Esercitazioni di Geometria II

Letizia Pernigotti - pernigotti@science.unitn.it

20 aprile 2012

Esercizio 1. Dimostrare che la famiglia degli intervalli chiusi e limitati

$$\mathcal{B}_1 = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \ : \ a < b\}$$

non è base di alcuna topologia su $\mathbb{R}$, mentre la famiglia

$$\mathcal{B}_2 = \{[q, x] \subset \mathbb{R} \ : \ q \in \mathbb{Q}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

è base di una topologia su $\mathbb{R}$.

Quali sono le topologie generate dalle due famiglie?

※ **Esercizio 1.** Sappiamo che una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di un insieme non vuoto X è una base per una topologia su X se e solo se

(a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$,

(b) dati comunque $A, B \in \mathcal{B}$, l'intersezione $A \cap B$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Consideriamo la famiglia $\mathcal{B}_1$. Essa verifica la condizione (a) ma non la condizione (b). Per ogni terna di numeri reali $a < b < c$ si ha infatti

$$[a, b] \cap [b, c] = \{b\}$$

e l'insieme $\{b\}$ non può in alcun modo esser scritto come unione di intervalli $[x, y]$ con $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$.

La famiglia $\mathcal{B}_2$ verifica invece ambedue le condizioni. La prima è data, per esempio, da

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, \sqrt{2} + n].$$

La seconda si ottiene osservando che una qualsiasi intersezione non vuota di due intervalli $[q_1, x_1]$ e $[q_2, x_2]$ è ancora del tipo $[q, x]$, con $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Non otterrò mai solo un singoletto in quanto estremo destro ed estremo sinistro di due intervalli diversi non possono mai coincidere (il primo è irrazionale, il secondo razionale).

Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che, nel caso della prima famiglia, ogni singoletto è un aperto (in quanto ottenibile come intersezione di due aperti). Dal fatto che qualsiasi arbitraria unione di aperti è essa stessa un aperto segue che ogni possibile sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è un aperto nella topologia generata da $\mathcal{B}_1$. Di conseguenza tale famiglia genera la topologia discreta.

La topologia τ_2 generata dalla famiglia $\mathcal{B}_2$ è costituita da tutte le unioni arbitrarie e le intersezioni finite degli elementi di $\mathcal{B}_2$. Osserviamo che

$$(q, x) = \bigcup_n \left[q + \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n}\right], \quad (q, x] = \bigcup_n \left[q + \frac{1}{n}, x\right], \quad [q, x) = \bigcup_n \left[q, x - \frac{1}{n}\right]$$

appartengono a τ_2 per qualiasi $q \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Sia ora $p \in \mathbb{Q}$. Allora si ha

$$[q,p) = \bigcup_n \left[q + \frac{1}{n}, p - \frac{\sqrt{2}}{n} \right] \in \tau_2.$$

Sia invece $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e sia

$$y = \alpha, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 \cdots$$

la sua scrittura decimale. Definiamo la successione $\{p_n\} \subset \mathbb{Q}$ come

$$p_n := \alpha, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6 \cdots \alpha_n\overline{9}.$$

Facciamo un esempio. Se $y = \pi = 3,1415926535897\cdots$, allora

$$p_1 = 3,1\overline{9}, \quad p_2 = 3,14\overline{9}, \quad p_3 = 3,141\overline{9}, \quad \ldots$$

Ricordando che un numero è irrazionale se e solo se possiede infinite cifre decimali non periodiche, la successione p_n verifica

$$p_n \in \mathbb{Q} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n > y \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \to y.$$

Di conseguenza, si ha

$$(y,x] = \bigcup_n [p_n, x] \in \tau_2.$$

Mettendo insieme i vari pezzi, la topologia τ_2 deve contenere intervalli del tipo

$$\begin{cases} (a,b) & a,b \in \mathbb{R} \\ [q,x] & q \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ [q,b) & q \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} \\ (a,x] & a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Scritto in altro modo, possiamo vederla come la topologia generata da intervalli del tipo

$$\begin{cases} (a,b) & a,b \in \mathbb{R} \\ [q,+\infty) & q \in \mathbb{Q} \\ (-\infty,x] & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

La topologia τ_2 può quindi esser vista come l'unione di tre topologie (euclidea, semirette razionali chiuse a sinistra, semirette irrazionali chiuse a destra) tra loro non confrontabili.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{S}$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ costituita da $\emptyset$, $\mathbb{N}$ e da tutti i sottoinsiemi della forma

$$A_n = \{m \geq n\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si dimostri che $\mathcal{S}$ è una topologia.
(2) Trovare i punti di accumulazione dell'insieme $A = \{3, 7, 51, 107\}$ e determinare $\overline{A}$.
(3) Determinare i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ il cui derivato è $\mathbb{N}$.

※ Esercizio 2.

(1) Per costruzione $\mathcal{S}$ contiene $\mathbb{N}$ e l'insieme vuoto. Rimane da controllare che sia chiusa per intersezioni finite e per unioni arbitrarie. Osserviamo che

$$A_m = [n, \infty) \cap \mathbb{N}.$$

Controlliamo che sia chiusa per intersezioni finite. Basta controllare su due elementi generici:

$$A_n \cap A_m = A_{\max n,m} \in \mathcal{S}.$$

Consideriamo un'unione arbitraria di elementi di $\mathcal{S}$:

$$\bigcup_{i \in I} A_{n_i} = \left(\bigcup_{i \in I} [n_i, \infty) \right) \cap \mathbb{N} = \begin{cases} (\alpha, \infty) \cap \mathbb{N} \\ [\alpha, \infty) \cap \mathbb{N} \end{cases}$$

Osserviamo che, in ambedue i casi, otteniamo ancora un intervallo del tipo A_m. Di conseguenza $\mathcal{S}$ rappresenta una topologia su $\mathbb{N}$.

Nota: Consideriamo $(\mathbb{R}, \tau)$ con τ la topologia generata dagli intervalli del tipo (a, ∞) con $a \in \mathbb{R}$. Allora $\mathcal{S}$ è semplicemente la topologia indotta su $\mathbb{N}$.

(2) Ricordiamo che un punto $x \in X$ è di accumulazione per $S \subset X$ se e solo se ogni intorno di x contiene almeno un punto di S diverso da x.

Sia $n \in \mathbb{N}$. Gli intorni aperti di n sono tutti e solo gli aperti del tipo A_m con $m \leq n$. Di conseguenza, un punto n è di accumulazione per $A = \{3, 7, 51, 107\}$ se e solo se ogni aperto del tipo A_m con $m \leq n$ contiene almeno un punto di $A \setminus \{n\}$. Ciò implica che ogni $n < \max A$ è di accumulazione per A, in quanto ogni intorno aperto di n è del tipo A_m con $m \leq n$ e di conseguenza contiene di sicuro l'elemento $\max A$ in quanto $\max A > n$. Viceversa, se $n \geq \max A$, allora l'intorno A_n non contiene alcun elemento di $A \setminus \{n\}$ in quanto, per costruzione, $A \setminus \{n\}$ contiene solo elementi $< \max A$.

In conclusione, i punti di accumulazione di A sono dati da

$$D(A) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n < 107\}$$

e quindi la chiusura di A è data da

$$\overline{A} = A \cup D(A) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq 107\}.$$

(3) Nel punto precedente abbiamo dimostrare che se $N \subset \mathbb{N}$ è un sottoinsieme finito, allora

$$\overline{N} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \leq \max N\} \neq \mathbb{N}.$$

Se N è invece un sottoinsieme infinito, allora qualsiasi aperto del tipo A_n interseca N. Infatti, se esistesse A_{n_0} non intersecante N, ciò forzerebbe ogni elemento $n \in N$ a verificare $n \leq n_0$ e questo implicherebbe la finitezza di N, contro la nostra ipotesi iniziale. Ciò significa che qualsiasi punto di $\mathbb{N}$ è di accumulazione per N e dunque

$$D(N) = \overline{N} = \mathbb{N}.$$

Mettendo insieme le due cose, abbiamo dimostrato che

$$D(N) = \mathbb{N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad N \text{ è infinito.}$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$:

$$S = \left\{ \frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si dimostri che $\overline{S} = S \cup \{1\}$ nella topologia euclidea.
(2) Si dimostri che $\overline{S} = \mathbb{R}$ nella topologia cofinita.

※ Esercizio 3.

(1) Dimostriamo innanzitutto che $1 \in \overline{S}$. Sappiamo che

$$1 = \lim_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

e dunque che, per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n \in D_\varepsilon(1).$$

Fissiamo un intorno W qualsiasi di 1. Allora, per definizione di base di una topologia, esiste una palla B di raggio ε centrata in 1 e contenuta in W. Per definizione di limite, esiste un indice n_0 a partire dal quale tutti gli elementi della successione x_n sono contenuti in B e quindi anche in W. Ciò dimostra che 1 è di accumulazione per S e quindi appartiene alla sua chiusura.

Supponiamo ora che $y \notin S \cup \{1\}$ sia di accumulazione per S e considero la seguente successione di intorni di y:

$$B_k(y) =: \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ |x-y| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Essendo di accumulazione per S, avrei che

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \text{ t.c.} \quad |y - x_{n_k}| < \frac{1}{k}.$$

Ciò significa che la sottosuccessione x_{n_k} di x_n tende al valore y. Tuttavia ciò non è possibile, perché $y \neq 1$ ed essendo x_n convergente a 1 anche ogni sua sottosuccessione convergente deve convergere allo stesso limite.

(2) Nel caso di $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita, essendo $\mathbb{R}$ infinito, ogni aperto deve essere infinito egli stesso (per poter avere complementare finito). Sia A un aperto di $\mathbb{R}$ e sia $p \in S$ un suo punto qualsiasi. Osserviamo che

$$A \cap (S \setminus \{p\}) = \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^c \cup (S \setminus \{p\})^c = \mathbb{R}$$

Poiché A è finito e $\sharp(S \setminus \{p\}) = \sharp\mathbb{N} = \aleph_0$, ciò non è mai possibile. Ciò significa che qualsiasi aperto di $\mathbb{R}$ interseca S e che dunque

$$\overline{S} = \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. Su $\mathbb{R}$ si considerino le seguenti topologie

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \text{ topologia euclidea} \\
\mathcal{I}_s &= \{(-\infty, b) \ : \ b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \mathbb{R} \\
\mathcal{I}_d &= \{(a, +\infty) \ : \ b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \mathbb{R} \\
\mathcal{J}_s &= \{(a, b] \ : \ b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \mathbb{R} \\
\mathcal{J}_d &= \{[a, b) \ : \ b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \mathbb{R} \\
\mathcal{C} &= \text{ topologia dei cofiniti}
\end{aligned}$$

Determinare, in ciascuna delle topologie elencate, frontiera, chiusura e interno del sottoinsieme $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ per $a < b$ due numeri reali.

※ **Esercizio 4.** Nel caso euclideo, come è già noto, si ha

$$\partial A = \{a, b\}, \quad \overline{A} = [a, b], \qquad \overset{\circ}{A} = (a, b).$$

Consideriamo le diverse topologie.

($\mathcal{I}_s$) Ogni aperto del tipo $(-\infty, c)$ interseca A e $\mathbb{R} \setminus A$ ogniqualvolta $c > a$. Sicuramente $c \in \overline{A}$ per ogni $c > a$. Consideriamo un intorno aperto di $x = a$: anch'esso, in quanto aperto, sarà del tipo $(-\infty, c)$ con $c > a$ e dovrà intersecare per forza l'intervallo $(a, b]$. Di conseguenza

$$\partial A = \overline{A} = [a, +\infty).$$

I punti interni di A sono invece quei punti per i quali esiste almeno un intorno interamente contenuto in A. Poiché ogni aperto in $\mathcal{I}_s$ è del tipo $(-\infty, x)$, nessun intorno aperto di nessun punto può essere interamente contenuto in $[a, b]$ e dunque

$$\overset{\circ}{A} = \emptyset.$$

($\mathcal{I}_d$) Con ragionamenti esattamente analoghi e simmetrici rispetto al punto precedente, si vede come

$$\partial A = \overline{A} = (-\infty, b], \qquad \overset{\circ}{A} = \emptyset.$$

($\mathcal{J}_s$) Sicuramente ogni punto di (a, b) ammette un intorno strettamente contenuto in $A = [a, b]$ e dunque $\partial A \cap (a, b) = \emptyset$. Analogamente per ogni punto di $A^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Consideriamo allora i due punti $\{a, b\}$. Il punto $b \in \mathbb{R}$ non appartiene alla frontiera in quanto, per esempio, il suo intorno definito da

$$\mathcal{N}_b = \left(\frac{a + b}{2}, b \right]$$

verifica $\mathcal{N}_b \subset A$. Il punto $a \in \mathbb{R}$ invece appartiene alla frontiera in quanto qualsiasi suo intorno del tipo $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ deve intersecare sia A che il suo complementare.

Per lo stesso motivo, i punti di (a, b) sono ovviamente interni ad A ed interno è anche il punto $b \in \mathbb{R}$ poiché, per esempio, $\mathcal{N}_b$ è un suo intorno interamente contenuto in A.

$$\partial A = \{a\}, \quad \overline{A} = [a, b], \quad \overset{\circ}{A} = (a, b].$$

($\mathcal{J}_d$) Con ragionamenti esattamente analoghi e simmetrici rispetto al punto precedente, si vede come

$$\partial A = \{b\}, \quad \overline{A} = [a,b], \quad \mathring{A} = [a,b).$$

($\mathcal{C}$) Ogni aperto U di $\mathbb{R}$ deve avere complementare finito. Osserviamo che

$$U \cap [a,b] = \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad [a,b] \subset U^c.$$

Poiché U^c è finito per ogni aperto U di $\mathbb{R}$, tale U^c non può mai contenere l'intervallo $[a,b]$. Di conseguenza ogni aperto di $\mathbb{R}$ interseca sempre $[a,b]$ (e - per lo stesso motivo - interseca sempre anche il suo complementare). Ciò significa che ogni punto di $\mathbb{R}$ è di frontiera per A e dunque

$$\partial A = \mathbb{R}, \quad \overline{A} = \mathbb{R}, \quad \mathring{A} = \emptyset.$$