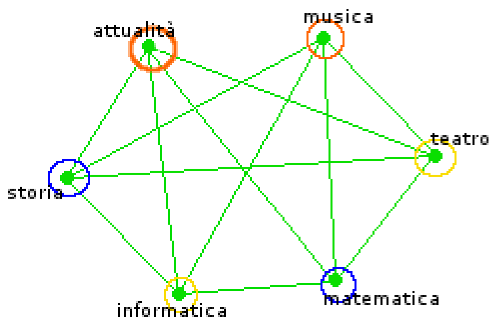
Schematizziamo come segue:



Ogni punto rappresenta una lezione e due punti sono collegati se le lezioni non possono avvenire contemporaneamente, ossia almeno un alunno ha scelto entrambe.

Entrambi i problemi sono stati rappresentati mediante un grafo e la loro soluzione può essere cercata nello stesso modo: vogliamo trovare il minor numero di insiemi contenenti tutti i vertici del grafo tali che ciascun insieme non contenga due vertici consecutivi.






Ogni colore rappresenta un insieme:

- cerchiamo in arancione un vertice del grafo
- seguendo i collegamenti passiamo da un vertice al successivo
- 2 vertici possono appartenere allo stesso insieme solo se non sono consecutivi, quindi procediamo cerchiando in arancione ogni vertice che non è collegato direttamente ad un vertice arancione
- quando non è più possibile aggiungere elementi all'insieme (i vertici sono consecutivi) si inizia la costruzione di un nuovo insieme

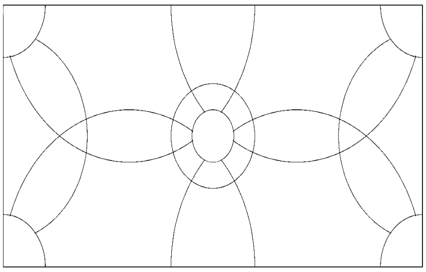
Concludiamo che saranno necessari 4 colori per riempire le regioni della cartina e bisognerà organizzare 3 turni per far partecipare gli studenti alle diverse lezioni. Il vantaggio nello schematizzare dei problemi attraverso l'uso dei grafi, risiede nel fatto che in questo modo la soluzione applicabile ad un problema può essere utilizzata in modo analogo su un altro molto differente.

Il problema della cartina che abbiamo proposto è noto come *Teorema dei quattro colori*, ed è stato congetturato nel 1852 da Francis Guthrie, il quale arrivò a questa constatazione osservando una mappa delle contee britanniche. In teoria dei grafi, equivale ad affermare che "ogni grafo planare è 4-colorabile". In molti cercarono invano di dimostrare la validità dell'affermazione di Guthrie, ma purtroppo le capacità dell'uomo non furono sufficienti ad ottenere una risposta a questo problema. La dimostrazione di questa congettura arrivò solo grazie al computer: nel 1977 Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'università dell'Illinois, riuscirono ad ideare un complesso algoritmo informatico che dimostrò una volte per tutte il Teorema dei 4 colori.

La teoria dei grafi come abbiamo visto è recente, ma nella seconda metà del XX secolo, con l'introduzione del computer, ha avuto un grande sviluppo ed ora rappresenta una branca della matematica molto sviluppata e con grandi possibilità di applicazione: principalmente nella modellazione di reti, sia nell'ambito delle telecomunicazioni che delle scienze neurali o economico-sociali. La ricerca di nuovi algoritmi per la manipolazione dei grafi occupa una grande fetta dell'interesse informatico.

*Ora tocca a te!* Utilizzando la teoria dei grafi prova a risolvere il seguente problema:

“Maria ha un’aiuola e vuole riempirla con fiori diversi in modo che fiori uguali non stiano vicini. Sotto vi è rappresentato uno schema di come Maria vuole disporre i fiori: in ogni regione delimitata andrà una sola tipologia di pianta. Quanti fiori diversi serviranno a Maria per riempire la sua aiuola?”



Per raggiungere la prossima tappa dovrai sommare il numero di vertici del grafo costruito e la risposta al problema.


FONTI SESTA TAPPA

Teoria dei grafi - Wikipedia
Grafo - Wikipedia
I 7 ponti di Konigsberg - Mathone
Problema dei ponti di Königsberg - Wikipedia
https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1052&context=euler-works
Timothy Gowers, *Matematica*, Piccola biblioteca Einaudi, Torino, 2004
Teorema dei quattro colori - Wikipedia