

GEOMETRIA 1

Secondo semestre
Foglio di Esercizi 2

Esercizio 1. Classifica ciascuna delle seguenti coniche euclidee e trova un'isometria che porti l'equazione in forma canonica:

- $8x^2 + 17y^2 + 12xy + 4x + 3y - 2 = 0$
- $4x^2 + y^2 + 4xy + 8x + 4y - 5 = 0$
- $x^2 + y^2 + xy + x + y = 1$
- $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10 = 0$

Esercizio 2. Classifica ciascuna delle seguenti coniche euclidee e trova un'isometria diretta che porti l'equazione in forma canonica:

- $5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0$
- $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 12 = 0$
- $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = 0$
- $2y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$

Esercizio 3. Classifica ciascuna delle seguenti coniche proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e determina un opportuno sistema di coordinate proiettive omogenee rispetto al quale la conica assume equazione canonica:

- $x_0^2 - 2x_0x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$
- $x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0$

Esercizio 4. Classifica la seguente conica euclidea \mathcal{C}_t al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{C}_t: \quad x^2 + (1-t)y^2 + 2tx - 2(1-t)y + 2 - t = 0$$

Esercizio 5. Classifica la seguente conica affine \mathcal{C}_a al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ e trova un'affinità che porti la conica nella sua forma canonica

$$\mathcal{C}_a: \quad x^2 + a^2y^2 + 2ax + 2axy - 2y + 1 = 0$$

Esercizio 6. Si consideri nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la conica proiettiva

$$\mathcal{C}: \quad x_0^2 + x_1x_2 - x_0x_1 = 0$$

- Classifica la conica \mathcal{C}
- Classifica le coniche affini che si ottengono restringendo \mathcal{C} alle tre carte affini $E_i := \{x_i \neq 0\}$, calcolandone i punti all'infinito

Esercizio 7. Si considerino nel piano affine complesso $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ le parabole

$$\mathcal{P}_1: y = x^2 \quad \mathcal{P}_2: x = y^2$$

- Scrivi mediante le sostituzioni $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$ l'equazione in coordinate omogenee $Q_i(x_0, x_1, x_2)$ di $\overline{\mathcal{P}}_i$, chiusura proiettiva di \mathcal{P}_i per $i = 1, 2$.
- Classifica la conica proiettiva di equazione

$$\mathcal{C}(\lambda, \mu): \quad \lambda Q_1(x_0, x_1, x_2) + \mu Q_2(x_0, x_1, x_2) = 0$$

al variare dei parametri omogenei $[\lambda : \mu]$.

- Determina il tipo affine della conica di equazione

$$\mathcal{C}_0(\lambda, \mu): \quad \lambda Q_1(1, x, y) + \mu Q_2(1, x, y) = 0$$

al variare dei parametri omogenei $[\lambda : \mu]$.

Esercizio 8. Dimostra che ciascuna delle seguenti quadriche euclidee in \mathbb{R}^3 è non degenera, classificala e determina un'isometria che porti la quadrica in forma canonica

- $x^2 - 2xy - 2xz + 2x - 4y + 4 = 0$
- $x^2 + 2\sqrt{6}xy + 2x + y^2 + 6y + 9 - z = 0$
- $x^2 - 2xy + 2yz - z^2 + 2x + 2y - 8z + 1 = 0$

Esercizio 9. Dovo aver dimostrato che le seguenti equazioni identificano quadriche non degeneri, determina il tipo delle seguenti quadriche euclidee in \mathbb{R}^3 sfruttando lo studio della segnatura della matrice associata

- $x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2z + 10 = 0$
- $x^2 - y^2 + z^2 - 4xy + 2x - 2z + 10 = 0$

Esercizio 10. Determina la natura della quadrica euclidea in \mathbb{R}^3 di equazione

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2yz - 2xz - 12 = 0$$

e trova le rette che appartengono alla quadrica parallele alla retta di equazione

$$\frac{x-1}{2} = y+3 = -z$$

Esercizio 11. Sia \mathcal{C}_t la quadrica in \mathbb{R}^3 di equazione

$$Q_t(x, y, z): \quad (1+t)x^2 + ty^2 + (1-t)z^2 + 4y + 2z + 1 = 0;$$

Determina:

- $D := \{t \in \mathbb{R} \mid \mathcal{C}_t \text{ è degenera}\}$;
- il tipo affine di \mathcal{C}_t al variare di $t \in \mathbb{R} \setminus D$.