Curve Celebri

Marco Andreatta

Dipartimento di Matematica

Torino, Settembre, 2012

Voce curve su Treccani

Enciclopedia Nazionale Treccani, voce *Curve* redatta da F. Enriques.

Voce curve su Treccani

Enciclopedia Nazionale Treccani, voce *Curve* redatta da F. Enriques.

Voce curve su Treccani

Enciclopedia Nazionale Treccani, voce *Curve* redatta da F. Enriques.

lineo (nella posizione P) considerando l'angolo della tangente a C in P con la tangente in un punto vicino P_1, dividendolo per l'arco PP_1, e passando al limite per P_1 tendente a P. Si definisce così una *prima curvatura* $1/r$, o *flessione*, di C in P; r ne è il *raggio di prima curvatura* o *di flessione*; r è pure il raggio del *circolo osculatore*, il quale sta nel piano osculatore (v. CURVE) e si definisce mediante tre punti di C che tendono a P; la retta perpendicolare al piano osculatore nel centro di detto circolo è l'*asse di curvatura*, ed è la posizione limite della retta comune ai piani normali a C in P e P_1 quando P_1 tende a P su C. La stessa costruzione, applicata ai piani osculatori di C anziché alle tangenti, cioè, che fa lo stesso, alle *binormali* di C, che sono le perpendicolari ai piani osculatori nei rispettivi punti di C, conduce a definire una *seconda curvatura*, o *torsione* $1/\varrho$, di C in P, che sarebbe nulla per una curva piana (perché allora il piano osculatore è fisso, e coincide col piano della curva), e che misura la rapidità con cui C si scosta in P dall'andamento piano; ϱ è il *raggio di seconda curvatura*, o *di torsione*, di C in P. Ripetendo ancora la stessa costruzione per le normali principali di C si trova una *curvatura totale* $1 : R$, che non dà nulla di nuovo, perché $1 : R^2 = 1 : r^2 + 1 : \varrho^2$. La linea C è nota di forma e di grandezza quando ne siano date le *equazioni intrinseche* $r = r(s)$, $\varrho = \varrho(s)$, che esprimono r, ϱ in funzione dell'arco s.

Si può giudicare della curvatura d'una superficie S in un suo punto P conoscendo quella delle linee tracciate su S e uscenti da P nelle varie direzioni; basta anzi considerare le *sezioni normali*, cioè le linee piane che si hanno tagliando S coi piani che passano per la normale n ad S in P; occorre però scegliere su n un senso positivo, e quindi attribuire un segno + o — al raggio di curvatura R di una sezione normale secondoché essa è concava, in P, dalla parte della normale positiva oppure dalla parte opposta. Studiando allora come varia R al variare della sezione normale corrispondente, si trova che R ammette un valor massimo ed un valor minimo (da intendersi in senso relativo), R_1 e R_2; e questi due valori spettano a due sezioni normali fra loro perpendicolari, le *sezioni normali principali*; la curvatura $1/R$ della sezione normale che fa l'angolo ϑ con la prima delle due sezioni normali principali è espressa mediante le due curvature principali $1/R_1$ e $1/R_2$ dalla formula (di Eulero): $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\vartheta}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{R_2}$. Il prodotto $K = 1/(R_1R_2)$ si chiama la *curvatura totale* di S in P (K. F. Gauss, 1827). La forma di S in un piccolo intorno di P dipende dal segno di K; secondoché $K \gtrless 0$, cioè secondoché i segni di R_1 e R_2 sono eguali o opposti, detta forma è quella di un ellissoide o di un iperboloide ad una falda. Come caso intermedio, se $K = 0$, cioè se è nulla in P una delle curvature principali, S ha in P la forma di un cilindro. Nei tre casi P si dice rispettivamente *punto ellittico*, *iperbolico*, *parabolico*. Il valore di K non muta se S si flette, come se fosse un tessuto flessibile e inestensibile, senza strappi né stiramenti né contrazioni. Si può dare di K il seguente significato intrinseco: considerato su S un *triangolo geodetico*, ossia un triangolo i cui lati siano linee geodetiche, la differenza tra la somma degli angoli del triangolo e π (*eccesso geodetico* del triangolo) vale $\int K d\sigma$ esteso all'area del triangolo (teor. di Gauss). In particolare, sulle *superficie a curvatura totale costante*, come il piano, la sfera e la pseudosfera, K è il rapporto tra l'eccesso e l'area di un triangolo geodetico.

In varie questioni occorre la *curvatura media* di una superficie: $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Essa è nulla per le *superficie ad area minima* (v. SUPERFICIE: Superficie notevoli).

Si può estendere (Riemann, 1854) la nozione della curvatura a una varietà V con più di tre dimensioni, sulla quale si suppone dato un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e assegnato inoltre l'*elemento lineare*, ossia l'espressione del quadrato ds^2 della distanza infinitesima ds di due punti di V infinitamente vicini e di coordinate $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e $u_1 + du_1, u_2 + du_2, \ldots, u_n + du_n$:

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

In tali ipotesi sono definite su V le linee geodetiche; sicché se si prendono due geodetiche uscenti da un punto $P(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di V secondo due direzioni distinte, che vadano da P ai punti infinitamente vicini $u_1 + du_1, \ldots, u_n + du_n$ e $u_1 + \delta u_1, \ldots, u_n + \delta u_n$, riesce definita una *superficie geodetica* S uscente da P, ossia la superficie ricoperta dalle geodetiche uscenti da P nelle direzioni che vanno da P a tutti i punti $u_1 + \lambda du_1 + \mu\delta u_1, \ldots, u_n + \lambda du_n + \mu\delta u_n$; la curvatura totale K di S in P dipende in generale da P e da S, e si chiama la *curvatura di V nel punto P e secondo la giacitura della superficie S*. Se, per ogni singola posizione di P su V, essa non dipende dalla superficie geodetica F che si è fatta passare per P, cioè se essa è *localmente* costante, allora essa riesce indipendente anche da P e ovunque costante su V, la quale si chiama allora una varietà a curvatura costante (teor. di F. Schur).

BIBL.: Oltre i trattati di geometria differenziale, ad es. di L. Bianchi, di G. Darboux, di W. Blaschke, ecc., si veda anche: T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, redatte da E. Persico, Roma 1925, cap. VII. E. G. T.

CURVE. – Nell'uso comune della parola, «curva» significa linea non retta e non composta di linee rette. Già Parmenide d'Elea, secondo Proclo nel *Commento all'Euclide*, distingueva le linee in rette, curve e miste. Ma nell'evoluzione del linguaggio matematico, che tende sempre ad eliminare le eccezioni affermando una veduta di continuità, la parola «curva» è divenuta sinonimo di «linea», ritenendosi dunque la retta come caso particolare della curva. Gli antichi Greci hanno conosciuto diverse specie di curve notevoli, oltre il cerchio: in primo luogo le coniche, e poi le curve d'ordine superiore usate per la soluzione del problema della trisezione dell'angolo o della duplicazione del cubo, cissoide di Diocle e concoide di Nicomede, e poi ancora la quadratrice di Ippia e Dinostrato, la spirale d'Archimede, ecc. Queste curve hanno offerto occasione a trattare diversi problemi (concernenti le tangenti, i massimi e minimi), che la geometria moderna ha risoluto in una maniera generale, e che stanno alla base del calcolo differenziale.

1. *Sulla definizione di curva.* – Nell'antica scuola di Pitagora (fondata il 540 a. C.) la linea si pensava costituita di punti-monadi, corpiccioli elementari di piccola estensione: da questa veduta, che risponde ad una conoscenza empirica non ancora razionalizzata, traevano i Pitagorici diverse conseguenze importanti, e in primo luögo la possibilità della misura delle linee. Ma la teoria andò incontro ad una crisi in seguito alla scoperta degl'incommensurabili, fatta nella stessa scuola.

Si approfondì allora dagli Eleati (Parmenide e Zenone d'Elea) l'analisi del concetto degli enti geometrici, e si riuscì a capire che essi hanno un significato puramente ideale: il punto è senza estensione, la linea non si ottiene sommando dei punti ed è pura lunghezza senza larghezza, la superficie non ha spessore, ecc.

La discussione intorno all'esistenza di tali figure matematiche era viva in Grecia nella seconda metà del sec. V a. C. Sofisti, come Protagora d'Abdera, sostenevano che le vere linee hanno una certa larghezza e differiscono perciò dal concetto dei matematici; così il cerchio deve avere, non un punto, ma un piccolo tratto a comune con la tangente. Si trova qui una veduta empirica, cui consente Aristotele, e che sarà conservata dalla tradizione degli scettici, raccolta più tardi nel libro *Adversus geometras* di Sesto Empirico. Frattanto i filosofi razionalisti, ispirati dalle matematiche – Democrito e Platone – sostenevano, contro gli empirici, la realtà degl'Intelligibili o delle Idee: idea = *ἰδέα* significa originariamente schema o figura matematica.

I tentativi per chiarire il concetto generale della linea, nel secolo IV a. C., conducono ad alcune definizioni che ci sono riportate da Platone e Aristotele: definizione genetica della linea come luogo d'un punto che si muove, e definizione delle linee come termini delle superficie. La prima si ritrova in Proclo (ed. Friedlein 1873, p. 97) e in Pappo (ed. Hutltsch, 1877, II, p. 662). La seconda figura negli *Elementi di Euclide* (I, 6) come complemento alla I, 2 (le linee sono lunghezze senza larghezza) che, nella sua forma negativa, sta a ricordare e riassumere il risultato della già accennata polemica eleatico-pitagorica.

Le anzidette definizioni sono passate nell'insegnamento tradizionale della geometria; ma anche prima di arrivare alla critica contemporanea, il pensiero matematico doveva riconoscerne l'imprecisione e l'insufficienza. Così nell'*Encyclopédie* (nuova ed., IX, Ginevra 1777, p. 758), D'Alembert dice che la linea è un concetto fondamentale non ulteriormente spiegabile: per chiarire questo concetto generale conviene assumere come data la nozione di linee e superficie particolari, cioè della retta, del piano, ecc.

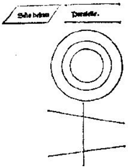
L'intero sviluppo delle matematiche moderne conduce a tale chiarimento. Ed in questo figura come essenziale il metodo della geometria analitica di Fermat e Descartes (*La géometrie*, 1637).

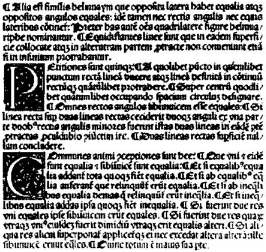
Riferiamoci per semplicità alla geometria del piano, e assumiamo in questo un sistema di assi cartesiani x, y (v. COORDINATE). La generazione meccanica della curva porta ad esprimere le coordinate d'un suo punto variabile come funzioni d'un parametro t (tempo):

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Euclide, Alessandria, 325-265 a.C.

Euclide, Alessandria, 325-265 a.C.





Alia est similis helmuaym que opposita latera habet equalia atqz oppositos angulos equales: idē tamen nec rectis angulis nec equis lateribus cōtinet: Preter has autē oēs quadrilatere figure helmuaripphe nominantur. Equidistantes linee sunt que in eadem superficie collocate atqz in alterutram partem ptracte non conveniunt etiā si in infinitum protrahantur.

Petitiones sunt quinqz: A quolibet pūcto in quemlibet punctum rectā lineā ducere atqz lineā definitā in cōtinuū rectūqz quātūlibet protrahere. Super centrū quodlibet quātumlibet occupando spacium circulū designare. Omnes rectos angulos sibinvicem esse equales. Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoqz anguli ex una parte duob⁹ rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eādē ptē ptractas pculdubio cōiūctum iri. Duas lineas rectas supficiē nullam concludere.

Communes animi conceptiones sunt hee: Que uni et eidē sunt equalia et sibiinvicē sunt equalia: Et si equalib⁹ equalia addant tota quoqz fiēt equalia. Et si ab equalib⁹ equalia auferant que relinquūt erūt equalia. Et si ab inequalibus equalia demas q̄ relinquūt erūt inequalia. Et si inequalibus equalia addas ipsa quoqz fiēt inequalia. Si fuerint due res uni equales ipse sibiinvicem erūt equales. Si fuerint due res quarū utraqz uni⁹ eiusdēz fuerit dimidiū utraqz erit equalis alteri. Si aliqua res alicui superponat applicetqz ei nec excedat altera alterā ille sibiinvicē erunt eq̄les. Omne totum ē maius sua pte.

La retta

Una retta è un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietà:

La retta

Una retta è un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- Si estende all' infinito in due direzioni

La retta

Una retta è un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- Si estende all' infinito in due direzioni
- Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti

La retta

Una retta è un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietà:

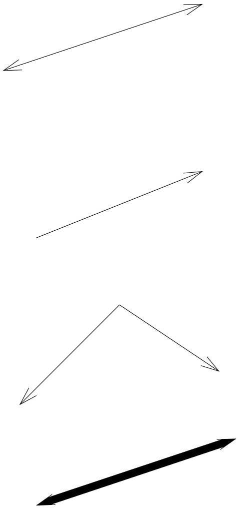
- Si estende all' infinito in due direzioni
- Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
- dati due punti su una retta il cammino più breve per andare da un punto all'altro è dato dalla retta stessa (la retta è una geodetica)

La retta

Una retta è un oggetto a priori caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- Si estende all' infinito in due direzioni
- Dati due punti distinti esiste una ed una sola retta per i due punti
- dati due punti su una retta il cammino più breve per andare da un punto all'altro è dato dalla retta stessa (la retta è una geodetica)
- se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati.

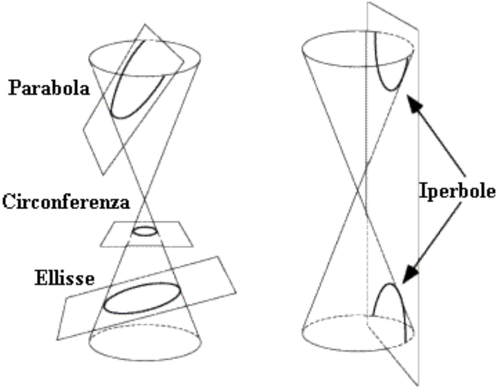
Esempio



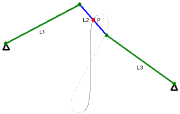
retta

non rette

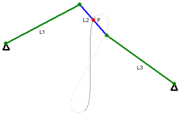
Coniche

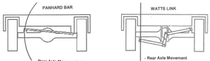


”costruire una retta”: il meccanismo di Watts (1736-1819)

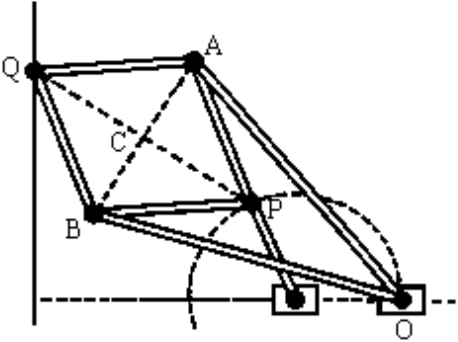


”costruire una retta”: il meccanismo di Watts (1736-1819)

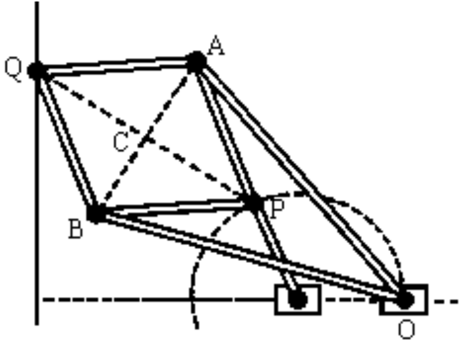




Il meccanismo di Peaucellier, 1864



Il meccanismo di Peaucellier, 1864



Alfred Bray Kempe (1849-1922) dimostrò che ogni curva algebrica può essere generata da un meccanismo appropriato.
In particolare è possibile costruire un meccanismo che genera la tua firma .

Costruzione con riga e compasso. Dai Greci a Mascheroni

Costruzione con riga e compasso. Dai Greci a Mascheroni

Mascheroni (1750-1800) nel libro *Geometria del Compasso* (Pavia, dedicato a Napoleone) provo che tutte le costruzioni euclidee con riga e compasso si possono ottenere con il solo compasso.

René Descartes, 1596-1650

e la Geometrie

I could give here several other ways of tracing and conceiving a series of curved lines, each curve more complex than any preceding one,[76] but I think the best way to group together all such curves and then classify them in order, is by recognizing the fact that all points of those curves which we may call "geometric," that is, those which admit of precise and exact measurement, must bear a definite relation[77] to all points of a straight line, and that this relation must be expressed by means of a single equation.[78] If this equation contains no term of higher degree than the rectangle of two unknown quantities, or the square of one, the curve belongs to the first and simplest class,[79] which contains only the circle, the parabola, the hyperbola, and the ellipse; but when the equation contains one or more terms of the third or fourth degree[80] in one or both of the two unknown quantities[81] (for it requires two unknown quantities to express the relation between two points) the curve belongs to the second class; and if the equation contains a term of the fifth or sixth degree in either or both of the unknown quantities the curve belongs to the third class, and so on indefinitely.

[76] "Qui seroient de plus en plus composées par degrez à l'infini." The French quotations in the footnotes show a few variants in style in different editions.

[77] That is, a relation exactly known, as, for example, that between two straight lines in distinction to that between a straight line and a curve, unless the length of the curve is known.

[78] It will be recognized at once that this statement contains the fundamental concept of analytic geometry.

[79] "Du premier & plus simple genre," an expression not now recognized. As now understood, the order or degree of a plane curve is the greatest number of points in which it can be cut by any arbitrary line, while the class is the greatest number of tangents that can be drawn to it from any arbitrary point in the plane.

[80] Grouped together because an equation of the fourth degree can always be transformed into one of the third degree.

[81] Thus Descartes includes such terms as x^2y, x^2y^2, . . as well as x^3, y^4 .....

du moins que des ſections coniques; ny ce qui peut empeſcher, qu'on ne concoiue la ſeconde, & la troiſieſme, & toutes les autres, qu'on peut deſcrire, auſſy bien que la premiere; ny par conſequent qu'on ne les recoiue toutes en meſme façon, pour ſeruir aux ſpeculations de Geometrie.

Ie pourrois mettre icy pluſieurs autres moyens pour tracer & conçeuoir des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus composées par degrés a l infini. mais pour comprendre enſemble toutes celles, qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres; ie ne ſçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt a dire qui tombent ſous quelque meſure précise & exacte, ont neceſſairement quelque rapport a tous les poins d'vne ligne droite, qui peut eſtre exprimé par quelque equation, en tous par vne meſme, Et que lorſque cete equation ne monte que iuſques au rectangle de deux quantités indeterminées, oubien au quarré d'vne meſme, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'Ellipſe qui ſoient compriſes. mais que lorſque l'equation monte iuſques a la trois ou quatrieſme dimenſion des deux, ou de l'vne des deux quantités indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point a vn autre, elle eſt du ſecond: & que lorſque l'equation monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle eſt du troiſieſme; & ainſi des autres a l'infini.

La facon de diſtinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoiſtre le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites.

Comme ſi ie veux ſçauoir de quel genre eſt la ligne E C, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection de la reigle

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x, y) : x = x(t), y = y(t)\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x, y) : x = x(t), y = y(t)\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x, y) : x = x(t), y = y(t)\}$

Esempio

Ecco tre espressioni della stessa curva, una retta:

$$\{(x, y) : 3x - 2y + 6 = 0\}$$

$$\{(x, y) : y = 3/2x + 3\}$$

$$\{(x, y) : x = 2t + 2, y = 3t\}$$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x,y):f(x,y)=0\}$
- Grafico: $\{(x,y):y=y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x,y):x=x(t),y=y(t)\}$

Si noti che la seconda definizione è la più *speciale*.

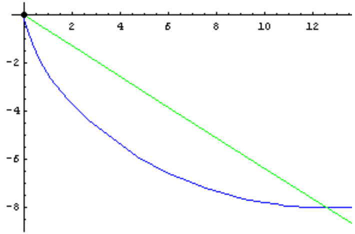
La prima è equivalente alla seconda se (e solo se) la derivata parziale $\partial f/\partial y\neq 0$ in ogni punto della curva (teorema del Dini o delle funzioni implicite)

La terza è equivalente alla seconda se (e solo se) la funzione $t\to(x(t),y(t))$ è iniettiva e $(\dot{x}(t),\dot{y}(t))\neq(0,0)$.

La questione

Problema

Dati due punti A e B in un piano verticale , determinare il cammino (i.e. la curva) lungo il quale una particella mobile M, partendo da A e scendendo unicamente sotto l'influenza del suo peso, raggiunge B nel tempo piu breve. ($\beta\rho\alpha\chi\upsilon\varsigma$ = *breve*, $\chi\rho o\nu o\varsigma$ = *tempo*)
(Joh. Bernoulli, Acta Eruditorum 1696).



Johann Bernoulli, 1667-1748

Il dibattito

Il problema non era nuovo, come fece notare Leibniz a Bernoulli: lo aveva considerato Galileo nel 1638 in *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, terza giornata, Teorema XXII*. Galileo però propose, erroneamente, che il cerchio fosse il più veloce di tutti i cammini possibili.

Il dibattito

Il problema non era nuovo, come fece notare Leibniz a Bernoulli: lo aveva considerato Galileo nel 1638 in *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, terza giornata, Teorema XXII*. Galileo però propose, erroneamente, che il cerchio fosse il più veloce di tutti i cammini possibili.

La sfida lanciata da Joh. Bernoulli fu raccolta da (almeno) 5 matematici che l'anno successivo diedero le loro soluzioni: Newton, Leibniz, de L'Höpital, Jacob Bernoulli e lo stesso Johann Bernoulli.

Il dibattito

Il problema non era nuovo, come fece notare Leibniz a Bernoulli: lo aveva considerato Galileo nel 1638 in *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, terza giornata, Teorema XXII*. Galileo però propose, erroneamente, che il cerchio fosse il più veloce di tutti i cammini possibili.

La sfida lanciata da Joh. Bernoulli fu raccolta da (almeno) 5 matematici che l'anno successivo diedero le loro soluzioni: Newton, Leibniz, de L'Höpital, Jacob Bernoulli e lo stesso Johann Bernoulli.

La soluzione proposta da Bernoulli era sicuramente la più ingegnosa ed elegante; costituita da una serie di passi successivi che andremo a descrivere nel seguito.

La soluzione di Johann Bernoulli

Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano tale che il punto A sia l' origine del riferimento, i.e. $A = (0, 0)$, e che l'asse delle y sia rivolto verso il basso.
Pensiamo inoltre che la curva ottenuta sia descritto come grafico , $y = y(x)$, o eventualmente da due equazioni parametriche, $(x(t), y(t))$, con $t \in \mathbb{R}$.

La soluzione di Joh Bernoulli

Passo 1. Il primo passo, dovuto a Galileo, consiste nel provare che, in ogni momento della discesa, vale l'identità:

$$v = \sqrt{2gy},$$

dove v è la velocità della particella e y la sua coordinata ascissa, mentre g è l'accellerazione di gravità.

La soluzione di Joh Bernoulli

Passo 1. Il primo passo, dovuto a Galileo, consiste nel provare che, in ogni momento della discesa, vale l'identità:

$$v = \sqrt{2gy},$$

dove v è la velocità della particella e y la sua coordinata ascissa, mentre g è l'accellerazione di gravità.

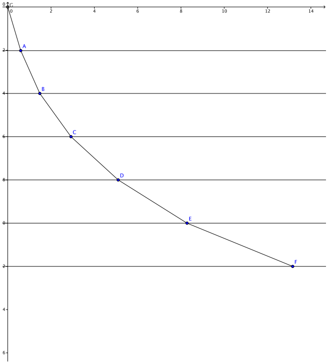
Questa identità si ricava dalla fisica, ad esempio dalla *legge della conservazione dell'energia* : $E_c + E_p = c$,
dove $E_c = 1/2mv^2$ è l'energia cinetica, $E_p = -mgy$ è l'energia potenziale e c una costante.
Si noti che, per la nostra scelta del riferimento cartesiano con $A = (0, 0)$ e assumendo la particella ferma in A, si ha che $E_c = E_p = c = 0$.

La soluzione di Joh Bernoulli

Passo 2. Bernoulli quindi *discretizza* il problema: ovvero divide il piano in strisce orizzontali e assume che in ogni striscia la particella si muove in linea retta. La curva in questa approssimazione si chiama *lineare a tratti*.

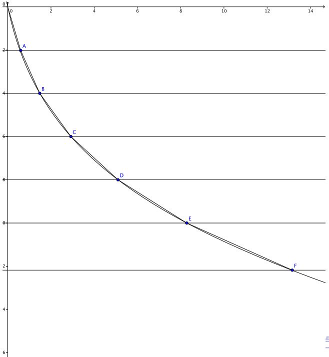
La soluzione di Joh Bernoulli

Passo 2. Bernoulli quindi *discretizza* il problema: ovvero divide il piano in strisce orizzontali e assume che in ogni striscia la particella si muove in linea retta. La curva in questa approssimazione si chiama *lineare a tratti*.



La soluzione di Joh Bernoulli

Passo 2. Bernoulli quindi *discretizza* il problema: ovvero divide il piano in strisce orizzontali e assume che in ogni striscia la particella si muove in linea retta. La curva in questa approssimazione si chiama *lineare a tratti*.
Al limite, quando le strisce diventano infinitamente piccole, tende alla curva cercata.



Principio di Fermat

Passo 3. Il problema, nel caso della curva lineare a tratti, consiste nel determinare l'angolo che ogni tratto rettilineo forma con la retta delle ascisse. Per questo Bernoulli fa uso della legge sulla rifrazione ottica detta di Schnell, o anche principio di Fermat; la luce naturalmente segue il cammino più breve e la sua traiettoria soggiace a questo principio.

Principio di Fermat

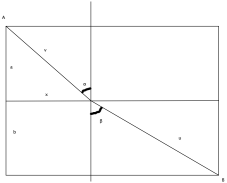
Teorema

Sia v la velocità in una striscia con angolo α e u la velocità nella striscia successiva con angolo β. Vale l'uguaglianza

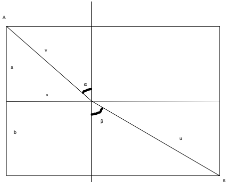
$$v/sin\alpha = u/sin\beta.$$

Nel limite quindi, detto α l'angolo che la tangente alla curva nel punto $P = (x, y)$ forma con la verticale e v la velocità della particella in P, si ha che

$$v/sin\alpha = cost.$$

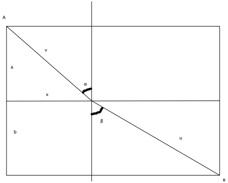


Prova del Principio di Fermat



Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

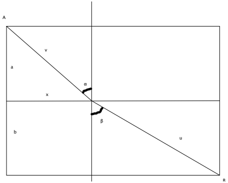
Prova del Principio di Fermat



Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{u}$$

Prova del Principio di Fermat

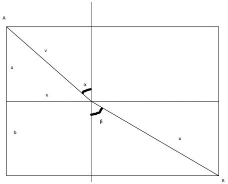


Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{u}$$

$$\dot{T}(x) = \frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{u}\frac{(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{sen\alpha}{v} - \frac{sen\beta}{u}$$

Prova del Principio di Fermat



Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{u}$$

$$\dot{T}(x) = \frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{u}\frac{(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{sen\alpha}{v} - \frac{sen\beta}{u}$$

$T(x)$ è minimo se $\dot{T}(x) = 0$, i.e. se $\frac{sen\alpha}{v} - \frac{sen\beta}{u} = 0$.

Osservazioni geometrico/algebriche

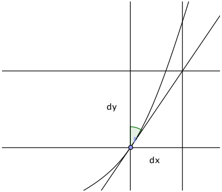
Lemma

Data una curva piana $y = y(x)$, sia α l'angolo che la tangente forma con la parallela all'asse delle ascisse. Vale l'identità

$$\dot{y} := \frac{dy}{dx} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}.$$

In particolare vale

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} = sen\alpha.$$



Equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 4.

- Partendo dal Principio di Fermat, $v/sin\alpha = K$,
- inserendo l' identità di Galileo, $v = \sqrt{2gy}$,
- e la determinazione del seno con il lemma, $\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}} = sen\alpha$,

otteniamo:

Equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 4.

- Partendo dal Principio di Fermat, $v/sin\alpha = K$,
- inserendo l' identità di Galileo, $v = \sqrt{2gy}$,
- e la determinazione del seno con il lemma, $\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}} = sen\alpha$,

otteniamo:

$$\sqrt{1 + (\dot{y})^2}.\sqrt{2gy} = K$$

ovvero

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = \sqrt{\frac{(c-y)}{y}},$$

o anche

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$$

con c costante opportuna che dipende da K e g.

Soluzione della equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 5. Consideriamo la sostituzione

$$y(u) = c\ sen^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} cos\ 2u.$$

Soluzione della equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 5. Consideriamo la sostituzione

$$y(u) = c\ sen^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} cos\ 2u.$$

Per la regola della derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy} . \frac{dy}{du},$$

e quindi, dopo qualche semplice calcolo,

$$\frac{dx}{du} = 2c\ sen^2 u.$$

Soluzione della equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 5. Consideriamo la sostituzione

$$y(u) = c\ sen^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} cos\ 2u.$$

Per la regola della derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy} . \frac{dy}{du},$$

e quindi, dopo qualche semplice calcolo,

$$\frac{dx}{du} = 2c\ sen^2 u.$$

Integrando quindi si ottiene che

$$x(u) = \frac{c}{2}\ 2u - \frac{c}{2} sen\ 2u.$$

La Cicloide

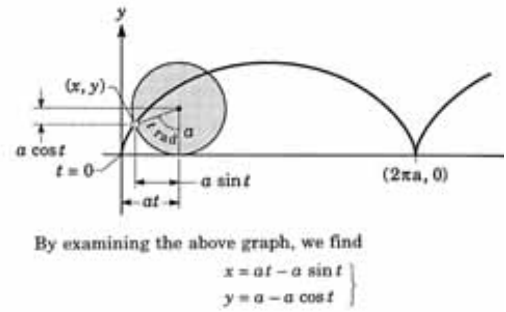
Definizione

La cicloide è il luogo percorso da un punto sulla circonferenza di un cerchio di raggio a che rotola lungo una linea retta.

La Cicloide

Definizione

La cicloide è il luogo percorso da un punto sulla circonferenza di un cerchio di raggio a che rotola lungo una linea retta.



Commento alla Bernoulli

Passo 6. *”ex qua concludo Curvam Brachystochronam esse Cycloidem vulgarem”*

Il pendolo tautocrono di Huygens

Nel 1673 Huygens nel libro *Horologium Oscillatorium* si pone il problema di modificare la traiettoria di un pendolo in modo tale che il periodo sia indipendente dalla ampiezza iniziale.
(tautocrono dal greco tauto = lo stesso e chronos = tempo)

Il pendolo tautocrono di Huygens

Nel 1673 Huygens nel libro *Horologium Oscillatorium* si pone il problema di modificare la traiettoria di un pendolo in modo tale che il periodo sia indipendente dalla ampiezza iniziale.
(tautocrono dal greco tauto = lo stesso e chronos = tempo)

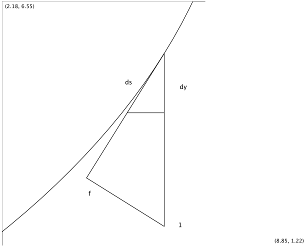
La sua idea fu di impostare una traiettoria tale che la forza di accelerazione sia proporzionale in ogni punto alla lunghezza d' arco. Ovvero

$$\ddot{s} + Ks = 0$$

(equazione differenziale del secondo ordine)

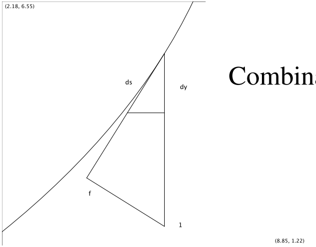
Christiaan Huygens, 1629 - 1695

Alla ricerca della tautocrona



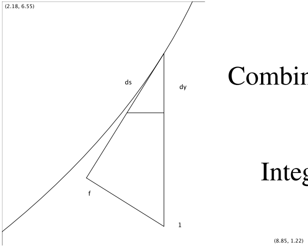
Per la similitudine dei due triangoli nel disegno si ha $f = -dy/ds$.

Alla ricerca della tautocrona



Per la similitudine dei due triangoli nel disegno si ha $f = -dy/ds$.
Combinando l'equazione di Huygens, $\ddot{s} + Ks = 0$,
e la legge della dinamica $f = \ddot{s}$ si ha che
a) $dy = K \cdot sds$.

Alla ricerca della tautocrona



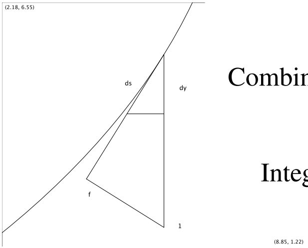
Per la similitudine dei due triangoli nel disegno si ha $f = -dy/ds$.
Combinando l'equazione di Huygens, $\ddot{s} + Ks = 0$, e la legge della dinamica $f = \ddot{s}$ si ha che

a) $dy = K \cdot s ds$.

Integrando, ponendo $s = 0$ per $y = 0$, si ottiene $y = \frac{K}{2} \cdot s^2$ ovvero

b) $s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$

Alla ricerca della tautocrona



Per la similitudine dei due triangoli nel disegno si ha $f = -dy/ds$. Combinando l'equazione di Huygens, $\ddot{s} + Ks = 0$, e la legge della dinamica $f = \ddot{s}$ si ha che

a) $dy = K \cdot s ds$.

Integrando, ponendo $s = 0$ per $y = 0$, si ottiene $y = \frac{K}{2} \cdot s^2$ ovvero

b) $s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$

Inserendo la b) nella a) si ottiene

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2K}\sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ e quindi } \sqrt{\frac{(c-y)}{y}}dy = dx$$

Commento alla Bernoulli - due

A meno di una traslazione di y questa è esattamente l'equazione della cicloide, come Joh. Bernoulli stesso notò (1697):

Commento alla Bernoulli - due

A meno di una traslazione di y questa è esattamente l'equazione della cicloide, come Joh. Bernoulli stesso notò (1697):

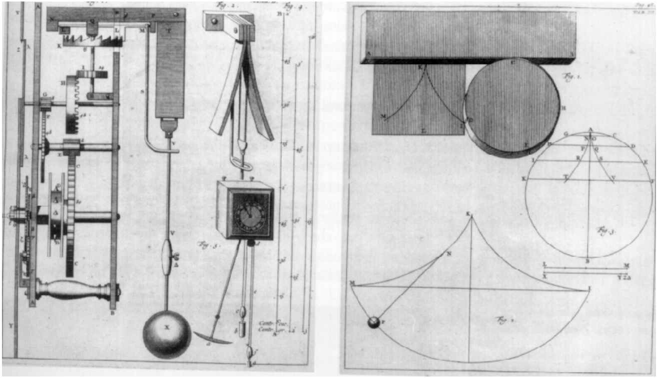
"animo revolvens inexpectatam illam identitatem Tautochronae Hugeniae nostra que Brachystochronae"

Ulteriori proprietà della cicloide

L' evoluta e l'evolvente di una cicloide è ancora una cicloide.

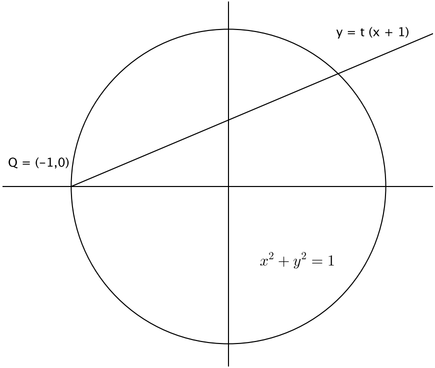
Ulteriori proprietà della cicloide

L' evoluta e l'evolvente di una cicloide è ancora una cicloide.



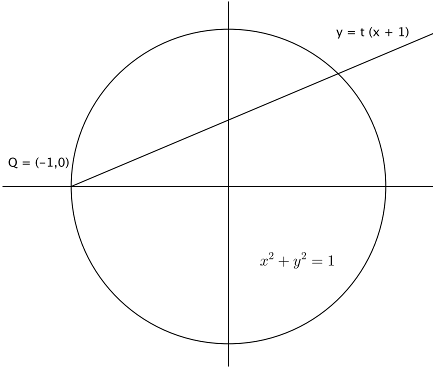
Una parametrizzazion razionale del cerchio: Diofanto, circa 250 d.C.

Consideriamo il cerchio unitario e la retta generica per $Q = (-1, 0)$:



Una parametrizzazion razionale del cerchio: Diofanto, circa 250 d.C.

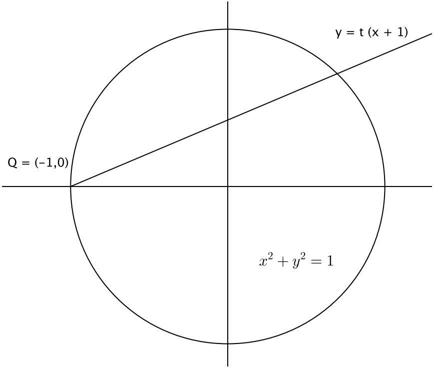
Consideriamo il cerchio unitario e la retta generica per $Q = (-1, 0)$:



L'intersezione della retta con la circonferenza è data da:
$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

Una parametrizzazion razionale del cerchio: Diofanto, circa 250 d.C.

Consideriamo il cerchio unitario e la retta generica per $Q = (-1, 0)$:



L'intersezione della retta con la circonferenza è data da:

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

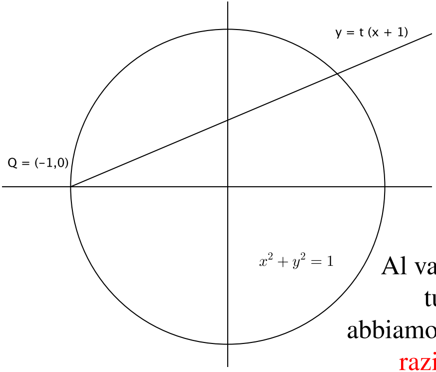
Risolvendo in x, si ottiene

$$x = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}$$

$$y = \frac{2t}{(1+t^2)}$$

Una parametrizzazion razionale del cerchio: Diofanto, circa 250 d.C.

Consideriamo il cerchio unitario e la retta generica per $Q = (-1, 0)$:



L'intersezione della retta con la circonferenza è data da:

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

Risolvendo in x, si ottiene

$$x = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}$$

$$y = \frac{2t}{(1+t^2)}$$

Al variare di t nei reali si ottengono tutti i punti della circonferenza: abbiamo quindi una parametrizzazione razionale della curva $x^2 + y^2 = 1$.

Punti razionali sul cerchio; terne pitagoriche

In particolare, al variare di $t = \frac{p}{q}$ nei razionali, i punti

$$x = \frac{(1 - (\frac{p}{q})^2)}{(1 + (\frac{p}{q})^2)} \quad y = \frac{2(\frac{p}{q})}{(1 + (\frac{p}{q})^2)}$$

rappresentano tutte e sole le soluzioni razionali dell'equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Punti razionali sul cerchio; terne pitagoriche

In particolare, al variare di $t = \frac{p}{q}$ nei razionali, i punti

$$x = \frac{(1 - (\frac{p}{q})^2)}{(1 + (\frac{p}{q})^2)} \quad y = \frac{2(\frac{p}{q})}{(1 + (\frac{p}{q})^2)}$$

rappresentano tutte e sole le soluzioni razionali dell'equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Quindi

$$a = (p^2 - q^2)r, \quad b = 2pqr, \quad c = (p^2 + q^2)r$$

sono tutte e sole le soluzioni intere dell'equazione di Pitagora

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Altre parametrizzazioni di curve

Consideriamo ora una curva del tipo $y^2 = p(x)$, $p(x)$ polinomio. Le cubiche si scrivono sempre in questa forma, con grado di $p = 3$ (Newton).

Altre parametrizzazioni di curve

Consideriamo ora una curva del tipo $y^2 = p(x)$, $p(x)$ polinomio.
Le cubiche si scrivono sempre in questa forma, con grado di $p = 3$ (Newton).

Consideriamo quindi la funzione $u = g^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(t)}}\,\mathrm{d}t$.

Ovviamente $x = g(u)$.

Altre parametrizzazioni di curve

Consideriamo ora una curva del tipo $y^2 = p(x)$, $p(x)$ polinomio.
Le cubiche si scrivono sempre in questa forma, con grado di $p = 3$ (Newton).

Consideriamo quindi la funzione $u = g^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(t)}}\,\mathrm{d}t$.

Ovviamente $x = g(u)$.

Senza integrare, calcoliamo ora la derivata di g in u:

$$\dot{g}(u) = \frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}$$

e anche

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(t)}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} = \frac{1}{y}$$

Altre parametrizzazioni di curve

Consideriamo ora una curva del tipo $y^2 = p(x)$, $p(x)$ polinomio.
Le cubiche si scrivono sempre in questa forma, con grado di $p = 3$ (Newton).

Consideriamo quindi la funzione $u = g^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(t)}}\,\mathrm{d}t$.

Ovviamente $x = g(u)$.

Senza integrare, calcoliamo ora la derivata di g in u:

$$\dot{g}(u) = \frac{dx}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}$$

e anche

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(t)}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} = \frac{1}{y}$$

Dunque $x = g(u)$ e $y = \dot{g}(u)$ parametrizzano la curva $y^2 = p(x)$.

... applicata alla circonferenza

Nel caso della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, ovvero $y^2 = 1 - x^2$, abbiamo $u = g^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$.

... applicata alla circonferenza

Nel caso della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, ovvero $y^2 = 1 - x^2$, abbiamo $u = g^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Quindi $g^{-1}(x) = arcsin(x)$, dunque

$x = g(u) = sen(u)$ e $y = \dot{g}(u) = cos(u)$.

Integrali, funzioni e curve ellittiche

Integrali del tipo $\int R[t, \sqrt{p(t)}]\mathrm{d}t$, dove R è una funzione razionale e p un polinomio di grado 3 o 4 senza fattori multipli, si dicono integrali ellittici.

Integrali, funzioni e curve ellittiche

Integrali del tipo $\int R[t, \sqrt{p(t)}]\mathrm{d}t$, dove R è una funzione razionale e p un polinomio di grado 3 o 4 senza fattori multipli, si dicono integrali ellittici.

Appaiono nelle formule per calcolare le lunghezze degli archi di ellisse, da questo il loro nome.

Integrali, funzioni e curve ellittiche

Integrali del tipo $\int R[t, \sqrt{p(t)}]\mathrm{d}t$, dove R è una funzione razionale e p un polinomio di grado 3 o 4 senza fattori multipli, si dicono integrali ellittici.

Appaiono nelle formule per calcolare le lunghezze degli archi di ellisse, da questo il loro nome. Leibniz considera una soluzione propria di un problema integrale della forma $\int f(x)\mathrm{d}x$ una funzione nota $g(x)$ tale che $\dot{g}(x) = f(x)$.

Integrali, funzioni e curve ellittiche

Integrali del tipo $\int R[t, \sqrt{p(t)}]\mathrm{d}t$, dove R è una funzione razionale e p un polinomio di grado 3 o 4 senza fattori multipli, si dicono integrali ellittici.

Appaiono nelle formule per calcolare le lunghezze degli archi di ellisse, da questo il loro nome. Leibniz considera una soluzione propria di un problema integrale della forma $\int f(x)\mathrm{d}x$ una funzione nota $g(x)$ tale che $\dot{g}(x) = f(x)$.

Nel 1694 James Bernoulli congetturò che questo fosse impossibile per gli integrali ellittici; la congettura fu confermata nel 1833 da Liouville (molti integrali non hanno soluzione alla Leibniz).

Integrali, funzioni e curve ellittiche

Integrali del tipo $\int R[t, \sqrt{p(t)}]\mathrm{d}t$, dove R è una funzione razionale e p un polinomio di grado 3 o 4 senza fattori multipli, si dicono integrali ellittici.

Appaiono nelle formule per calcolare le lunghezze degli archi di ellisse, da questo il loro nome. Leibniz considera una soluzione propria di un problema integrale della forma $\int f(x)\mathrm{d}x$ una funzione nota $g(x)$ tale che $\dot{g}(x) = f(x)$.

Nel 1694 James Bernoulli congetturò che questo fosse impossibile per gli integrali ellittici; la congettura fu confermata nel 1833 da Liouville (molti integrali non hanno soluzione alla Leibniz).

Nel frattempo però molti matematici avevano dimostrato molte belle proprietà di questi integrali e delle loro funzioni inverse.

Integrali, funzioni e curve ellittiche

Integrali del tipo $\int R[t, \sqrt{p(t)}]\mathrm{d}t$, dove R è una funzione razionale e p un polinomio di grado 3 o 4 senza fattori multipli, si dicono integrali ellittici.

Appaiono nelle formule per calcolare le lunghezze degli archi di ellisse, da questo il loro nome. Leibniz considera una soluzione propria di un problema integrale della forma $\int f(x)\mathrm{d}x$ una funzione nota $g(x)$ tale che $\dot{g}(x) = f(x)$.

Nel 1694 James Bernoulli congetturò che questo fosse impossibile per gli integrali ellittici; la congettura fu confermata nel 1833 da Liouville (molti integrali non hanno soluzione alla Leibniz).

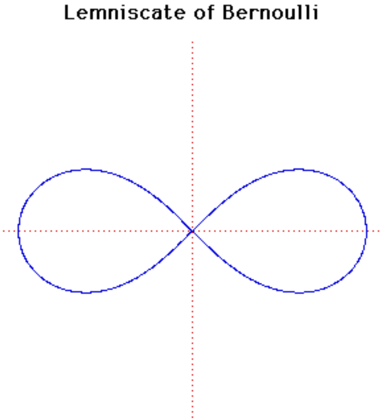
Nel frattempo però molti matematici avevano dimostrato molte belle proprietà di questi integrali e delle loro funzioni inverse.

Le funzioni inverse di integrali ellittici si dicono funzioni ellittiche. Le curve parametrizzate da funzioni ellittiche si dicono curve ellittiche.

La Lemniscata

La Lemniscata di Bernoulli è la curva di quarto grado data dall'equazione

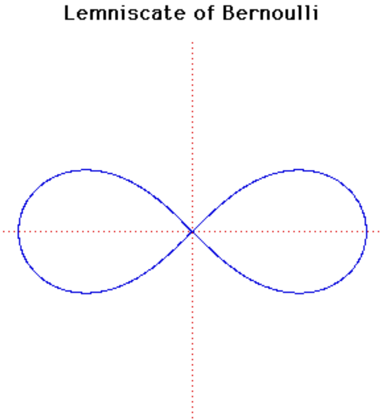
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$



La Lemniscata

La sua lunghezza è data dall' integrale ellittico

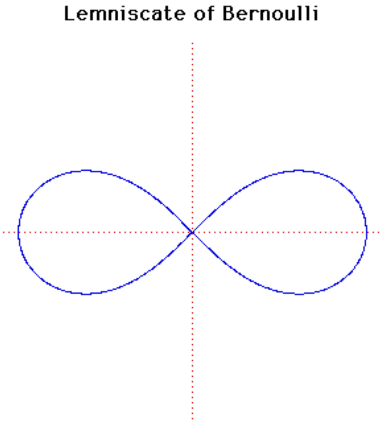
$$4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t.$$



L'arco di lemniscata

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t$$

determina l'arco di Lemniscata fino ad x.



Fagnano1682-1766

Fagnano, matematico di Senigallia, nel 1718 con una ingegnosa sostituzione dimostrò la formula

$$2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x\sqrt{1-x^4}/(1+x^4)} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t.$$

Fagnano1682-1766

Fagnano, matematico di Senigallia, nel 1718 con una ingegnosa sostituzione dimostrò la formula

$$2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2x\sqrt{1-x^4}/(1+x^4)} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,\mathrm{d}t.$$

La duplicazione dell' arco di Lemniscata si può ottenere con riga e compasso!