

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA



Corso di Laurea Magistrale in Matematica

---

Relazione per il corso

*Elementary Mathematics from a Higher Viewpoint 2*

EQUAZIONI POLINOMIALI E  
GEOMETRIA PROIETTIVA

Professore: Marco Andreatta

Studenti: Luca Carcereri e Gloria Moresco

ANNO ACCADEMICO **2013 - 2014**

# Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni polinomiali</b>	<b>3</b>
1.1	Introduzione . . . . .	3
1.2	Equazioni quadratiche . . . . .	3
1.3	Equazioni cubiche . . . . .	5
1.4	Equazioni di quarto grado . . . . .	6
1.5	Equazioni di grado superiore . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Geometria proiettiva</b>	<b>8</b>
2.1	“Invenzione” della prospettiva . . . . .	8
2.2	Proiettività . . . . .	9
2.3	Piano proiettivo . . . . .	10
2.4	Teoremi preliminari . . . . .	11
2.5	Teorema di Bézout . . . . .	15
2.6	Teorema di Pascal . . . . .	16
2.7	Teorema di Cayley-Bacharach . . . . .	18
2.8	Teorema di Desargues . . . . .	20

# 1 Equazioni polinomiali

## 1.1 Introduzione

Un polinomio è una funzione  $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , con  $\mathbb{K}$  campo, definita da  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  dove  $a_i \in \mathbb{K}$  per  $i = 0, \dots, n$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

$\alpha \in \mathbb{K}$  si dice radice di  $p$  se  $p(\alpha) = 0$ , cioè se  $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0$ .

Risolvere un'equazione polinomiale  $p(x) = 0$  significa trovare un algoritmo che, utilizzando le operazioni di campo e le estrazioni di radici ( $\sqrt[n]{\cdot}$  per ogni  $n$ ) a partire dai coefficienti  $a_0, \dots, a_n$  dia una radice  $\alpha$  di  $p$ .

### Esempio

- Per  $n = 1$

$$a_0 + a_1x = 0 \implies \alpha = \begin{cases} \alpha = -\frac{a_0}{a_1} \text{ se } a_1 \neq 0 \\ \nexists \alpha \in \mathbb{K} \text{ radice se } a_1 = 0 \text{ e } a_0 \neq 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ radice se } a_1 = 0 \text{ e } a_0 = 0 \end{cases}$$

- Per  $n = 2$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0 \text{ con } a_2 \neq 0 \implies \alpha = \begin{cases} \alpha_{1,2} = -\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \text{ se } a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0 \\ \nexists \alpha \in \mathbb{K} \text{ radice se } a_1^2 - 4a_2a_0 < 0 \end{cases}$$

## 1.2 Equazioni quadratiche

Un'equazione quadratica è un'equazione del tipo  $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$  con  $a_2 \neq 0$ .

- **Soluzione nella matematica babilonese**

Nel 2000 a.C. i babilonesi potevano risolvere sistemi del tipo 
$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

usando il seguente algoritmo:

– costruisci  $\frac{x+y}{2} : \frac{p}{2}$

- costruisci  $(\frac{x+y}{2})^2 : (\frac{p}{2})^2$
- costruisci  $(\frac{x+y}{2})^2 - xy : (\frac{p}{2})^2 - q$
- costruisci  $\sqrt{(\frac{x+y}{2})^2 - xy} = \frac{x-y}{2} : \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$
- costruisci  $\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = x : \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$
- costruisci  $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = x : \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Notiamo che  $\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$  è equivalente a  $x^2 + q = px$ .

Dunque soluzione di  $x^2 - px + q = 0$  è  $x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ , cioè abbiamo dimostrato la formula dell'esempio nel caso particolare con  $x_1 = 1$ .

• **Soluzione nella matematica araba**

Gli arabi erano in grado di risolvere l'equazione  $x^2 + ax = b$  geometricamente.

L'area del quadrato di lato  $x + \frac{a}{2}$  è  $x^2 + ax + (\frac{a}{2})^2 = b + (\frac{a}{2})^2$ . Perciò  $x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + (\frac{a}{2})^2}$ , cioè  $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{b + (\frac{a}{2})^2}$ .

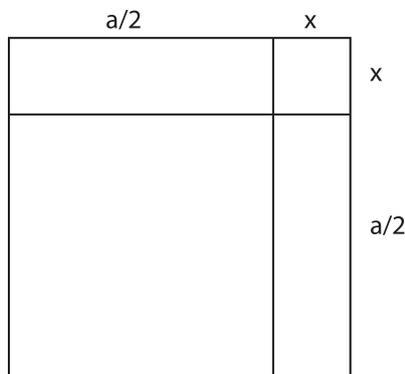


Figura 1: Quadrato di lato  $x + \frac{a}{2}$

Notiamo che questo procedimento funziona solo per coefficienti positivi e non permette di ottenere la soluzione negativa.

- **Soluzione nella matematica moderna**

Data l'equazione  $ax^2 + bx + c = 0$  si usa il metodo del completamento del quadrato:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \implies x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

### 1.3 Equazioni cubiche

Un'equazione cubica è un'equazione del tipo  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$  con  $a_3 \neq 0$ .

- **Soluzione di Cardano**

Gerolamo Cardano (1501-1576) ha pubblicato la soluzione dell'equazione cubica nell'*Ars magna* nel 1545. In realtà parte della soluzione gli era stata comunicata da Tartaglia e per questo fu accusato di avergli rubato la soluzione.

Il suo procedimento è di tipo algebrico. Dividendo per  $a_3$  e attraverso la sostituzione  $x := y - \frac{a_2}{3a_3}$  si ottiene un'equazione del tipo  $y^3 = py + q$ , con  $p, q \in \mathbb{K}$  e  $p = \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2}$ ,  $q = \frac{a_0}{a_3} - \frac{a_1a_2}{3a_3^2} + \frac{2a_2^3}{27a_3^3}$ .

Poniamo  $y = u + v$  e eleviamo al cubo ottenendo  $y^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = (u^3 + v^3) + 3uv(u + v) = 3uvy + (u^3 + v^3)$ .

Se troviamo  $u, v$  tali che  $\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ 3uv = p \end{cases}$  allora  $y = u + v$  soddisfa  $y^3 = py + q$ .

Deve essere  $u = \frac{p}{3v} \implies \left(\frac{p}{3v}\right)^3 + v^3 = q \implies (v^3)^2 - v^3q + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \implies v^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \implies u^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \implies y = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

$y = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$  è detta *Formula di Cardano*.

Rafael Bombelli (1526-1572) nel 1572 studia l'equazione  $x^3 = 15x + 4$  e la risolve con la formula di Cardano:  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ .

Bombelli chiama  $i^2 = -1$  così risulta  $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$ . Osserva che vale  $(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$  e analogamente  $(2 - i)^3 = 2 - 11i$ . Perciò  $x = 2 + 11i + 2 - 11i = 4$ .

Egli sapeva che 4 era soluzione ( $4^3 = 15 \cdot 4 + 4$ ) e riesce a ricavarla dalla formula di Cardano usando i numeri complessi prima che questi venissero scoperti.

- **Soluzione di Viète**

Francois Viète (1540-1603) trova la soluzione di un'equazione cubica trigonometricamente, mostrando che risolvere un'equazione cubica equivale a trisecare un angolo.

Consideriamo  $x^3 + ax + b = 0$ . Ponendo  $x = ky$  si ottiene  $k^3y^3 + ak y + b = 0$ , ovvero  $\frac{k^3}{ak}y^3 + y + b = 0$ . Prendendo  $k$  in modo che  $\frac{k^3}{ak} = -\frac{4}{3}$  si riduce a  $4y^3 - 3y = c$ .

Viète dimostra che vale  $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$ ; perciò la soluzione di  $4y^3 - 3y = c$  è data da  $y = \cos\theta$ , dove  $\theta$  è tale che  $\cos 3\theta = c$ .

Notiamo che se  $|c| \geq 1$  la soluzione è un angolo complesso.

## 1.4 Equazioni di quarto grado

Consideriamo  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$ . Dividendo per il coefficiente di  $x^4$  e attraverso una trasformazione lineare si può ridurre  $ax^4 + px^2 + qx + r = 0$  ovvero  $(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$ .

Allora  $\forall y \in \mathbb{R}$  vale  $(x^2 + p + y)^2 = (px^2 - qx + p^2 - r) + 2y(x^2 + p) + y^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)$ .

Affinché il termine di destra sia un quadrato deve avere discriminante nullo; per questo troviamo  $y_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $(p+2y_0)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py_0 + y_0^2) = (p+2y_0)(x+\alpha)^2$  risolvendo  $q^2 - 4(p+2y_0)(p^2 - r + 2py_0 + y_0^2) = 0$ , che sappiamo risolvere in quanto è equazione di terzo grado in  $y_0$ .

Infine si risolve  $(x^2 + y_0 + p) = \sqrt{p+2y_0}(x+\alpha)$ .

## 1.5 Equazioni di grado superiore

Sembrerebbe che per equazioni di qualsiasi grado si possa trovare una formula risolutiva che esprima le soluzioni tramite le operazioni di campo e le radici, in realtà questo non è possibile. Paolo Ruffini (1765-1822) nel 1799 costruisce un'equazione di quinto grado che non è risolubile. Egli dimostrò che non esiste una relazione risolutiva generale esprimibile tramite operazioni di campo e radici per le equazioni polinomiali di grado cinque o superiore. La sua dimostrazione conteneva alcune lacune e venne rifatta da Niels Henrik Abel (1802-1829) nel 1824.

## 2 Geometria proiettiva

### 2.1 “Invenzione” della prospettiva

I metodi di rappresentazione prospettica insegnati oggi si basano su principi e teorie sviluppate sin dal Quattrocento nello straordinario ambiente artistico della Firenze del tempo.

A due fiorentini, infatti, secondo la tradizione è attribuita la “scoperta” della prospettiva e la sua successiva divulgazione: l’architetto e scultore Filippo Brunelleschi (1377-1446) e l’architetto, letterato ed esperto di antichità classica, Leon Battista Alberti (1404-1472).

Se Brunelleschi è l’inventore intuitivo ed empirico, Leon Battista Alberti è colui che ha lasciato il primo fondamentale trattato scritto sulla prospettiva: il suo *De Pictura* pubblicato in latino nel 1435 per i letterati e ripubblicato l’anno successivo in lingua volgare per gli artisti. L’Alberti fu determinante poiché lasciò una prima descrizione di un congegno per facilitare l’esecuzione di oggetti e figure in prospettiva: lo chiamò *velo* ed era sostanzialmente un telaio in legno con fili tesi a formare una griglia quadrettata. Il velo era comodo per rappresentare scene reali, ma per rappresentare scene immaginarie in prospettiva era richiesta una teoria. Le due regole fondamentali usate dagli artisti rinascimentali erano le seguenti:

- una retta in prospettiva rimane una retta;
- rette parallele o rimangono parallele o convergono in un unico punto (detto punto di fuga).

Queste regole bastavano per risolvere il problema della rappresentazione prospettica di un pavimento quadrettato. Alberti nel 1436 risolse un caso particolare di questo problema in cui le linee del pavimento sono orizzontali, cioè parallele all’orizzonte. Questo metodo venne chiamato *costruzione legittima*.

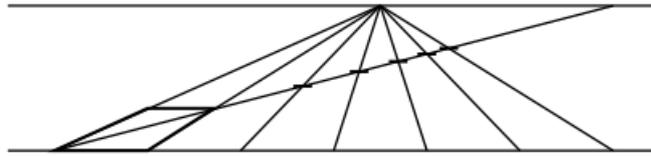


Figura 2: La *costruzione legittima*

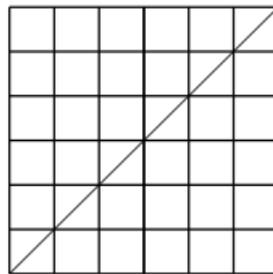


Figura 3: Il pavimento reale

Il metodo dell'Alberti fu solo la prima tappa del percorso che vide contributi notevoli da parte di appassionati studiosi, pittori e matematici come **Piero della Francesca**, **Leonardo da Vinci**, **Albrecht Durer**.

## 2.2 Proiettività

La composizione di due visioni prospettive non è in generale una prospettiva. Iterazioni di visioni prospettive danno una visione *proiettiva* che dunque è un insieme più ampio. I concetti matematici che permettevano di descrivere la geometria proiettiva non erano complicati, ma contrastavano le classiche idee della geometria euclidea. In particolare bisognava accettare l'esistenza di:

- punti all'infinito dove si incontrano rette parallele;
- trasformazioni, dette *proiezioni*, che trasformano lunghezze e angoli.

Nonostante l'idea dei punti all'infinito fosse stata usata in precedenza da Keplero, il primo che costruì una teoria comprendente questi principi fu Girard Desargues (1591-1661). Egli postulò che ogni retta abbia un punto all'infinito e che le rette parallele condividano lo stesso punto all'infinito. Le rette non parallele hanno un punto finito in comune e punti all'infinito non coincidenti. Dunque due rette distinte hanno esattamente un punto in comune. Il teorema più importante da lui formulato è il cosiddetto *teorema di Desargues* che verrà discusso in seguito.

### 2.3 Piano proiettivo

Il *piano proiettivo reale* è un'estensione del piano euclideo a cui viene aggiunta una "retta impropria" posizionata idealmente all'infinito e per questo chiamata *retta all'infinito*. Si definisce in  $\mathbb{R}^3$  una relazione di equivalenza  $\sim$  che identifica i punti che appartengono a una stessa retta, ovvero  $(x_0, x_1, x_2) \sim (x'_0, x'_1, x'_2) \iff (x_0, x_1, x_2) = (\lambda x'_0, \lambda x'_1, \lambda x'_2)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Si definisce il piano proiettivo reale come:

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus 0}{\sim} = \{[x, y, z], (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$ , dove i punti  $[x, y, z]$  di  $\mathbb{P}^2$  corrispondono alla retta di  $\mathbb{R}^3$  passante per l'origine  $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$  al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le coordinate  $x, y, z$  che individuano i punti  $[x, y, z]$  di  $\mathbb{P}^2$  sono dette *coordinate omogenee*.

Per definizione si verifica che  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x, y, 1], x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, y, 0], x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \cup \{[x, y, z] : z = 0\}$ , dove  $\{[x, y, z] : z = 0\}$  è la retta all'infinito. Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra il piano proiettivo reale e il piano euclideo unita alla retta all'infinito.

Si può generalizzare la definizione precedente per un generico campo  $\mathbb{K}$ :  $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

Una curva algebrica  $C$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  (o analogamente in  $\mathbb{K}$ ) è data da  $[F]$  dove  $F \in \mathbb{R}$  è un polinomio omogeneo e  $F \sim G \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$  tale che  $\lambda F = G$ .

Inoltre  $\text{supp}(C) = \{[x, y, z] : F(x, y, z) = 0\}$  e  $\delta C = \delta F$ .

Ricordiamo che un polinomio  $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$  con  $\delta F = n$  è omogeneo se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

1.  $F$  è somma di monomi dello stesso grado  $n$
2.  $F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z)$
3.  $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = nF(x, y, z)$

## 2.4 Teoremi preliminari

Siano  $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  con  $a_n \neq 0$  e  $g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  con  $b_m \neq 0$  e  $n, m \geq 1$  polinomi a coefficienti in un dominio  $D$  a fattorizzazione unica.

Ricordiamo che un *dominio* è un anello commutativo in cui vale  $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$  o  $b = 0$ , e a *fattorizzazione unica* che ogni elemento non nullo e non invertibile può essere scritto come prodotto di irriducibili e tale rappresentazione è unica.

**TEOREMA A**  $f$  e  $g$  hanno un fattore comune non costante  $\iff \exists$  polinomi non nulli  $\varphi, \psi$  con  $\delta\varphi < \delta f$  e  $\delta\psi < \delta g$  tali che  $\psi \cdot f = \varphi \cdot g$ .

### Dimostrazione A

$\Rightarrow f = h \cdot \varphi$  e  $g = h \cdot \psi$  ( $h$  fattore comune non costante), dunque  $\psi \cdot f = \varphi \cdot g$  con  $\delta\varphi < \delta f$  e  $\delta\psi < \delta g$ .

$\Leftarrow \psi \cdot f = \varphi \cdot g$  e  $\delta\psi < \delta g$ , dunque scrivendo  $g$  come prodotto di irriducibili (è possibile farlo in un solo modo perchè siamo in un dominio a fattorizzazione unica) esiste almeno un fattore non costante che non è fattore di  $\psi$  e dunque deve essere fattore di  $f$ .

**TEOREMA B**  $f$  e  $g$  hanno un fattore comune non costante  $\iff$  il risultante di  $f$  e

$$g R(f, g) = 0, \text{ dove } R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

**Dimostrazione B**

Per il teorema A,  $f$  e  $g$  hanno un fattore comune non costante  $\iff \exists \varphi = \alpha_1 + \dots + \alpha_n x^{n-1}$ ,  $\psi = \beta_1 + \dots + \beta_m x^{m-1}$  con  $\psi \cdot f = \varphi \cdot g$  e almeno uno tra  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0$

$$\text{e almeno uno tra } \beta_1, \dots, \beta_m \neq 0 \iff \begin{cases} a_0 \cdot \beta_1 = b_0 \cdot \alpha_1 \\ a_1 \cdot \beta_1 + a_0 \cdot \beta_2 = b_1 \cdot \alpha_1 + b_0 \cdot \alpha_2 \\ \dots \\ a_n \cdot \beta_m = b_m \cdot \alpha_n \end{cases} \text{ dove sul-}$$

la prima riga sono eguagliati i termini di grado 1, sulla seconda quelli di grado 2 e così via, fino all'ultima, in cui sono eguagliati i termini di grado  $m + n - 1 \iff$  dati  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  esistono soluzioni  $\alpha_j, \beta_j$  non tutte nulle del precedente sistema lineare omogeneo  $\iff$  la matrice dei coefficienti è singolare (ovvero ha determinante nullo), altrimenti l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo di  $m + n$  equazioni in

$m + n$  incognite sarebbe quella banale, cioè deve essere

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & -b_1 & -b_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & \dots & \dots & \dots & \dots & -b_m \end{vmatrix} = 0$$

$\iff R(f, g) = 0$ , infatti la matrice precedente è uguale a  $R(f, g)$  scambiando le colonne con le righe e cambiando il segno a un certo numero di righe (che porta al più a un cambio di segno del determinante).

Siano  $F_n, G_m \in D[x_1, \dots, x_r]$  polinomi omogenei di grado rispettivamente  $n, m$  a coefficienti in  $D$ , dominio a fattorizzazione unica.

$F_n = A_n + A_{n-1}x_r + \dots + A_0x_r^n$  con  $A_j = A_j(x_1, \dots, x_{r-1})$  polinomi omogenei in  $x_1, \dots, x_{r-1}$  di grado  $j$  con  $0 \leq j \leq n$ .

$G_m = B_m + B_{m-1}x_r + \dots + B_0x_r^m$  con  $B_i = B_i(x_1, \dots, x_{r-1})$  polinomi omogenei in  $x_1, \dots, x_{r-1}$  di grado  $i$  con  $0 \leq i \leq m$ .

Dunque  $F_n, G_m \in D[x_1, \dots, x_r] = D[x_1, \dots, x_{r-1}][x]$ .

Indichiamo con  $R(x_1, \dots, x_{r-1}) = R(F, G)$  il risultante di  $F$  e  $G$  rispetto a  $x_r$ .

**TEOREMA C** Se  $R(x_1, \dots, x_{r-1}) \neq 0 \implies R(x_1, \dots, x_{r-1})$  è un polinomio omogeneo di grado  $m \cdot n$ .

**Dimostrazione C**

$$R(tx_1, \dots, tx_{r-1}) =$$

$$\begin{vmatrix} A_n(tx_1, \dots, tx_{r-1}) & \dots & A_0(tx_1, \dots, tx_{r-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & A_1(tx_1, \dots, tx_{r-1}) & A_0(tx_1, \dots, tx_{r-1}) & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ B_m(tx_1, \dots, tx_{r-1}) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & B_0(tx_1, \dots, tx_{r-1}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} t^n A_n(x_1, \dots, x_{r-1}) & \dots & A_0(x_1, \dots, x_{r-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & tA_1(x_1, \dots, x_{r-1}) & A_0(x_1, \dots, x_{r-1}) & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ t^m B_m(x_1, \dots, x_{r-1}) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & B_0(x_1, \dots, x_{r-1}) \end{vmatrix}$$

Moltiplichiamo la  $j$ -esima riga degli  $A_j$  per  $t^{m-j+1}$  e la  $i$ -esima riga dei  $B_i$  per  $t^{n-i+1}$ .

Il determinante risulta moltiplicato per  $(t^m \cdot \dots \cdot t)(t^n \cdot \dots \cdot t)$ .

$$(t^m \cdot \dots \cdot t)(t^n \cdot \dots \cdot t)R(tx_1, \dots, tx_{r-1}) = \begin{vmatrix} t^{n+m} A_n & t^{n+m-1} A_{n-1} & \dots & t^m A_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{n+m-1} A_n & \dots & t^m A_1 & t^{m-1} A_0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & tA_0 \\ t^{n+m} B_m & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & tB_0 \end{vmatrix}$$

ovvero

$$t^{m+(m+1)+\dots+1+n+(n-1)+\dots+1}R(tx_1, \dots, tx_{r-1}) = t^{n+m}t^{n+m-1}\dots tR(x_1, \dots, x_{r-1})$$

$$t^{\frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}}R(tx_1, \dots, tx_{r-1}) = t^{\frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}}R(x_1, \dots, x_{r-1})$$

da cui deriva  $R(tx_1, \dots, tx_{r-1}) = t^{m+n}R(x_1, \dots, x_{r-1})$ .

**OSSERVAZIONE** Sia  $R(x_0, x_1)$  un polinomio omogeneo di grado  $d$  in due variabili  $x_0, x_1$ . Siano  $(a_1, b_1), \dots, (a_{d+1}, b_{d+1})$  radici di  $R(x_0, x_1)$ , ovvero  $R(a_i, b_i) = 0 \forall 1 \leq i \leq d+1$  tali che  $\frac{b_i}{a_i} \neq \frac{b_j}{a_j} \forall i \neq j$ . Allora  $R(x_0, x_1) = 0$ .

### Dimostrazione

$r(x) = R(1, x)$  è un polinomio di grado  $d$  che ha come zeri  $\frac{b_i}{a_i} \forall 1 \leq i \leq d+1$ . Infatti  $r(\frac{b_i}{a_i}) = R(1, \frac{b_i}{a_i}) = \frac{1}{a_i}a_i R(1, \frac{b_i}{a_i}) = \frac{1}{a_i}R(a_1, b_i)$ . Perciò deve essere  $r(x) = 0$ .

## 2.5 Teorema di Bézout

Étienne Bézout (1730-1783) formula nel 1779 un teorema che permette di conoscere il numero massimo di intersezioni fra due curve algebriche.

**TEOREMA (Bezout)** Siano  $C=[F]$  e  $C'=[G]$  due curve in  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ , con  $\mathbb{K}$  campo, e  $\delta C = n$  (cioè  $\delta F = n$ ) e  $\delta C' = m$  (cioè  $\delta G = m$ ).

Se  $C \cap C'$  contiene più di  $n \cdot m$  punti, allora  $C$  e  $C'$  hanno una componente comune (ovvero  $F$  e  $G$  hanno un fattore comune).

### Dimostrazione

Supponiamo che  $C$  e  $C'$  abbiano  $n \cdot m$  punti in comune. Colleghiamo tutte le coppie di questi punti con una retta. Siccome queste rette sono in numero finito, deve esserci

un punti  $P$  di  $\mathbb{P}_K^2$  che non appartiene nè a tali rette nè a  $C$  nè a  $C'$ . Scegliamo un sistema di coordinate in modo che  $P(0, 0, 1)$ .

$F(x) = A_0x_2^n + A_1x_2^{n-1} + \dots + A_n$  con  $A_j = A_j(x_0, x_1)$  polinomi omogenei di grado  $j$ .

$G(x) = B_0x_2^m + B_1x_2^{m-1} + \dots + B_m$  con  $B_i = B_i(x_0, x_1)$  polinomi omogenei di grado  $i$ .

Per il teorema C,  $R(F, G) = R(x_0, x_1)$  o è nullo o è un polinomio omogeneo di grado  $n \cdot m$  in  $x_0, x_1$ . Ora mostreremo che esistono  $n \cdot m + 1$  coppie  $(a_1, b_1), \dots, (a_{n \cdot m + 1}, b_{n \cdot m + 1})$  con  $\frac{b_i}{a_i} \neq \frac{b_j}{a_j} \forall i \neq j$ , che soddisfano  $R(a_i, b_i) = 0$ , così potremo concludere, per l'osservazione, che  $R(x_0, x_1)$  è nullo, dunque che, per il teorema B,  $F$  e  $G$  hanno un fattore in comune.

Se  $[c, d, e] \in C \cap C' \Rightarrow F(c, d, e) = G(c, d, e) = 0 \Rightarrow F(c, d, x_2)$  e  $G(c, d, x_2)$  hanno uno zero in comune,  $e \Rightarrow F(c, d, x_2)$  e  $G(c, d, x_2)$  hanno il fattore  $(x_2 - e)$  in comune  $\Rightarrow R(c, d) = 0$  per il teorema B. Ma esistono  $n \cdot m$  punti  $\in C \cap C'$ , per ipotesi, dunque  $n \cdot m$  coppie di  $(c_i, d_i)$  che soddisfano  $R(c_i, d_i) = 0$ . deve anche essere  $\frac{c_i}{d_i} \neq \frac{c_j}{d_j} \forall i \neq j$ , in quanto, se per assurdo  $\exists i \neq j$  tali che  $\frac{c_i}{d_i} = \frac{c_j}{d_j}$ , allora sia  $(c_i, d_i, e_i)$  che  $(c_j, d_j, e_j)$  starebbero sulla retta  $c_i x_1 - d_i x_0 = 0$  alla quale però appartiene anche  $P$ , in contraddizione con come l'abbiamo definito.

## 2.6 Teorema di Pascal

Blaise Pascal (1623-1662), all'età di sedici anni, pubblicò *Essai pour les coniques*, che consisteva in un'unica pagina stampata, ma che può essere definita una delle più feconde di tutta la storia della matematica. Essa conteneva la proposizione *mysterium hexagrammaticum*, oggi nota come il *teorema di Pascal*. Prima di enunciarlo diamo la definizione di esagono semplice, utile per la costruzione del teorema.

**Definizione** Per *esagono semplice piano* si intende una sestupla ordinata di punti a tre a tre non allineati (vertici dell'esagono) e le sei rette che congiungono ogni vertice con il

successivo, rispetto all'ordinamento fissato, e l'ultimo con il primo (lati dell'esagono).

Se  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  sono i vertici dell'esagono, le tre coppie di lati opposti sono le seguenti:  $P_1P_2 - P_4P_5$ ,  $P_2P_3 - P_5P_6$ ,  $P_3P_4 - P_6P_1$ .

### TEOREMA (Pascal)

Le tre coppie di lati opposti di un esagono semplice inscritto in una conica si incontrano in tre punti allineati, giacenti sulla cosiddetta *retta di Pascal*.

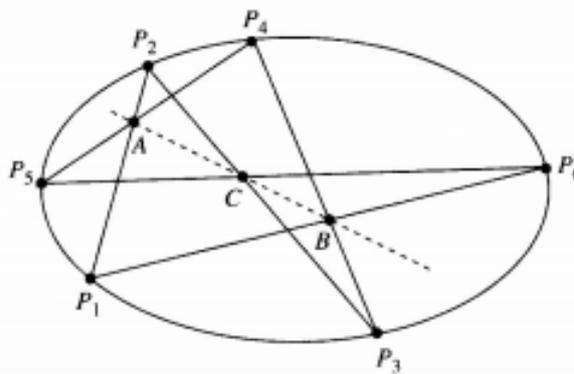


Figura 4: Teorema di Pascal

Possediamo soltanto delle indicazioni sul modo in cui Pascal dimostrò questo teorema. Egli disse che, essendo vero per il cerchio, deve essere vero per tutte le coniche.

Julius Plucker (1801-1868) nel 1847 dimostra il teorema mostrando che si tratta di una conseguenza del teorema di Bezout.

### Dimostrazione

Siano  $L_1, \dots, L_6$  i successivi lati dell'esagono. Le unioni dei lati alterni,  $L_1 \cup L_3 \cup L_5$  e  $L_2 \cup L_4 \cup L_6$ , possono essere viste come curve cubiche:

$$l_{135}(x, y, z) = 0 \quad l_{246}(x, y, z) = 0$$

Ogni  $l$  è il prodotto di tre polinomi lineari di primo grado.

Queste due curve si incontrano in nove punti:

- i sei vertici dell'esagono;
- i tre punti intersezione dei lati opposti.

Sia  $c(x, y, z) = 0$  (\*) l'equazione della conica che contiene i sei vertici.

Sia  $P$  un punto su  $c$  diverso dai sei vertici.

Siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tali che  $\lambda l_{135}(x, y, z) + \mu l_{246}(x, y, z) = 0$  (\*\*\*) passa per  $P$ .

(\*) e (\*\*\*) di gradi 2, 3, hanno 7 > 2 · 3 punti in comune ( $P$  e i sei vertici) e quindi, per il teorema di Bezout, hanno una componente comune (sono una cubica e una conica con più di  $3 \cdot 2 = 6$  punti di intersezione).

Allora  $\lambda l_{135} + \mu l_{246} = ct$  (\*\*\*) per un polinomio  $t$  che deve essere di primo grado dato che la parte sinistra di (\*\*\*) ha grado 3 e  $c$  ha grado 2.

Dato che (\*\*\*) passa per nove punti comuni a  $l_{135} = 0$  e  $l_{246} = 0$  e (\*) passa per sei di loro, i rimanenti tre (i punti intersezione dei lati opposti) devono stare sulla retta  $t = 0$ . Tale retta è la retta di Pascal.

## 2.7 Teorema di Cayley-Bacharach

**TEOREMA (Cayley-Bacharach)** Se due cubiche  $C_1$  e  $C_2$  nel piano proiettivo si incontrano in nove punti (diversi), allora ogni cubica che passa per otto di questi punti passa anche per il nono.

In figura 5 è mostrato il caso particolare in cui le cubiche  $C_1$  e  $C_2$  sono entrambe unione di tre rette.

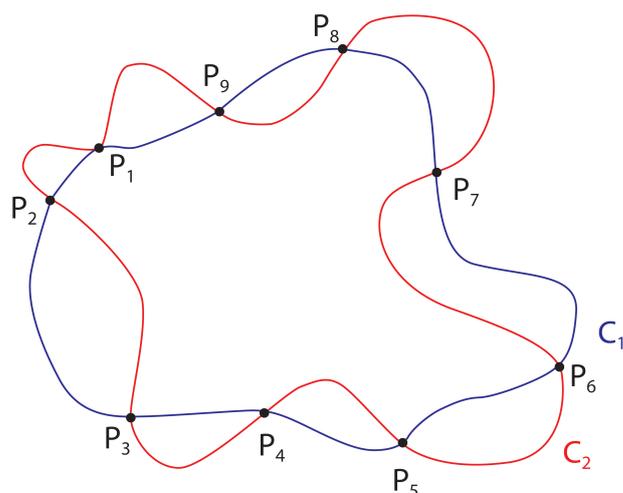


Figura 5: Teorema di Cayley-Bacharach

### Dimostrazione

Supponiamo sia  $C_3$  una cubica che passa per otto dei punti  $P_1, P_2, \dots, P_9$ . Avendo l'equazione di una cubica dieci parametri,  $C_3$  ha solo due parametri liberi (uno realmente libero, l'altro dato dalla proiettività). Per questo motivo si può scrivere  $C_3$  come combinazione lineare di  $C_1$  e  $C_2$ :  $C_3 = sC_1 + tC_2$  con  $s, t \in \mathbb{R}$ . Dunque anche il nono punto deve appartenere a  $C_3$ .

### Dimostrazione alternativa del teorema di Pascal

Il teorema di Pascal può essere dimostrato usando il teorema di Cayley-Bacharach.

Si prendono gli otto punti:

- sei, come vertici dell'esagono  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ;
- due su quella che dovrebbe essere la retta di Pascal,  $P_7$  e  $P_8$ .

Il nono punto,  $P_9$ , è il terzo punto della retta di Pascal.

Le cubiche  $C_1$  e  $C_2$  sono i due insiemi di tre rette, che individuano i sei vertici dell'esagono  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ . La terza cubica è l'unione della conica e della retta per  $P_7$  e  $P_8$ .

Il punto  $P_9$  non può stare sulla conica e quindi sta sulla retta per  $P_7$  e  $P_8$ .

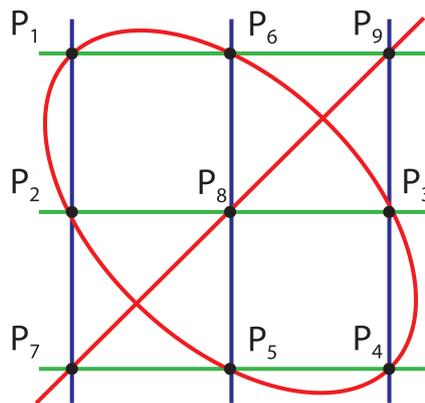


Figura 6: Teorema di Pascal con Cayley-Bacharach

## 2.8 Teorema di Desargues

**TEOREMA (Desargues)** Sia  $P = P(V)$  un piano proiettivo e siano  $P_1, \dots, P_6 \in P$  punti distinti tali che le rette  $L(P_1, P_4)$ ,  $L(P_2, P_5)$ ,  $L(P_3, P_6)$  abbiano in comune un punto  $P_0$  diverso da  $P_1, \dots, P_6 \in P$ .

In tali ipotesi i punti

$A = L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$ ,  $B = L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$ ,  $C = L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$  sono allineati.

Il teorema si può anche enunciare così: *sotto le ipotesi dette, sono allineati i tre punti di intersezione delle coppie di lati ordinatamente corrispondenti dei due triangoli di vertici  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ .*

### Dimostrazione 1

Siano  $v_0, v_1, \dots, v_6 \in V$  tali che  $P_i = [v_i], i = 1, \dots, 6$ . Per ipotesi esistono scalari  $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in K$  tali che  $v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_4 v_4 = \alpha_2 v_2 + \alpha_5 v_5 = \alpha_3 v_3 + \alpha_6 v_6$ .

Poiché  $P_0$  è diverso da  $P_1, \dots, P_6 \in P$ , gli  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  sono tutti diversi da zero. I tre punti  $A = L(P_1, P_3) \cap L(P_4, P_6)$ ,  $B = L(P_2, P_3) \cap L(P_5, P_6)$ ,  $C = L(P_1, P_2) \cap L(P_4, P_5)$  sono rispettivamente associati ai vettori

$$\alpha_1 v_1 - \alpha_3 v_3 = -\alpha_4 v_4 + \alpha_6 v_6$$

$$-\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_5 v_5 - \alpha_6 v_6$$

$$-\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 = \alpha_4 v_4 - \alpha_5 v_5$$

Questi tre vettori sono linearmente dipendenti perché la loro somma è 0, e quindi i tre punti corrispondenti sono allineati.

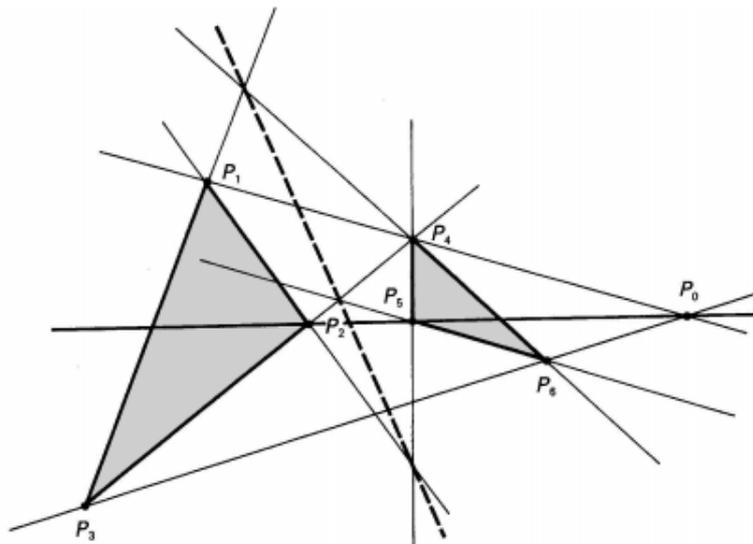


Figura 7: Teorema di Desargues

### Dimostrazione 2

In questa dimostrazione si esce dal piano proiettivo per portarsi nello spazio tridimensionale euclideo e successivamente tornare nel piano proiettivo.

Nello spazio tridimensionale i due triangoli  $P_1P_2P_3$  e  $P_4P_5P_6$  individuano due piani la cui intersezione è la retta cercata. Infatti due piani si intersecano sempre in una retta  $r$  (se fossero paralleli nella retta all'infinito) alla quale dimostriamo che appartengono i punti di intersezione dei prolungamenti dei lati corrispondenti,  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Siano  $P_1P_2$  e  $P_4P_5$  due rette. Vogliamo dimostrare che il loro punto di intersezione sta sulla retta  $r$ . Vale  $P_1P_2 = P_0P_1P_2 \cap P_1P_2P_3$  e  $P_4P_5 = P_0P_4P_5 \cap P_4P_5P_6$ , ma  $P_0P_4P_5 \subset P_0P_1P_2$ . Pertanto  $C = P_1P_2 \cap P_4P_5 = (P_0P_1P_2 \cap P_1P_2P_3) \cap (P_0P_4P_5 \cap P_4P_5P_6) = P_1P_2P_3 \cap P_4P_5P_6 \cap P_0P_1P_2$ ; perciò  $C \in P_1P_2P_3 \cap P_4P_5P_6$ . Analogamente si dimostra che anche  $A, B \in P_1P_2P_3 \cap P_4P_5P_6$  ovvero  $A, B, C \in r$ .

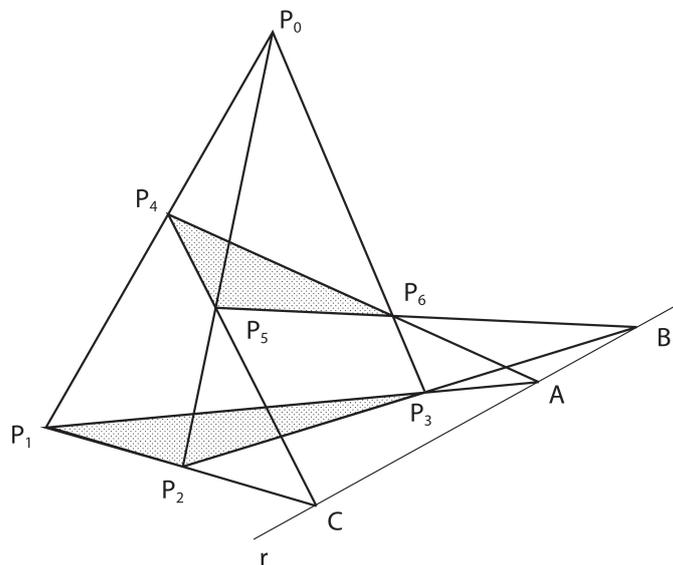


Figura 8: Teorema di Desargues

## **Riferimenti bibliografici**

[1] John Stillwell (2004), *Mathematics and its history*, Springer, New York

[2] Edoardo Sernesi (1989), *Geometria I*, Bollati Boringhieri, Torino

[3] Robert Walker (1950), *Algebraic curves*, Springer, New York

[4] *Appunti del corso*