# Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2021/2022

Primo appello - 9 giugno 2022

**Esercizio 1.** Si consideri, al variare di $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, il fascio di coniche $\mathcal{C}[\alpha, \beta] \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dato dall'equazione

$$\mathcal{C}[\alpha, \beta] : \beta^2 x_0^2 - \alpha^2 x_1^2 - \beta^2 x_0 x_2 + \alpha^2 x_1 x_2 = 0.$$

(1) Studiare le coniche degeneri e trovare i quattro punti base del fascio.

(2) Sia $r$ la retta di equazione $x_2 = 0$. Trovare i punti di intersezione $\mathcal{C}[\alpha, \beta] \cap r$ al variare del parametro $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

(3) Identifichiamo il parametro $[\alpha, \beta]$ con i punti della retta $r \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ attraverso la mappa

$$[\alpha, \beta] \longmapsto [\alpha, \beta, 0].$$

Si consideri la mappa $f : r \to r$ data da

$$P \longmapsto \begin{cases} P & \text{se } \mathcal{C}[\alpha, \beta] \cap r \text{ è un punto,} \\ (\mathcal{C}[\alpha, \beta] \cap r) \setminus P & \text{se } \mathcal{C}[\alpha, \beta] \cap r \text{ sono due punti.} \end{cases}$$

Provare che $f$ è una proiettività e che $f^2 = \mathrm{id}$.

**Esercizio 2.** Sia $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la cubica affine di equazione

$$f(x, y) = 3x^2 y - 4x^3 - 3x^2 + y - 1 = 0.$$

(1) Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il piano proiettivo con coordinate omogenee $[x, y, z]$. Identifichiamo $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ con la carta affine $U_z = \{z \neq 0\}$. Studiare i punti singolari della chiusura proiettiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, calcolando molteplicità e tangenti principali.

(2) Calcolare i punti di flesso di $\overline{C}$.

(3) Provare che i punti di flesso di $\overline{C}$ sono allineati e trovare l'equazione della retta $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che li contiene.

**Soluzione 1.** (1) Per prima cosa la matrice associata al fascio di coniche $\mathcal{C}[\alpha,\beta]$ è data da (moltiplicando l'equazione che definisce il fascio per 2):

$$A[\alpha,\beta] = \begin{pmatrix} 2\beta^2 & 0 & -\beta^2 \\ 0 & -2\alpha^2 & \alpha^2 \\ -\beta^2 & \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coniche degeneri si ottengono per i valori di $[\alpha,\beta]$ che annullano il determinante di $A[\alpha,\beta]$, dunque

$$\det A[\alpha,\beta] = 2\alpha^2\beta^2(\beta^2-\alpha^2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad [\alpha,\beta] \in \{[0,1],[1,0],[1,\pm 1]\}.$$

Le coniche degeneri del fascio sono:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[0,1] : x_0^2 - x_0x_2 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad x_0(x_0-x_2)=0, \\ \mathcal{C}[1,0] : x_1^2 - x_1x_2 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad x_1(x_1-x_2)=0 \\ \mathcal{C}[1,\pm 1] : x_0^2 - x_1^2 - x_0x_2 + x_1x_2 = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad (x_0-x_1)(x_0+x_1-x_2)=0. \end{aligned}$$

In particolare, sono tutte e tre date da una coppia di rette incidenti.

I punti base del fascio sono i punti che appartengono a tutte le coniche del fascio, in particolare appartengono all'intersezione delle coniche generatrici $\mathcal{C}[1,0]$ e $\mathcal{C}[0,1]$:

$$(\star) \qquad \begin{cases} x_1(x_1-x_2)=0 \\ x_0(x_0-x_2)=0 \end{cases}.$$

Procediamo per casi usando la seconda equazione di $(\star)$. Se $x_0=0$, la prima equazione diventa

$$x_1(x_1-x_2)=0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P_1=[0,0,1] \\ x_1 = x_2 \quad \rightsquigarrow \quad P_2=[0,1,1] \end{cases}.$$

D'altra parte, se invece $x_0=x_2$, la prima equazione di $(\star)$ diventa della forma

$$x_1(x_1-x_0)=0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P_3=[1,0,1] \\ x_1 = x_0 \quad \rightsquigarrow \quad P_4=[1,1,1] \end{cases}$$

e questo conclude la ricerca dei quattro punti base del fascio.

(2) Iniziamo a calcolare l'intersezione tra il fascio di coniche e la retta $r$ imponendo il sistema:

$$\begin{cases} \beta^2x_0^2 - \alpha^2x_1^2 - \beta^2x_0x_2 + \alpha^2x_1x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \beta^2x_0^2 - \alpha^2x_1^2 = (\beta x_0 - \alpha x_1)(\beta x_0 + \alpha x_1) = 0$$

Se $\alpha=0$ oppure $\beta=0$, allora c'è un solo punto di intersezione, rispettivamente $Q_1=[0,1,0]$ e $Q_2=[1,0,0]$. D'altra parte, se $\alpha\beta \neq 0$, allora ci sono due punti di intersezione dati da

$$x_0 = \pm\frac{\alpha}{\beta}x_1 \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{C}[\alpha,\beta]\cap r = [\pm\alpha,\beta,0].$$

(3) Per i risultati del punto precedente $f[\alpha,\beta,0]=[-\alpha,\beta,0]$ se $\alpha\beta\neq 0$, ma possiamo estenderci anche a $Q_1$ e $Q_2$ visto che una siffatta $f$ soddisfa $f(Q_1)=Q_1$ e $f(Q_2)=Q_2$. Quindi possiamo scrivere $f:r\to r$ come la mappa

$$[y_0,y_1,0]\longmapsto[-y_0,y_1,0]$$

che è chiaramente una proiettività visto che è biettiva. Si vede subito che applicando due volte $f$ si ottiene l'identità. $\square$

**Soluzione 2.** (1) La chiusura proiettiva di $C$ è la curva proiettiva $\overline{C}$ definita dall'equazione

$$F(x,y,z)=3x^2y-4x^3-3x^2z+yz^2-z^3=0$$

I punti singolari di $\overline{C}$ soddisfano il sistema di equazioni dato da $F$ e dalle sue derivate parziali $F_t(x,y,z):=\partial F/\partial t$ con $t\in\{x,y,z\}$. Dunque il sistema è

$$(\star)\qquad \begin{cases}3x^2y-4x^3-3x^2z+yz^2-z^3=0\\ F_x(x,y,z)=6xy-12x^2-6xz=0\\ F_y(x,y,z)=3x^2+z^2=0\\ F_z(x,y,z)=-3x^2+2yz-3z^2=0\end{cases}.$$

Riscriviamo la seconda equazione di $(\star)$ come $6x(y-2x-z)=0$ e procediamo per casi. Se $x=0$, allora le tre equazioni rimanenti di $(\star)$ diventano

$$\begin{cases}z^2(y-z)=0\\ z^2=0\\ z(2y-3z)=0\end{cases}\quad\rightsquigarrow\quad z=0\quad\rightsquigarrow\quad P=[0,1,0].$$

D'altra parte, se $y=2x+z$, allora dalle altre tre equazioni otteniamo

$$\begin{cases}2x(x^2+z^2)=0\\ 3x^2+z^2=0\\ 4xz-(3x^2+z^2)=0\end{cases}.$$

Combinando le ultime due equazioni otteniamo

$$xz=0\quad\rightsquigarrow\quad\begin{cases}x=0\quad\rightsquigarrow\quad z=0\quad\rightsquigarrow\quad \text{non è un punto nel proiettivo,}\\ z=0\quad\rightsquigarrow\quad x=0\quad\rightsquigarrow\quad \text{non è un punto nel proiettivo.}\end{cases}$$

In definitiva, l'unico punto singolare è $P$. Per studiare la singolarità, mettiamoci nella carta affine $U_y=\{y\neq 0\}$ (e supponiamo per semplicità $y=1$), dove il punto $P$ corrisponde a $P_y=(0,0)$ e la traccia affine $C_y$ di $\overline{C}$ in questa carta è data dall'equazione

$$F(x,1,z)=3x^2-4x^3-3x^2z+z^2-z^3=0.$$

Il termini omogeneo di grado minimo è dato da $3x^2+z^2$, da cui segue che $m_P(\overline{C})=m_{P_y}(C_y)=2$, mentre le tangenti principali sono date dalla fattorizzazione del termini omogeneo di grado minimo:

$$\left\{x\sqrt{3}+iz=0\right\}, \quad \left\{x\sqrt{3}-iz=0\right\}.$$

(2) I punti di flesso di $\overline{C}$ sono i punti non-singolari che annullano l'hessiana $H_F$. L'equazione di quest'ultima si ottiene annullando il determinante della matrice delle derivate seconde di $F$:

$$H_F(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} 6y-24x-6z & 6x & -6x \\ 6x & 0 & 2z \\ -6x & 2z & 2y-6z \end{pmatrix} = 24(4xz^2-3x^2y+3x^2z-yz^2+z^3)=0$$

I punti di flesso cercati allora sono soluzione del sistema

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} 3x^2y-4x^3-3x^2z+yz^2-z^3=0 \\ 4xz^2-3x^2y+3x^2z-yz^2+z^3=0 \end{cases}.$$

Riscriviamo la seconda equazione di $(\star\star)$ come

$$4xz^2-3x^2y+3x^2z-yz^2+z^3 = 4xz^2-4x^3-F(x_0,x_1,x_2)=0.$$

Allora possiamo ridurre il sistema $(\star\star)$ al seguente:

$$\begin{cases} 3x^2y-4x^3-3x^2z+yz^2-z^3=0 \\ 4x\left(z^2-x^2\right)=0 \end{cases}$$

che affrontiamo per casi. Se $x=0$, allora la prima equazione diventa

$$z^2(y-z)=0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} z=0 \quad \rightsquigarrow \quad P=[0,1,0] \text{ che non va bene perché singolare,} \\ y=z \quad \rightsquigarrow \quad A=[0,1,1]. \end{cases}$$

D'altra parte, se

$$x=z \quad \rightsquigarrow \quad 4z^2(y-2z)=0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} z=0 \quad \rightsquigarrow \quad P \text{ che non va bene perché singolare,} \\ y=2z \quad \rightsquigarrow \quad B=[1,2,1], \end{cases}$$

$$x=-z \quad \rightsquigarrow \quad 4yz^2=0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} z=0 \quad \rightsquigarrow \quad P \text{ che non va bene perché singolare,} \\ y=0 \quad \rightsquigarrow \quad C=[-1,0,1]. \end{cases}$$

(3) Per prima cosa mostriamo che $A,B,C$ sono allineati: infatti $2A=B+C$. La retta $L$ che contiene $A$ e $B$ è data dall'equazione

$$x-y+z=0$$

e visto che contiene anche $C$, questa è proprio l'equazione della retta cercata. $\square$