Topologia

Laura Facchini

26 maggio 2011

Esercizio 1. *Si considerino i seguenti spazi topologici*

- $X = \mathbb{R}$ *con la topologia euclidea* τ_ε
- $Y = \mathbb{R}$ *con la topologia* τ *i cui aperti non banali sono le semirette* $(-\infty, h)$ *con* $h \in \mathbb{R}$
- $Z = \mathbb{R}$ *con la topologia* η *i cui aperti non banali sono le semirette* $(k, +\infty)$ *con* $k \in \mathbb{R}$

Siano $(X \times Y, \tau')$ *e* $(X \times Z, \eta')$ *gli spazi topologici prodotto.*
Si consideri poi il sottoinsieme $S = I \times T = [0,1] \times ((0,2) \cup [3,5])$ *di* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *con le topologie indotte da* τ' *ed* η'.

1. *Si dica se* (S, τ') *è di Hausdorff.*
2. *Si dica se* (S, τ') *ed* (S, η') *sono compatti.*
3. *Si provi che* (S, τ') *è connesso.*
4. *Si costruisca un cammino in* (S, τ') *che congiunga i punti* $A = (0,1)$ *e* $B = (1,4)$.

Tratto dagli Esercizi di Geometria - IV unità didattica di E. Tasso e G. Occhetta.

Svolgimento.

1. Ricordiamo innanzitutto che il prodotto di due spazi è di Hausdorff se e solo se entrambi gli spazi sono di Hausdorff.

   Poiché $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ è di Hausdorff e sappiamo che un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff, anche $([0,1], \tau_\varepsilon)$ è di Hausdorff.

   Rimane quindi da stabilire se lo spazio (T, τ) è di Hausdorff.

Per mostrare che (T, τ) non è di Hausdorff, consideriamo due punti distinti x e y di T. Consideriamo i loro rispettivi intorni $(-\infty, x + \varepsilon_1) \cap T \ni x$ e $(-\infty, y + \varepsilon_2) \cap T \ni y$ con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ (nel caso $x = 5$ l'unico intorno è tutto T). Allora la loro intersezione è sempre non vuota, infatti abbiamo

$$((-\infty, x+\varepsilon_1) \cap T) \cap ((-\infty, y+\varepsilon_2) \cap T) = (-\infty, \min\{x+\varepsilon_1, y+\varepsilon_2\}) \cap T.$$

2. Ricordiamo innanzitutto che il prodotto di due spazi è compatto se e solo se entrambi gli spazi sono compatti.

   Lo spazio $([0, 1], \tau_\varepsilon)$ è compatto, perché è un intervallo chiuso e limitato di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$.

   Consideriamo ora un ricoprimento aperto di (T, τ). Poiché l'unico intorno del punto 5 in τ è T stesso, T apparterrà necessariamente al ricoprimento. Possiamo quindi concludere che abbiamo trovato un sottoricoprimento finito: $\{T\}$. Dunque (T, τ) è compatto e anche (S, τ') è compatto.

   Mostriamo ora che (S, η') non è compatto, provando che (T, η) non è compatto.

   Abbiamo già visto che ogni aperto non banale in η di T è del tipo $(k, +\infty) \cap T$ per $k \geq 0$, ovvero $(k, 5] \cap T$ per $k \geq 0$. Osserviamo però che il ricoprimento aperto di T dato da

$$\left\{ \left(\frac{1}{n}, 2 \right) \cup [3, 5] \right\}_{n \geq 1}$$

   non ammette sottoricoprimenti finiti.

3. Ricordiamo innanzitutto che il prodotto di due spazi è connesso se e solo se entrambi gli spazi sono connessi.

   Lo spazio $([0, 1], \tau_\varepsilon)$ è connesso, perché gli intervalli di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ sono sempre connessi.

   Per quanto visto in precedenza, presi due punti distinti in (T, τ) non è possibile trovare due loro intorni aperti disgiunti. In altre parole, non è possibile scrivere T come unione di due aperti non vuoti e disgiunti, quindi possiamo concludere che (T, τ) è connesso, da cui anche (S, τ') è connesso.

4. Definiamo due cammini in (S, τ'), il primo tra i punti $A = (0, 1)$ e $C = (1, 1)$:

$$f : ([0, 1], \tau_\varepsilon) \to (S, \tau'),$$

il secondo tra i punti $C = (1, 1)$ e $B = (1, 4)$:

$$g : ([0, 1], \tau_\varepsilon) \to (S, \tau').$$

Il cammino prodotto tra i due costituirà il cammino cercato.

Consideriamo la mappa

$$f : ([0, 1], \tau_\varepsilon) \to (S, \tau') \qquad \text{definita come} \qquad f(t) = (t, 1).$$

Grazie alla prorpietà universale dei prodotti, l'applicazione f è continua (infatti la prima componente è l'identità e la seconda è un'applicazione costante). Inoltre è un cammino che collega A con C:

$$f(0) = (0, 1) = A \qquad \text{e} \qquad f(1) = (1, 1) = C.$$

Consideriamo poi la mappa

$$g : ([0, 1], \tau_\varepsilon) \to (S, \tau') \ \text{ definita come } \ g(t) = \begin{cases} (1, 2t + 1) & t \in [0,\ 1/2) \\ (1, 2t + 2) & t \in [1/2,\ 1] \end{cases}$$

Per provare la continuità di $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ possiamo ricondurci a verificare la continuità della seconda componente g_2, grazie alla prorpietà universale dei prodotti.

Se $U \subset T$ è un aperto non banale, allora U può essere di due tipi:

$$U = \begin{cases} U_1 := (0, s) & 0 < s \leq 2 \\ U_2 := (0, 2) \cup [3, s) & 3 < s \leq 5 \end{cases}$$

Consideriamo tutte le possibili controimmagini:

$${g_2}^{-1}(U_1) = \begin{cases} \emptyset & 0 < s \leq 1 \\ \left[0, \frac{s-1}{2}\right) & 1 < s \leq 2 \end{cases}$$

$${g_2}^{-1}(U_2) = \begin{cases} \left[0, \frac{s-2}{2}\right) & 3 < s \leq 4 \\ [0, 1] & 4 < s \leq 5 \end{cases}$$

Tutte le controimmagini di aperti di T sono aperti di $[0, 1]$, quindi g_2 è continua, da cui g è continua. Inoltre è un cammino che collega C e B:

$$g(0) = (1, 1) = C \qquad \text{e} \qquad g(1) = (1, 4) = B.$$

Il cammino prodotto
$$h : ([0,1], \tau_\varepsilon) \to (S, \tau')$$
è il cammino cercato (è continuo e collega A con B, passando per $C = f(1) = g(0)$):
$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0,\ 1/2] \\ g(2t-1) & t \in [1/2,\ 1] \end{cases}$$
$\square$

Esercizio 2. *Sia* $X = [-1,1] \subset \mathbb{R}$. *Su* X *si consideri la topologia*
$$\tau := \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{U \subset X \mid 0 \notin U\} \cup \{V \subset X \mid (-1,1) \subset V\}.$$

1. *Si dica se* (X,τ) *è di Hausdorff.*
2. *Si dica se* (X,τ) *è compatto.*
3. *Si dica se* (X,τ) *è connesso.*
4. *Si dica se il sottospazio* $X \setminus \{0\}$ *con la topologia indotta da* τ *è compatto.*

Tratto dagli Esercizi di Geometria - IV unità didattica di E. Tasso e G. Occhetta.

Svolgimento.

1. Mostriamo che (X,τ) non è di Hausdorff.

   Consideriamo il punto 0. Osserviamo che tutti gli (intorni) aperti U_0 contenenti 0 contengono l'intervallo $(-1,1)$, ovvero devono essere del tipo $(-1,1)$ oppure $[-1,1)$ oppure $(-1,1]$ o tutto X.

   Scegliendo quindi un qualunque punto x di X diverso da ± 1, abbiamo che $x \in U_0$ e quindi non esistono intorni disgiunti di 0 ed $x \neq \pm 1$. Quindi (X,τ) non è di Hausdorff.

2. Mostriamo che (X,τ) è compatto.

   Consideriamo un ricoprimento aperto di X. In tale ricoprimento deve esistere un aperto U_0 che contiene il punto 0. Osserviamo però che gli unici aperti contenenti il punto 0 contengono l'intervallo $(-1,1)$.

   Denotiamo con U_{-1} e U_1 gli aperti del ricoprimento che contengono rispettivamente i punti -1 e 1.

   I tre aperti $U_0,\ U_{-1},\ U_1$ costituiscono un sottoricoprimento finito del ricoprimento iniziale.

3. (X, τ) non è connesso, infatti possiamo scriverlo come

$$X = \{-1\} \cup (-1, 1],$$

ottenendo quindi una sua decomposizione in due aperti non vuoti e disgiunti.

4. Il sottospazio $X \setminus \{0\}$ con la topologia indotta da τ non è compatto, perché la topologia indotta su tale sottoinsieme (infinito) è la topologia discreta, ma un insieme infinito con la topologia discreta non è mai compatto.

   Basta infatti prendere come ricoprimento aperto quello formato da tutti i singoletti dei suoi punti. È evidentemente impossibile trovare un sottoricoprimento finito di tale ricoprimento.

$\square$

Esercizio 3. *In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, siano dati i seguenti sottospazi*

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 = 1\} \\
B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} \\
C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-2)^2 = 4\}
\end{aligned}$$

Determinare quali di essi sono omeomorfi tra loro, motivando la risposta.

Svolgimento. Notiamo subito che B non è connesso: gli aperti di $\mathbb{R}^2$ dati da

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \frac{3}{2}\right\}$$

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \frac{3}{2}\right\}$$

lo sconnettono.

Invece A e C sono entrambi connessi per archi, perché unione di circonferenze con intersezione non vuota. Quindi A e C sono connessi e B non potrà essere omeomorfo né ad A né a C.

Mostriamo che $A \cong C$. Consideriamo al mappa $f : A \to C$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{se } (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \\ \\ (2x, -2y) & \text{se } (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 = 1\} \end{cases}$$

Tale mappa f è:

- ben definita, perché $f(0,0) = (0,0)$;
- continua, perché é polinomiale in ogni coordinata;
- biiettiva da un compatto A ad uno spazio di Hausdorff C;

quindi f è un omeomorfismo.

Abbiamo quindi mostrato che le classi di omeomorfismo degli spazi dati sono $\{A, C, D\}$ e $\{B\}$. $\square$

Esercizio 4. *In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, siano dati i seguenti sottospazi*

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \, | y \in [-1,1]\} \\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 = 9\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 9\} \\
C &= \textit{quoziente di } Z := \{1,2,3\} \times [0,1] \textit{ tramite la relazione di equivalenza} \\
&\quad\ \textit{definita come } (x,y) \sim (x',y') \overset{DEF}{\Leftrightarrow} (x,y) = (x',y') \textit{ o } y = y' \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Determinare quali di essi sono omeomorfi tra loro, motivando la risposta.

Svolgimento. A, B e C sono tutti connessi per archi e quindi connessi.

Mostriamo che $A \cong C$. Consideriamo la mappa $f : Z \to A$ definita come

$$
f(x,y) = \begin{cases} (-\sin(\pi y),\ \cos(\pi y)) & \text{se } x = 1 \\ (0,\ 2y-1) & \text{se } x = 2 \\ (\sin(\pi y),\ \cos(\pi y)) & \text{se } x = 3 \end{cases}
$$

Questa mappa è continua perché le controimmagini degli aperti sono aperti.

Se consideriamo su A la relazione di equivalenza "banale" $\approx$ data da

$$(x,y) \approx (x',y') \overset{DEF}{\Leftrightarrow} (x,y) = (x',y')$$

possiamo osservare che per ogni $(x,y), (x',y') \in Z$,

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow f(x,y) \approx f(x',y'),$$

perché $f(1,0) = f(2,0) = f(3,0) = (0,-1)$ e $f(1,1) = f(2,1) = f(3,1) = (0,1)$.

Grazie al teorema di omeomorfismo di quozienti, la mappa

$$F : C \to A \quad \text{definita come} \quad F([(x,y)]_\sim) = [f(x,y)]_\approx = f(x,y)$$

è ben definita tra $C = Z/\sim$ ed $A = A/\approx$.

Ora notiamo che tale mappa è biettiva da un compatto C (è quoziente di un compatto) ad uno spazio di Hausdorff A (è un sottoinsieme di un Hausdorff) e quindi $F : C \to A$ è l'omeomorfismo cercato.

Infine $A \ncong B$, perché se esistesse un omeomorfismo tra i due spazi, esso sarebbe anche un omeomorfismo locale in tutti i punti, in particolare punti con intorni "a croce" verrebbero mappati nello stesso tipo di punti. Nel primo spazio non ci sono punti "a croce", mentre nel secondo ce ne sono due, pertanto i due spazi non sono omeomorfi.

Abbiamo quindi mostrato che le classi di omeomorfismo degli spazi dati sono $\{A, C\}$ e $\{B\}$. □

Esercizio 5. *Si suddividano in classi di omeomorfismo i seguenti spazi topologici nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$, con la topologia indotta da quella euclidea:*

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1\} \cup \\
&\quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \\
&\quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1\} \cup \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1\} \cup \\
&\quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2-\sqrt{3})^2 + y^2 = 1\}
\end{aligned}
$$

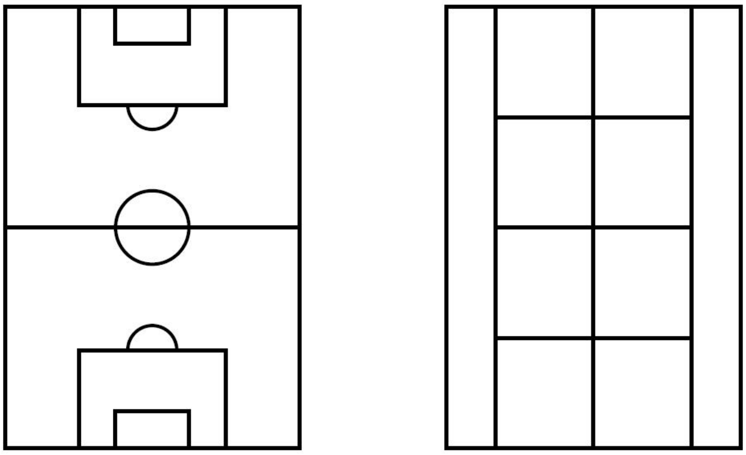
Tratto dagli Esercizi di Geometria - IV unità didattica di E. Tasso e G. Occhetta.

Svolgimento. B ha sei intorni "a croce", mentre A e C ne hanno solo quattro, quindi B non è omeomorfo agli altri due spazi.

C non è omeomorfo ai precedenti perché, a differenza degli altri spazi, ha un punto $P = (1 + \sqrt{3}, 0)$ che sconnette in due componenti connesse.

Abbiamo quindi mostrato che le classi di omeomorfismo degli spazi dati sono $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{C\}$. □

Esercizio 6. *Si suddividano in classi di omeomorfismo i seguenti spazi topologici nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$, con la topologia indotta da quella euclidea:*



Tratto dagli Esercizi di Geometria - IV unità didattica di E. Tasso e G. Occhetta.

Svolgimento. Se esistesse un omeomorfismo tra i due spazi, esso sarebbe anche un omeomorfismo locale in tutti i punti, in particolare punti con intorni "a croce" verrebbero mappati nello stesso tipo di punti. Nel primo spazio ci sono due punti "a croce", mentre nel secondo ce ne sono tre, pertanto i due spazi non sono omeomorfi. □