L'idea di curva e superficie

dall'astrazione matematica alla realizzazione fisica

Marco Andreatta

Università di Trento, Dipartimento di Matematica
MUSE, Museo delle Scienze

Trieste, settembre 2017

Voce curve su Treccani

Enciclopedia Nazionale Treccani, voce *Curve* redatta da F. Enriques.

Voce curve su Treccani

Enciclopedia Nazionale Treccani, voce *Curve* redatta da F. Enriques.

Voce curve su Treccani

Enciclopedia Nazionale Treccani, voce *Curve* redatta da F. Enriques.

lineo (nella posizione P) considerando l'angolo della tangente a C in P con la tangente in un punto vicino P_1, dividendolo per l'arco PP_1, e passando al limite per P_1 tendente a P. Si definisce così una *prima curvatura* $1/r$, o *flessione*, di C in P; r ne è il *raggio di prima curvatura* o *di flessione*; r è pure il raggio del *circolo osculatore*, il quale sta nel piano osculatore (v. CURVE) e si definisce mediante tre punti di C che tendono a P; la retta perpendicolare al piano osculatore nel centro di detto circolo è l'*asse di curvatura*, ed è la posizione limite della retta comune ai piani normali a C in P e P_1 quando P_1 tende a P su C. La stessa costruzione, applicata ai piani osculatori di C anziché alle tangenti, cioè, che fa lo stesso, alle *binormali* di C, che sono le perpendicolari ai piani osculatori nei rispettivi punti di C, conduce a definire una *seconda curvatura*, o *torsione* $1/\varrho$, di C in P, che sarebbe nulla per una curva piana (perché allora il piano osculatore è fisso, e coincide col piano della curva), e che misura la rapidità con cui C si scosta in P dall'andamento piano; ϱ è il *raggio di seconda curvatura*, o *di torsione*, di C in P. Ripetendo ancora la stessa costruzione per le normali principali di C si trova una *curvatura totale* $1 : R$, che non dà nulla di nuovo, perché $1 : R^2 = 1 : r^2 + 1 : \varrho^2$. La linea C è nota di forma e di grandezza quando ne siano date le *equazioni intrinseche* $r = r(s)$, $\varrho = \varrho(s)$, che esprimono r, ϱ in funzione dell'arco s.

Si può giudicare della curvatura d'una superficie S in un suo punto P conoscendo quella delle linee tracciate su S e uscenti da P nelle varie direzioni; basta anzi considerare le *sezioni normali*, cioè le linee piane che si hanno tagliando S coi piani che passano per la normale n ad S in P; occorre però scegliere su n un senso positivo, e quindi attribuire un segno $+$ o $-$ al raggio di curvatura R di una sezione normale secondoché essa è concava, in P, dalla parte della normale positiva oppure dalla parte opposta. Studiando allora come varia R al variare della sezione normale corrispondente, si trova che R ammette un valor massimo ed un valor minimo (da intendersi in senso relativo), R_1 e R_2; e questi due valori spettano a due sezioni normali fra loro perpendicolari, le *sezioni normali principali*; la curvatura $1/R$ della sezione normale che fa l'angolo ϑ con la prima delle due sezioni normali principali è espressa mediante le due curvature principali $1/R_1$ e $1/R_2$ dalla formula (di Eulero): $\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\vartheta}{R_1} + \frac{\mathrm{sen}^2\vartheta}{R_2}$. Il prodotto $K = 1/(R_1R_2)$ si chiama la *curvatura totale* di S in P (K. F. Gauss, 1827). La forma di S in un piccolo intorno di P dipende dal segno di K; secondoché $K \gtrless 0$, cioè secondoché i segni di R_1 e R_2 sono eguali o opposti, detta forma è quella di un ellissoide o di un iperboloide ad una falda. Come caso intermedio, se $K = 0$, cioè se è nulla in P una delle curvature principali, S ha in P la forma di un cilindro. Nei tre casi P si dice rispettivamente *punto ellittico*, *iperbolico*, *parabolico*. Il valore di K non muta se S si flette, come se fosse un tessuto flessibile e inestensibile, senza strappi né stiramenti né contrazioni. Si può dare di K il seguente significato intrinseco: considerato su S un *triangolo geodetico*, ossia un triangolo i cui lati siano linee geodetiche, la differenza tra la somma degli angoli del triangolo e π (*eccesso geodetico* del triangolo) vale $\int K d\sigma$ esteso all'area del triangolo (teor. di Gauss). In particolare, sulle *superficie a curvatura totale costante*, come il piano, la sfera e la pseudosfera, K è il rapporto tra l'eccesso e l'area di un triangolo geodetico.

In varie questioni occorre la *curvatura media* di una superficie: $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Essa è nulla per le *superficie ad area minima* (v. SUPERFICIE: Superficie notevoli).

Si può estendere (Riemann, 1854) la nozione della curvatura a una varietà V con più di tre dimensioni, sulla quale si suppone dato un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e assegnato inoltre l'*elemento lineare*, ossia l'espressione del quadrato ds^2 della distanza infinitesima ds di due punti di V infinitamente vicini e di coordinate $u_1, u_2, \ldots, u_n$ e $u_1 + du_1, u_2 + du_2, \ldots, u_n + du_n$:

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

In tali ipotesi sono definite su V le linee geodetiche; sicché se si prendono due geodetiche uscenti da un punto $P(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ di V secondo due direzioni distinte, che vadano da P ai punti infinitamente vicini $u_1 + du_1, \ldots, u_n + du_n$ e $u_1 + \delta u_1, \ldots, u_n + \delta u_n$, riesce definita una *superficie geodetica* S uscente da P, ossia la superficie ricoperta dalle geodetiche uscenti da P nelle direzioni che vanno da P a tutti i punti $u_1 + \lambda du_1 + \mu\delta u_1, \ldots, u_n + \lambda du_n + \mu \delta u_n$; la curvatura totale K di S in P dipende in generale da P e da S, e si chiama la *curvatura di V nel punto P e secondo la giacitura della superficie S*. Se, per ogni singola posizione di P su V, essa non dipende dalla superficie geodetica F che si è fatta passare per P, cioè se essa è *localmente* costante, allora essa riesce indipendente anche da P e ovunque costante su V, la quale si chiama allora una varietà a curvatura costante (teor. di F. Schur).

BIBL.: Oltre i trattati di geometria differenziale, ad es. di L. Bianchi, di G. Darboux, di W. Blaschke, ecc., si veda anche: T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, redatte da E. Persico, Roma 1925, cap. VII. E. G. T.

CURVE. – Nell'uso comune della parola, « curva » significa linea non retta e non composta di linee rette. Già Parmenide d'Elea, secondo Proclo nel *Commento all'Euclide*, distingueva le linee in rette, curve e miste. Ma nell'evoluzione del linguaggio matematico, che tende sempre ad eliminare le eccezioni affermando una veduta di continuità, la parola « curva » è divenuta sinonimo di « linea », ritenendosi dunque la retta come caso particolare della curva. Gli antichi Greci hanno conosciuto diverse specie di curve notevoli, oltre il cerchio: in primo luogo le coniche, e poi le curve d'ordine superiore usate per la soluzione del problema della trisezione dell'angolo o della duplicazione del cubo, cissoide di Diocle e concoide di Nicomede, e poi ancora la quadratrice di Ippia e Dinostrato, la spirale d'Archimede, ecc. Queste curve hanno offerto occasione a trattare diversi problemi (concernenti le tangenti, i massimi e minimi), che la geometria moderna ha risoluto in una maniera generale, e che stanno alla base del calcolo differenziale.

1. *Sulla definizione di curva.* – Nell'antica scuola di Pitagora (fondata il 540 a. C.) la linea si pensava costituita di punti-monadi, corpiccioli elementari di piccola estensione: da questa veduta, che risponde ad una conoscenza empirica non ancora razionalizzata, traevano i Pitagorici diverse conseguenze importanti, e in primo luögo la possibilità della misura delle linee. Ma la teoria andò incontro ad una crisi in seguito alla scoperta degl'incommensurabili, fatta nella stessa scuola.

Si approfondì allora dagli Eleati (Parmenide e Zenone d'Elea) l'analisi del concetto degli enti geometrici, e si riuscì a capire che essi hanno un significato puramente ideale: il punto è senza estensione, la linea non si ottiene sommando dei punti ed è pura lunghezza senza larghezza, la superficie non ha spessore, ecc.

La discussione intorno all'esistenza di tali figure matematiche era viva in Grecia nella seconda metà del sec. V a. C. Sofisti, come Protagora d'Abdera, sostenevano che le vere linee hanno una certa larghezza e differiscono perciò dal concetto dei matematici; così il cerchio deve avere, non un punto, ma un piccolo tratto a comune con la tangente. Si trova qui una veduta empirica, cui consente Aristotele, e che sarà conservata dalla tradizione degli scettici, raccolta più tardi nel libro *Adversus geometras* di Sesto Empirico. Frattanto i filosofi razionalisti, ispirati dalle matematiche – Democrito e Platone – sostenevano, contro gli empirici, la realtà degl'Intelligibili o delle Idee: idea = *ἰδέα* significa originariamente schema o figura matematica.

I tentativi per chiarire il concetto generale della linea, nel secolo IV a. C., conducono ad alcune definizioni che ci sono riportate da Platone e Aristotele: definizione genetica della linea come luogo d'un punto che si muove, e definizione delle linee come termini delle superficie. La prima si ritrova in Proclo (ed. Friedlein 1873, p. 97) e in Pappo (ed. Hutltsch, 1877, II, p. 662). La seconda figura negli *Elementi di Euclide* (I, 6) come complemento alla I, 2 (le linee sono lunghezze senza larghezza) che, nella sua forma negativa, sta a ricordare e riassumere il risultato della già accennata polemica eleatico-pitagorica.

Le anzidette definizioni sono passate nell'insegnamento tradizionale della geometria; ma anche prima di arrivare alla critica contemporanea, il pensiero matematico doveva riconoscerne l'imprecisione e l'insufficienza. Così nell'*Encyclopédie* (nuova ed., IX, Ginevra 1777, p. 758), D'Alembert dice che la linea è un concetto fondamentale non ulteriormente spiegabile: per chiarire questo concetto generale conviene assumere come data la nozione di linee e superficie particolari, cioè della retta, del piano, ecc.

L'intero sviluppo delle matematiche moderne conduce a tale chiarimento. Ed in questo figura come essenziale il metodo della geometria analitica di Fermat e Descartes (*La géometrie*, 1637).

Riferiamoci per semplicità alla geometria del piano, e assumiamo in questo un sistema di assi cartesiani x, y (v. COORDINATE). La generazione meccanica della curva porta ad esprimere le coordinate d'un suo punto variabile come funzioni d'un parametro t (tempo):

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

René Descartes, 1596-1650

I could give here several other ways of tracing and conceiving a series of curved lines, each curve more complex than any preceding one,[76] but I think the best way to group together all such curves and then classify them in order, is by recognizing the fact that all points of those curves which we may call "geometric," that is, those which admit of precise and exact measurement, must bear a definite relation[77] to all points of a straight line, and that this relation must be expressed by means of a single equation.[78] If this equation contains no term of higher degree than the rectangle of two unknown quantities, or the square of one, the curve belongs to the first and simplest class,[79] which contains only the circle, the parabola, the hyperbola, and the ellipse; but when the equation contains one or more terms of the third or fourth degree[80] in one or both of the two unknown quantities[81] (for it requires two unknown quantities to express the relation between two points) the curve belongs to the second class; and if the equation contains a term of the fifth or sixth degree in either or both of the unknown quantities the curve belongs to the third class, and so on indefinitely.

[76] "Qui seroient de plus en plus composées par degrez à l'infini." The French quotations in the footnotes show a few variants in style in different editions.

[77] That is, a relation exactly known, as, for example, that between two straight lines in distinction to that between a straight line and a curve, unless the length of the curve is known.

[78] It will be recognized at once that this statement contains the fundamental concept of analytic geometry.

[79] "Du premier & plus simple genre," an expression not now recognized. As now understood, the order or degree of a plane curve is the greatest number of points in which it can be cut by any arbitrary line, while the class is the greatest number of tangents that can be drawn to it from any arbitrary point in the plane.

[80] Grouped together because an equation of the fourth degree can always be transformed into one of the third degree.

[81] Thus Descartes includes such terms as x^2y, x^2y^2, . . . as well as x^3, y^4 . . . . .

du moins que des ſections coniques; ny ce qui peut empeſcher, qu'on ne concoiue la ſeconde, & la troiſieſme, & toutes les autres, qu'on peut deſcrire, auſſy bien que la premiere; ny par conſequent qu'on ne les recoiue toutes en meſme façon, pour ſeruir aux ſpeculations de Geometrie.

Ie pourrois mettre icy pluſieurs autres moyens pour tracer & conçeuoir des lignes courbes, qui ſeroient de plus en plus composées par degrés a l infini. mais pour comprendre enſemble toutes celles, qui ſont en la nature, & les diſtinguer par ordre en certains genres; ie ne ſçache rien de meilleur que de dire que tous les poins, de celles qu'on peut nommer Geometriques, c'eſt a dire qui tombent ſous quelque meſure préciſe & exacte, ont neceſſairement quelque rapport a tous les poins d'vne ligne droite, qui peut eſtre exprimé par quelque equation, en tous par vne meſme, Et que lorſque cete equation ne monte que iuſques au rectangle de deux quantités indeterminées, oubien au quarré d'vne meſme, la ligne courbe eſt du premier & plus ſimple genre, dans lequel il ny a que le cercle, la parabole, l'hyperbole, & l'Ellipſe qui ſoient compriſes. mais que lorſque l'equation monte iuſques a la trois ou quatrieſme dimenſion des deux, ou de l'vne des deux quantités indeterminées, car il en faut deux pour expliquer icy le rapport d'vn point a vn autre, elle eſt du ſecond: & que lorſque l'equation monte iuſques a la 5 ou ſixieſme dimenſion, elle eſt du troiſieſme; & ainſi des autres a l'infini.

La facon de diſtinguer toutes les lignes courbes en certains genres. Et de connoiſtre le rapport qu'ont tous leurs poins a ceux des lignes droites.

Comme ſi ie veux ſçauoir de quel genre eſt la ligne E C, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection de la reigle

e la Geometrie

Nella Geometrie Cartesio divide i problemi geometrici in tre tipi:

e la Geometrie

Nella Geometrie Cartesio divide i problemi geometrici in tre tipi:

- quelli risolubili con rette e circonferenze

e la Geometrie

Nella Geometrie Cartesio divide i problemi geometrici in tre tipi:

- quelli risolubili con rette e circonferenze

- che possono essere risolti con curve tracciabili con un nuovo compasso

e la Geometrie

Nella Geometrie Cartesio divide i problemi geometrici in tre tipi:

- quelli risolubili con rette e circonferenze
- che possono essere risolti con curve tracciabili con un nuovo compasso
- che non possono essere risolti come sopra

e la Geometrie

Nella Geometrie Cartesio divide i problemi geometrici in tre tipi:

- quelli risolubili con rette e circonferenze

- che possono essere risolti con curve tracciabili con un nuovo compasso

- che non possono essere risolti come sopra

Introduce di fatto la differenze tra le curve algebriche (descritte da polinomi) e le curve trascendenti

e la Geometrie

Nella Geometrie Cartesio divide i problemi geometrici in tre tipi:

- quelli risolubili con rette e circonferenze
- che possono essere risolti con curve tracciabili con un nuovo compasso
- che non possono essere risolti come sopra

Introduce di fatto la differenze tra le curve algebriche (descritte da polinomi) e le curve trascendenti

Si veda la recente tesi di laurea magistrale di Sara Gobbi
https://ggbm.at/azTYkAfn

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x, y) : x = x(t), y = y(t)\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x, y) : x = x(t), y = y(t)\}$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x, y) : x = x(t), y = y(t)\}$

Esempio

Ecco tre espressioni della stessa curva, una retta:

$$\{(x, y) : 3x - 2y + 6 = 0\}$$

$$\{(x, y) : y = 3/2x + 3\}$$

$$\{(x, y) : x = 2t + 2, y = 3t\}$$

Una curva piana è ...

Una curva nel piano cartesiano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire come:

- Luogo di zeri di una funzione: $\{(x, y) : f(x, y) = 0\}$
- Grafico: $\{(x, y) : y = y(x)\}$
- Equazione parametrica: $\{(x, y) : x = x(t), y = y(t)\}$

Si noti che la seconda definizione è la più *speciale*.

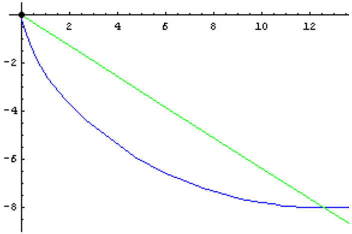
La prima è equivalente alla seconda se (e solo se) la derivata parziale $\partial f / \partial y \neq 0$ in ogni punto della curva (teorema del Dini o delle funzioni implicite)

La terza è equivalente alla seconda se (e solo se) la funzione $t \to (x(t), y(t))$ è iniettiva e $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0)$.

La questione

Problema

Dati due punti A e B in un piano verticale , determinare il cammino (i.e. la curva) lungo il quale una particella mobile M, partendo da A e scendendo unicamente sotto l'influenza del suo peso, raggiunge B nel tempo piu breve. ($\beta\rho\alpha\chi\upsilon\varsigma$ = *breve*, $\chi\rho o\nu o\varsigma$ = *tempo*)
(Joh. Bernoulli, Acta Eruditorum 1696).



Johann Bernoulli, 1667-1748

Il dibattito

Il problema non era nuovo, come fece notare Leibniz a Bernoulli: lo aveva considerato Galileo nel 1638 in *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, terza giornata, Teorema XXII*. Galileo osserva che il cerchio é il più veloce della retta.

Il dibattito

Il problema non era nuovo, come fece notare Leibniz a Bernoulli: lo aveva considerato Galileo nel 1638 in *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, terza giornata, Teorema XXII*. Galileo osserva che il cerchio é il più veloce della retta.

La sfida lanciata da Joh. Bernoulli fu raccolta da (almeno) 5 matematici che l'anno successivo diedero le loro soluzioni: Newton, Leibniz, de L'Höpital, Jacob Bernoulli e lo stesso Johann Bernoulli.

Il dibattito

Il problema non era nuovo, come fece notare Leibniz a Bernoulli: lo aveva considerato Galileo nel 1638 in *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, terza giornata, Teorema XXII*. Galileo osserva che il cerchio é il più veloce della retta.

La sfida lanciata da Joh. Bernoulli fu raccolta da (almeno) 5 matematici che l'anno successivo diedero le loro soluzioni: Newton, Leibniz, de L'Höpital, Jacob Bernoulli e lo stesso Johann Bernoulli.

La soluzione proposta da Bernoulli era sicuramente la più ingegnosa ed elegante; costituita da una serie di passi successivi che andremo a descrivere nel seguito.

La soluzione di Johann Bernoulli

Prendiamo un sistema di riferimento cartesiano tale che il punto A sia l' origine del riferimento, i.e. $A = (0, 0)$, e che l'asse delle y sia rivolto verso il basso.
Pensiamo inoltre che la curva ottenuta sia descritto come grafico , $y = y(x)$, o eventualmente da due equazioni parametriche, $(x(t), y(t))$, con $t \in \mathbb{R}$.

La soluzione di Johann Bernoulli

Passo 1. Il primo passo, dovuto a Galileo, consiste nel provare che, in ogni momento della discesa, vale l'identità:

$$v = \sqrt{2gy},$$

dove v è la velocità della particella e y la sua coordinata ascissa, mentre g è l'accellerazione di gravità.

La soluzione di Johann Bernoulli

Passo 1. Il primo passo, dovuto a Galileo, consiste nel provare che, in ogni momento della discesa, vale l'identità:

$$v = \sqrt{2gy},$$

dove v è la velocità della particella e y la sua coordinata ascissa, mentre g è l'accellerazione di gravità.

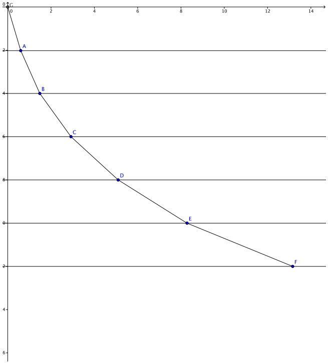
Questa identità si ricava dalla fisica, ad esempio dalla *legge della conservazione dell'energia* : $E_c + E_p = c$,
dove $E_c = 1/2mv^2$ è l'energia cinetica, $E_p = -mgy$ è l'energia potenziale e c una costante.
Si noti che, per la nostra scelta del riferimento cartesiano con $A = (0,0)$ e assumendo la particella ferma in A, si ha che $E_c = E_p = c = 0$.

La soluzione di Johann Bernoulli

Passo 2. Bernoulli quindi *discretizza* il problema: ovvero divide il piano in strisce orizzontali e assume che in ogni striscia la particella si muove in linea retta. La curva in questa approssimazione si chiama *lineare a tratti*.

La soluzione di Johann Bernoulli

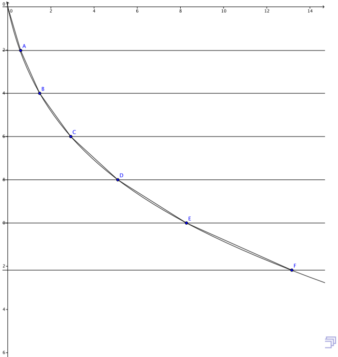
Passo 2. Bernoulli quindi *discretizza* il problema: ovvero divide il piano in strisce orizzontali e assume che in ogni striscia la particella si muove in linea retta. La curva in questa approssimazione si chiama *lineare a tratti*.



La soluzione di Johann Bernoulli

Passo 2. Bernoulli quindi *discretizza* il problema: ovvero divide il piano in strisce orizzontali e assume che in ogni striscia la particella si muove in linea retta. La curva in questa approssimazione si chiama *lineare a tratti*.

Al limite, quando le strisce diventano infinitamente piccole, tende alla curva cercata.



Principio di Fermat

Passo 3. Il problema, nel caso della curva lineare a tratti, consiste nel determinare l'angolo che ogni tratto rettilineo forma con la retta delle ascisse. Per questo Bernoulli fa uso della legge sulla rifrazione ottica detta di Schnell, o anche *principio di Fermat* (principio variazionale di minimo); la luce naturalmente segue *il cammino più breve* e la sua traiettoria soggiace a questo principio.

Principio di Fermat

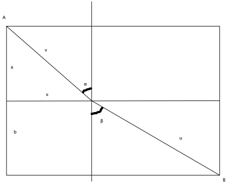
Teorema

Sia v la velocità in una striscia con angolo α e u la velocità nella striscia successiva con angolo β. Vale l'uguaglianza

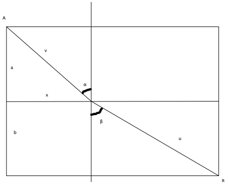
$$v/sin\alpha = u/sin\beta.$$

Nel limite quindi, detto α l'angolo che la tangente alla curva nel punto $P = (x, y)$ forma con la verticale e v la velocità della particella in P, si ha che

$$v/sin\alpha = cost.$$

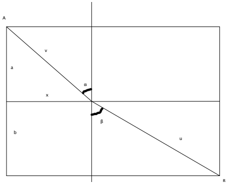


Prova del Principio di Fermat



Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

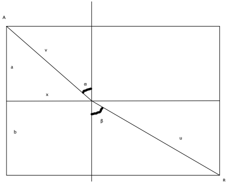
Prova del Principio di Fermat



Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{u}$$

Prova del Principio di Fermat

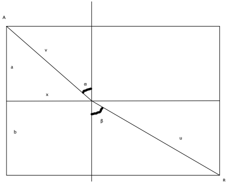


Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{u}$$

$$\dot{T}(x) = \frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{u}\frac{(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{sen\alpha}{v} - \frac{sen\beta}{u}$$

Prova del Principio di Fermat



Il tempo per andare da A a B, passando per x, è dato da

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{u}$$

$$\dot{T}(x) = \frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{u}\frac{(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{sen\alpha}{v} - \frac{sen\beta}{u}$$

$T(x)$ è minimo se $\dot{T}(x) = 0$, i.e. se $\frac{sen\alpha}{v} - \frac{sen\beta}{u} = 0$.

Osservazioni geometrico/algebriche

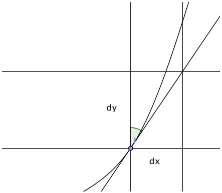
Lemma

Data una curva piana $y = y(x)$, sia α l'angolo che la tangente forma con la parallela all'asse delle ascisse. Vale l'identità

$$\dot{y} := \frac{dy}{dx} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}.$$

In particolare vale

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}} = sen\alpha.$$



Equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 4.

- Partendo dal Principio di Fermat, $v/sin\alpha = K$,
- inserendo l' identità di Galileo, $v = \sqrt{2gy}$,
- e la determinazione del seno con il lemma, $\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}} = sen\alpha$,

otteniamo:

Equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 4.

- Partendo dal Principio di Fermat, $v/sin\alpha = K$,
- inserendo l' identità di Galileo, $v = \sqrt{2gy}$,
- e la determinazione del seno con il lemma, $\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{y})^2}} = sen\alpha$,

otteniamo:

$$\sqrt{1 + (\dot{y})^2}.\sqrt{2gy} = K$$

ovvero

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = \sqrt{\frac{(c-y)}{y}},$$

o anche

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$$

con c costante opportuna che dipende da K e g.

Soluzione della equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 5. Consideriamo la sostituzione

$$y(u) = c\ sen^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} cos\ 2u.$$

Soluzione della equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 5. Consideriamo la sostituzione

$$y(u) = c\ sen^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} cos\ 2u.$$

Per la regola della derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy} . \frac{dy}{du},$$

e quindi, dopo qualche semplice calcolo,

$$\frac{dx}{du} = 2c\ sen^2 u.$$

Soluzione della equazione differenziale della Brachistocrona

Passo 5. Consideriamo la sostituzione

$$y(u) = c\ sen^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} cos\ 2u.$$

Per la regola della derivazione delle funzioni composte abbiamo

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy} . \frac{dy}{du},$$

e quindi, dopo qualche semplice calcolo,

$$\frac{dx}{du} = 2c\ sen^2 u.$$

Integrando quindi si ottiene che

$$x(u) = \frac{c}{2}\ 2u - \frac{c}{2} sen\ 2u.$$

La Cicloide

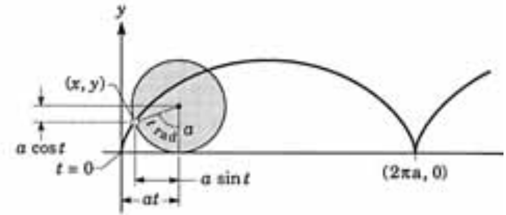
Definizione

La cicloide è il luogo percorso da un punto sulla circonferenza di un cerchio di raggio a che rotola lungo una linea retta.

La Cicloide

Definizione

La cicloide è il luogo percorso da un punto sulla circonferenza di un cerchio di raggio a che rotola lungo una linea retta.



By examining the above graph, we find

$$\left.\begin{aligned} x &= at - a\sin t \\ y &= a - a\cos t \end{aligned}\right\}$$

Passo 6. *”ex qua concludo Curvam Brachystochronam esse Cycloidem vulgarem”*

Il pendolo tautocrono di Huygens

Nel 1673 Huygens nel libro *Horologium Oscillatorium* si pone il problema di modificare la traiettoria di un pendolo in modo tale che il periodo sia indipendente dalla ampiezza iniziale.
(tautocrono dal greco tauto = lo stesso e chronos = tempo)

Christiaan Huygens, 1629 - 1695

Il pendolo tautocrono di Huygens

La sua idea fu di impostare una traiettoria tale che la forza di accelerazione sia proporzionale in ogni punto alla lunghezza d' arco. Ovvero

$$\ddot{s} + Ks = 0$$

(equazione differenziale del secondo ordine)

Il pendolo tautocrono di Huygens

La sua idea fu di impostare una traiettoria tale che la forza di accelerazione sia proporzionale in ogni punto alla lunghezza d' arco. Ovvero

$$\ddot{s} + Ks = 0$$

(equazione differenziale del secondo ordine)
Infatti questa ha come soluzione una funzione del tipo

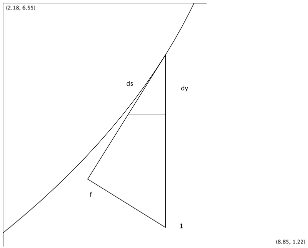
$$s(t) = Asen(\sqrt{K}t))$$

(o analogamente

$$s(t) = Acos(\sqrt{K}t))$$

che si muove nell'intervallo $(-A, A)$ in un intervallo di tempo $(\frac{2\pi}{\sqrt{K}})$ indipendente da A.

Alla ricerca della tautocrona



Per la similitudine dei due triangoli nel disegno si ha $f = -dy/ds$.

Alla ricerca della tautocrona

Combinando

- l'ipotesi di Huygens: $\ddot{s} + Ks = 0$
- la legge della dinamica, $f = \ddot{s}$,
- e la geometria delle similitudini, $f = -dy/ds$,

otteniamo:

a) $\frac{dy}{ds} = K \cdot s$.

Alla ricerca della tautocrona

Combinando

- l'ipotesi di Huygens: $\ddot{s} + Ks = 0$
- la legge della dinamica, $f = \ddot{s}$,
- e la geometria delle similitudini, $f = -dy/ds$,

otteniamo:
a) $\frac{dy}{ds} = K \cdot s$.
Integrando, ponendo $s = 0$ per $y = 0$, si ottiene
$y = \frac{K}{2} \cdot s^2$ ovvero
b) $s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$

Alla ricerca della tautocrona

Combinando

- l'ipotesi di Huygens: $\ddot{s} + Ks = 0$
- la legge della dinamica, $f = \ddot{s}$,
- e la geometria delle similitudini, $f = -dy/ds$,

otteniamo:
a) $\frac{dy}{ds} = K \cdot s$.
Integrando, ponendo $s = 0$ per $y = 0$, si ottiene
$y = \frac{K}{2} \cdot s^2$ ovvero
b) $s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$
Inserendo la b) nella a) si ottiene

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2K}\sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ e quindi } \sqrt{\frac{(c-y)}{y}}dy = dx$$

Commento alla Bernoulli - due

A meno di una traslazione di y questa è esattamente l'equazione della cicloide, come Joh. Bernoulli stesso notò (1697):

Commento alla Bernoulli - due

A meno di una traslazione di y questa è esattamente l'equazione della cicloide, come Joh. Bernoulli stesso notò (1697):

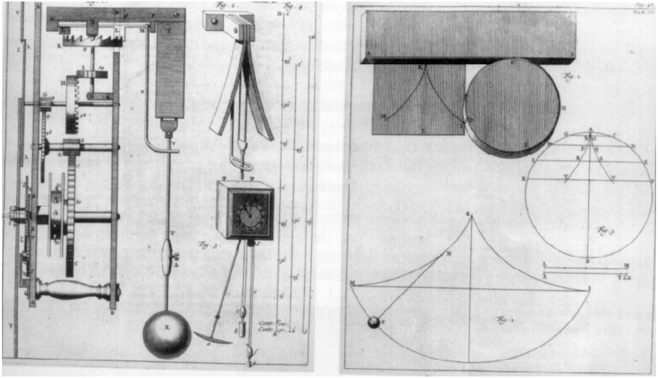
"animo revolvens inexpectatam illam identitatem Tautochronae Hugeniae nostra que Brachystochronae"

Ulteriori proprietà della cicloide

L' evoluta e l'evolvente di una cicloide è ancora una cicloide.

Ulteriori proprietà della cicloide

L' evoluta e l'evolvente di una cicloide è ancora una cicloide.



Epicicloidi, la geometria degli astri di Tolomeo

L' ipotrocoide é la curva tracciata da un punto fissato, posizionato ad una distanza m dal centro di un cerchio di raggio r, quando questo ruota senza strisciare all' interno di una circonferenza piú grande di raggio R.

L' epitrocoide é la curva tracciata da un punto fissato, posizionato ad una distanza m dal centro di un cerchio di raggio r, quando questo rotola senza strisciare sopra una circonferenza di raggio R.

Se $m = r$, ovvero il punto fissato é sulla circonferenza, allora ipotrocoide e epitrocoide si chiamano rispettivamente ipocicloide e epicicloide.

Equazioni parametriche:
$x(\theta) = (R + r)cos\theta - mcos(\theta + \alpha) = (R + r)cos\theta - mcos(\frac{R+r,}{r}\theta)$
$y(\theta) = (R + r)sin\theta - msin(\theta + \alpha) = (R + r)sin\theta - msin(\frac{R+r,}{r}\theta)$

La cicloide puó essere pensata come caso limite della epicicloide quando una circonferenza diviene retta.

Realizzazione virtuale e concreta

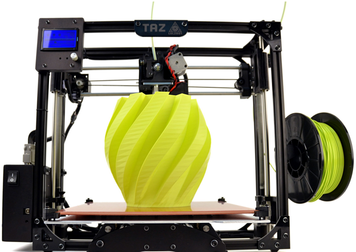
Geogebra: https://www.geogebra.org/

Gear Generator: http://geargenerator.com/

Gearify: http://www.gearifysoftware.com/

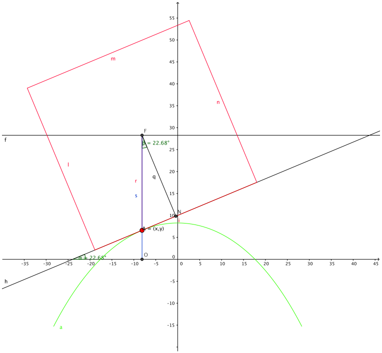
FabLab. Trento: http://fablab.muse.it/ ; Trieste: http://scifablab.ictp.it/

FabLab



Biciclette nei Musei della Scienza

Tema di maturità 2017



s = distanza (centro del quadrato - asse ascisse) vogliamo sia costante

$$q = rcos(\alpha) = (s-y)cos(\alpha) = (s-y)\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}$$

e quindi $y(x) = (s-q)cosh(\frac{x}{q})$

La Parca Cloto e l'otto volante

La clotoide é stata introdotta nel 1700 da uno dei fratelli Bernoulli, Jakob (1654-1705), che propose il seguente problema: *Trovare la curva la cui curvatura sia proporzionale alla lunghezza dell'arco in ogni punto.*

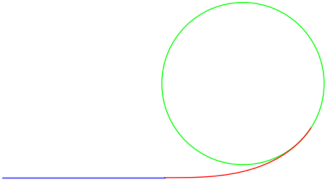
Fu Eulero (1707-1783) a intuire che la soluzione dovesse essere una spirale che piú si allontana dall'origine piú si avvolge su sé stessa.

Equazioni parametriche:

$$C(t) = \left(\int_0^t cos(\frac{x^2}{2})dx, \int_0^t sin(\frac{x^2}{2})dx\right)$$

I due integrali sono anche chiamati integrali di Fresnel, per la loro associazione al fenomeno conosciuto come di difrazione di Fresnel.

La Parca Cloto e l'otto volante



La Clotoide