GEOMETRIA 1

Secondo semestre
Foglio di Esercizi 1

Esercizio 1. Calcola la segnatura e la forma normale delle seguenti forme quadratiche:

- $8x^2 - 4xy + 4xz + 5y^2 + 8yz + 5z^2$
- $9x^2 + 4xz + 6z^2 - 10y^2$
- $x^2 + 6xy + y^2 + 2xz + yz + 12z^2$
- $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}xz + 38z^2$
- $25x^2 - 7y^2 + 48yz + 7z^2$
- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6xz + z^2$

Detta A la matrice associata alla forma quadratica rispetto alla base canonica, trova una matrice M ortogonale tale che ${}^tMAM$ sia diagonale.

Esercizio 2. Data la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$

$$q(x, y, z) = 2xy - xz - 3yz - kz^2$$

- stabilisci per quali valori di k la forma quadratica è degenere
- stabilisci la segnatura della forma quadratica al variare di k in $\mathbb{R}$

Esercizio 3. Data su $\mathbb{R}^4$ la forma quadratica

$$q_{a,b}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 2b(xt + yz)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

- Calcola la segnatura di $q_{a,b}$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$
- Determina per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale $q_{a,b}$ assume la forma diagonale/normale.

Esercizio 4. Sia $V := \mathbb{R}[t]_{\leq n}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a n. Sia $b\colon V \times V \to R$ definita come

$$b(p, q) := \int_0^1 p(t) \cdot q(t)dt$$

- Dimostra che b è una forma bilineare simmetrica
- Dimostra che b è semidefinita positiva
- Dimostra che b è un prodotto scalare
- Trova una base di V ortonormale rispetto al prodotto scalare definito da b per $n = 2$.

Esercizio 5. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ è definita la seguente forma bilineare simmetrica:

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$$

- Verifica che g definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
- Trova un'equazione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a

$$U\colon \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

  rispetto al prodotto scalare g.
- Scrivere l'espressione esplicita della proiezione ortogonale su U rispetto a g.

Esercizio 6. Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ è definita la seguente forma bilineare simmetrica:

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3$$

- Verifica che g definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
- Trova un'equazione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $r := \langle {}^t(1\ 0\ 0) \rangle$.

Esercizio 7. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard. Sia $l := P + tv$ la retta affine di $\mathbb{R}^n$ passante per P con giacitura generata dal vettore v e sia $R \in \mathbb{R}^n$. Definiamo la *distanza tra* R *e* l $d(R,l)$ nel seguente modo:

$$d(R,l) := \min_{Q \in l} d(R,Q).$$

Dimostra che il punto $Q \in l$ che realizza la minima distanza tra R e l è l'unico punto della retta tale che $(R - Q)$ è ortogonale alla direzione di r.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{A}$ spazio affine con riferimento affine $Oe_1e_2e_3$ e siano

$$r_1\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \qquad r_2\colon \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

due rette.

- Determina la posizione relativa delle rette r_1 e r_2
- Trova un'equazione parametrica e cartesiana del piano π contenente r_1 che taglia r_2 perpendicolarmente
- Trova un'equazione parametrica e cartesiana della retta di $\mathbb{A}$ che interseca r_1 ed r_2 perpendicolarmente
- Calcola la distanza tra le rette r_1 e r_2

Esercizio 9. Si considerino i piani di equazioni

$$\pi_1\colon x + z + y = 0, \qquad \pi_2\colon x - y - z = -1$$

Determina l'equazione del piano per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

Esercizio 10. Nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i piani di equazioni

$$\pi_1\colon 3x - y + z = 0, \qquad \pi_2\colon 2x + y = 0$$

- Scrivi le equazioni parametriche della retta r intersezione di π_1 e π_2
- Determina un'equazione cartesiana del piano ortogonale a r e passante per il punto $P = (2, 1, 0)$
- Trova la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r

Esercizio 11. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale reale, siano

$$P(2, 3, -1) \qquad Q(0, 1, 0) \qquad \overrightarrow{d} = (1, -1, 1)$$

e sia π_k il piano di equazione $2x + ky + 2z = 1$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Calcola delle equazioni parametriche e cartesiane di r e s_k, dove r è la retta passante per P con direzione $\overrightarrow{d}$ e s_k è la retta passante per Q ortogonale al piano π_k
- Determina la posizione reciproca di r ed s_k al variare di k in $\mathbb{R}$. Trova un'equazione del piano contenente le due rette quando queste sono coplanari
- Determina le coordinate del punto R di r che dista $2\sqrt{3}$ da P tale che la coordinata z di R sia positiva
- Detto $T = (4 + \sqrt{2}, 1, 1 - \sqrt{2})$, determina l'ampiezza degli angoli e l'area del triangolo PRT.

Esercizio 12. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ sia ρ la riflessione rispetto alla retta $2y - x = 2$ e τ la traslazione rispetto al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Scrivi esplicitamente le espressioni di ρ e τ
- Dimostra che ρ e τ non commutano
- Classifica le trasformazioni $\rho \circ \tau$ e $\tau \circ \rho$, trovandone eventuali punti fissi o rette fissate

Esercizio 13. Dimostra che nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ una traslazione di vettore v e una riflessione rispetto ad un sottospazio affine A con giacitura W commutano se e solo se $v \in W$.