A.A. 2010/2011

Esercizi di Geometria II

Spazi affini, euclidei e proiettivi

Preparazione all'esame scritto

Esercizio 1. Sia $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il 3–spazio affine reale numerico dotato del riferimento affine standard di coordinate (x, y, z). Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la quadrica $\mathcal{Q}(k)$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$\mathcal{Q}(k) : k^2z^2 + 2xy - 2xz - 2x + 2z = 0.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si dimostri che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la quadrica $\mathcal{Q}(k)$ è nondegenere.

(2) Si determini la forma canonica di $\mathcal{Q}(k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3–spazio euclideo ordinario dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Definiamo il piano affine Π e, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la retta affine $r(k)$ di $\mathbb{E}^3$ ponendo

$$\Pi : 2x - y + z = 2 \qquad \text{e} \qquad r(k) : \begin{cases} kx - 2y = k \\ x - 2z = -3. \end{cases}$$

Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che:

(1) $r(k)$ sia perpendicolare a Π;

(2) $r(k)$ sia parallela a Π;

(3) $r(k)$ sia contenuta in Π;

(4) $r(k)$ intersechi Π con un angolo di $\pm\pi/6$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{E}^4$ il 4–spazio euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z, w). Siano $P_1(1, 0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, -1, 0)$, $P_3(0, 0, -1, -1)$ e $P_4(2, 0, 1, 3)$ punti di $\mathbb{E}^4$ e sia S il sottospazio affine di $\mathbb{E}^4$ generato da P_1, P_2, P_3 e P_4.
Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si calcoli la dimensione di S ed un sistema di equazioni cartesiane per S.

(2) Si determinino un'equazione cartesiana dell'iperpiano affine di $\mathbb{E}^4$ parallelo a S e passante per $O(0, 0, 0, 0)$ e per $Q(0, 1, 0, 0)$.

(3) Si determini infine un sistema di equazione parametriche per il 2–piano affine di $\mathbb{E}^4$ passante da P_1 e perpendicolare a S.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il 3–spazio affine reale numerico dotato del riferimento affine standard di coordinate (x, y, z). Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la quadrica $\mathcal{Q}(k)$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$\mathcal{Q}(k) : \; kx^2 + 4yz - 2kx + 4z + k - 1 = 0.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si dimostri che la quadrica $\mathcal{Q}(k)$ è nondegenere e si determini la sua forma canonica.

(2) Si dimostri che $\mathcal{Q}(0)$ è affinemente equivalente alla quadrica di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di equazione $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$$\mathcal{C} : \; 3x_0^2 + 8x_1^2 + x_2^2 + 6x_0x_1 + 2x_1x_2 + 4x_0x_2 = 0.$$

Si determini la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ ed una proiettività $T : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $\mathcal{D} = T^{-1}(\mathcal{C})$.

Si ripeta il presente esercizio rimpiazzando $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3–spazio euclideo ordinario dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo i piani affini $\pi_1(k)$, $\pi_2(k)$ e $\pi_3(k)$ di $\mathbb{E}^3$ ponendo

$$\pi_1(k) : kx - z = k + 1, \quad \pi_2(k) : ky + (1 - k)z = k \quad \text{e} \quad \pi_3(k) : kx - 3ky - z = 3.$$

Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che:

(1) i piani $\pi_1(k)$, $\pi_2(k)$ e $\pi_3(k)$ siano a due a due paralleli;

(2) l'intersezione $\pi_1(k) \cap \pi_2(k)$ sia una retta affine di $\mathbb{E}^3$ parallela a $\pi_3(k)$;

(3) l'intersezione $\pi_1(k) \cap \pi_2(k)$ sia una retta affine di $\mathbb{E}^3$ perpendicolare a $\pi_3(k)$.

Esercizio 7. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Sia $\mathbb{E}^3$ il 3–spazio euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Definiamo le rette affini r e s di $\mathbb{E}^3$ ponendo

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 6. \end{cases}$$

Si dimostri che r e s sono sghembe e si calcoli la loro distanza facendo uso della nozione di perpendicolare comune.

(2) Sia $\mathbb{E}^4$ il 4–spazio euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z, w). Definiamo la retta affine q e il 2–piano affine π di $\mathbb{E}^4$ ponendo

$$q : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \\ w = -t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - w = 1. \end{cases}$$

Si dimostri che r e π sono paralleli e si calcoli la loro distanza. Si determini inoltre un sistema di equazioni cartesiane del 2–piano π' di $\mathbb{E}^4$ passante per $P(3, 2, 2, 1)$ e perpendicolare a π.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ il 3–spazio proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Definiamo la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$\mathcal{Q} : \ -x_0^2 + 4x_0x_1 - 2x_0x_2 + 2x_0x_3 + 4x_2x_3 = 0.$$

Si dimostri che $\mathcal{Q}$ è nondegenere e si calcoli la sua forma canonica.

Si ripeta il presente esercizio rimpiazzando $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$.

Esercizio 9. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3–spazio euclideo ordinario dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Definiamo le rette affini r e r' di $\mathbb{E}^3$ ponendo

$$r : \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = -1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r' : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si dimostri che le rette r e r' sono sghembe.

(2) Si determini un sistema di equazioni cartesiane per la retta affine r'' di $\mathbb{E}^3$ perpendicolare sia a r che a r'. Si calcoli inoltre la distanza tra r e r'.

(3) Sia $\mathcal{X}$ l'asse X di $\mathbb{E}^3$, sia $\mathcal{Z}$ l'asse Z di $\mathbb{E}^3$ e sia s la retta affine di $\mathbb{E}^3$ definita dalle equazioni cartesiane $x = 3$ e $z = 0$. Si scriva esplicitamente una affinità $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ di $\mathbb{E}^3$ tale che $f(\mathcal{Z}) = |r|$, $f(\mathcal{X}) = |r''|$ e $f(|s|) = |r'|$. Si dica infine se esiste un'isometria di $\mathbb{E}^3$ con le stesse proprietà.

`N.B.` Data una retta q, il simbolo $|q|$ denota il supporto di q.

Esercizio 10. Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ il piano affine reale numerico dotato del riferimento affine standard di coordinate (x, y). Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo le coniche $\mathcal{C}_1(k)$, $\mathcal{C}_2(k)$, $\mathcal{C}_3(k)$, $\mathcal{C}_4(k)$ e $\mathcal{C}_5(k)$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$\mathcal{C}_1(k) : \ 3x^2 + ky^2 - 6xy + 2y + 1 = 0;$

$\mathcal{C}_2(k) : \ ky^2 + 4xy + 2x + 2ky + k = 0;$

$\mathcal{C}_3(k):\ k^2x^2+(k^2+k)y^2-2(k^2-1)x+k^2-1=0$ (in questo caso dobbiamo anche assumere $k\neq 0$, perchè?);

$\mathcal{C}_4(k):\ -kx^2-y^2-2xy+2x+2y+1=0$;

$\mathcal{C}_5(k):\ kx^2+2xy+2kx-2y+k+4=0$.

Per ogni $j\in\{1,2,3,4,5\}$, si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Per ogni $k\in\mathbb{R}$, si determini la forma canonica $\mathcal{D}_j(k)$ di $\mathcal{C}_j(k)$ (o, equivalentemente, il tipo affine di $\mathcal{C}_j(k)$: ellisse, ellisse a punti non reali, ellisse degenere, iperbole, iperbole degenere, parabola, parabole degeneri, conica doppiamente degenere).

(2) Per ogni valore di $k\in\mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_j(k)$ si decompone in prodotto di rette affini di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (anche coincidenti), si calcolino equazioni cartesiane di tali rette affini.

(3) Si determinino i valori del parametro $k\in\mathbb{R}$ in modo che il supporto di $\mathcal{C}_j(k)$ consista di un solo punto.

Si ripeta il presente esercizio rimpiazzando $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$.

Esercizio 11. Sia $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il 3–spazio affine reale numerico dotato del riferimento affine standard di coordinate (x,y,z) e sia q la retta affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per $P(0,-4,0)$ e per $Q(3,5,3)$. Per ogni $k\in\mathbb{R}$, definiamo le rette affini $r(k)$ e $s(k)$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$r(k):\begin{cases}(k+1)x-2y=k^2+k+2\\ kx-z=k^2-k\end{cases}\qquad\text{e}\qquad s(k):\begin{cases}x+(k-2)y=k^2-3k+2\\ ky-z=k^2-k.\end{cases}$$

Al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$ si determini se le seguenti coppie di rette sono coincidenti, parallele non coincidenti, incidenti non coincidenti o sghembe:

(1) $r(k)$ e $s(k)$;

(2) $r(k)$ e q;

(3) $s(k)$ e q.

Esercizio 12. Sia $\mathbb{P}^2(R)$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0,x_1,x_2]$. Per ogni $k\in\mathbb{R}$, definiamo le coniche $\mathcal{C}_1(k)$, $\mathcal{C}_2(k)$ e $\mathcal{C}_3(k)$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$\mathcal{C}_1(k):\ (k^2-1)x_0^2+k^2x_1^2+(k^2+k)x_2^2-2(k^2-1)x_0x_1=0$;

$\mathcal{C}_2(k):\ x_0^2+kx_1^2+x_2^2-2x_0x_2+4x_1x_2=0$;

$\mathcal{C}_3(k):\ -kx_0^2+x_1^2+(k-1)x_2^2+2x_0x_1-2x_0x_2=0$.

Per ogni $j\in\{1,2,3\}$, si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Per ogni $k\in\mathbb{R}$, si determini la forma canonica $\mathcal{D}_j(k)$ di $\mathcal{C}_j(k)$ (o, equivalentemente, il tipo proiettivo di $\mathcal{C}_j(k)$: conica generale, conica generale a punti non reali, coniche semplicemente degeneri, conica doppiamente degenere). [Nota 1: vedi p. 8]

(2) Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_j(k)$ si decompone in prodotto di rette proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (anche coincidenti), si calcolino equazioni cartesiane di tali rette proiettive.

(3) Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che

(3.1) il supporto di $\mathcal{C}_j(k)$ sia vuoto;

(3.2) il supporto di $\mathcal{C}_j(k)$ sia un punto;

(3.3) esista una retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che contiene il supporto di $\mathcal{C}_j(k)$;

(3.4) il supporto di $\mathcal{C}_j(k)$ sia uguale all'unione di due rette proiettive distinte di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Si ripeta il presente esercizio rimpiazzando $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$.

Esercizio 13. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e siano H_0 e H_2 le rette proiettive di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definite ponendo $H_0 : x_0 = 0$ e $H_2 : x_2 = 0$. Denotiamo con r la retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita dall'equazione cartesiana $x_0 + x_1 = 0$ e con r' la retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $P = [1, 0, 0]$ e $Q = [3, -2, 2]$.

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si calcoli l'intersezione $|r| \cap |r'|$.

(2) Si scriva esplicitamente una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(|H_0|) = |r|$, $f(|H_2|) = |r'|$ e $f([4, -2, 1]) = [4, -2, 1]$.

Esercizio 14. Sia $\mathbb{P}^3(R)$ il 3–spazio proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo le rette proiettive $r(k)$ e $s(k)$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$r(k) : \begin{cases} (k+1)x_0 - (k+1)x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s(k) : \begin{cases} kx_0 - x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} .$$

Si determinino i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che:

(1) le rette $r(k)$ e $s(k)$ siano sghembe;

(2) le rette $r(k)$ e $s(k)$ siano incidenti non coincidenti;

(3) la retta $r(k)$ sia contenuta nel piano proiettivo R di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e la retta $s(k)$ sia contenuta nel piano proiettivo S di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione cartesiana $x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Esercizio 15. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo ordinario dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo le coniche $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ e $\mathcal{C}_7$ di $\mathbb{E}^2$ ponendo

$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0;$

$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 2xy - 2y = 0;$

$\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 5xy + 4y = 0;$

$\mathcal{C}_4 : x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 1 = 0;$

$\mathcal{C}_5 : -y^2 + \sqrt{3}xy = 0;$

$\mathcal{C}_6 : 5x^2 + 5y^2 + 2x - 4y + 1 = 0;$

$\mathcal{C}_7 : 5x^2 + 5y^2 - 4x + 2y + 2 = 0.$

Per ogni $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, si determini la forma canonica $\mathcal{D}_j$ di $\mathcal{C}_j$ e si scriva esplicitamente un'isometria diretta $T_j : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ di $\mathbb{E}^2$ tale che $\mathcal{C}_j = (T_j)^{-1}(\mathcal{D}_j)$.

Per ogni $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, se $\mathcal{C}_j$ risulta essere

- un'ellisse, si calcolino il centro e gli assi di simmetria;
- un'iperbole, si calcolino il centro, gli assi di simmetria e gli asintoti;
- una parabola, si calcolino il vertice e l'asse di simmetria;
- un'ellisse degenere, si calcolino equazioni delle rette complesse coniugate distinte in cui si decompone;
- un'iperbole degenere, si calcolino equazioni delle rette reali distinte in cui si decompone;
- una conica doppiamente degenere, si calcoli un'equazione della retta reale doppia in cui si decompone.

Esercizio 16. Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Definiamo le rette proiettive H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 e r_0, r_3, r_4 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$$H_0 : x_0 = 0, \quad H_1 : x_1 = 0, \quad H_2 : x_2 = 0, \quad H_3 : 2x_0 - x_2 = 0, \quad H_4 : \begin{cases} x_0 = s \\ x_1 = s \\ x_2 = t + 2s \end{cases}$$

e

$$r_0 : \begin{cases} x_0 = t + s \\ x_1 = -t \\ x_2 = -s \end{cases}, \qquad r_3 : x_0 + x_1 = 0, \qquad r_4 : \begin{cases} x_0 = t + s \\ x_1 = -t \\ x_2 = t - s \end{cases}.$$

Si dimostri che esite un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(|H_1|) = |H_1|$, $f(|H_2|) = |H_2|$, $f(|H_3|) = |r_3|$ e $f(|H_4|) = |r_4|$. Si scriva esplicitamente f e si provi che $f(|H_0|) = |r_0|$.

Esercizio 17. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3–spazio euclideo ordinario dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z) e sia P il punto di $\mathbb{E}^3$ di coordinate $(-1, -1, -1)$. Definiamo le rette affini r e r' di $\mathbb{E}^3$ ponendo

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -x + y - 2z = 0. \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r' : \begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ 3x - 2y - z = 6. \end{cases}$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si determini un sistema di equazioni cartesiane della retta s_1 passante per P e complanare sia a r che a r'.

(2) Si determini un sistema di equazioni parametriche per la retta affine s_2 di $\mathbb{E}^3$ passante per P, incidente a r e ad essa perpendicolare. Si calcoli inoltre la distanza di P da r ed una equazione cartesiana del piano affine π di $\mathbb{E}^3$ passante per P e perpendicolare a r.

(3) Si dimostri che r e r' sono sghembe. Si determini inoltre un sistema di equazioni parametriche per la perpendicolare comune s_3 a r e a r'.

(4) Si calcoli un sistema di equazioni cartesiane della retta affine s_4 di $\mathbb{E}^3$ passante per $Q(5, -1, 6)$ e incidente sia a r che a r'.

Esercizio 18. Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Sia $\mathbb{P}^2(R)$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Definiamo i punti A_1, B_1, C_1, D_1 e E_1 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ponendo

$$A_1 := [1, 1, 0], \;\; B_1 := [1, 1, -1], \;\; C_1 := [0, 0, 1], \;\; D_1 := [3, 1, 0] \;\text{ e }\; E_1 := [-1, 1, -1].$$

Si dimostri che i punti A_1, B_1 e C_1 sono allineati e si calcoli un'equazione cartesiana della retta proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per tali punti. Si dimostri inoltre che i punti A_1, B_1, D_1 e E_1 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono in posizione generale.

(2) Sia $\mathbb{P}^3(R)$ il 3–spazio proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Definiamo i punti A_2, B_2, C_2, D_2 e E_2 di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$A_2 := [1, 0, -2, 1], \;\; B_2 := [0, 1, 1, 0], \;\; C_2 := [1, 2, 0, 1], \;\; D_2 := [0, 1, 1, -1] \;\text{ e }\; E_2 := [1, 2, 0, 2].$$

Si dimostri che i punti A_2, B_2 e C_2 sono allineati e si calcoli un sistema di equazioni cartesiane della retta proiettiva di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per tali punti. Si dimostri inoltre che i punti A_2, B_2, D_2 e E_2 sono complanari ma non allineati, e si calcoli un'equazione cartesiana del piano proiettivo di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per tali punti.

(3) Sia $\mathbb{P}^4(R)$ il 4–spazio proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Definiamo i punti A_3, B_3, C_3 e D_3 di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ ponendo

$$A_3 := [1, 0, 0, 1, 0], \;\; B_3 := [0, 1, 0, 0, 1], \;\; C_3 := [1, -2, 0, 1, -2] \;\text{ e }\; D_3 := [0, 0, 1, -1, 0].$$

Si calcoli la dimensione del sottospazio affine π di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ generato dai punti A_3, B_3, C_3 e D_3. Si determini un sistema di equazioni cartesiane per π.

NOTA 1. Per calcolare la segnatura di forme quadratiche si può (non "si deve"!) utilizzare la seguente *Regola di Cartesio* per trovare il segno delle radici di un polinomio reale.

Teorema *Sia* $P(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ *un polinomio a coefficienti reali con* $\alpha_d \alpha_0 \neq 0$ *avente tutte le radici reali. Allora il numero di radici positive di* P*, contate con molteplicità, è uguale al numero di variazioni di segno nella successione* $(\alpha_d, \ldots, \alpha_0)$ *dei coefficienti non nulli di* P*.*

NOTA 2. Per ogni esercizio indichiamo la/le Sezione/Sezioni del libro di Edoardo Sernesi "Geometria 1", Bollati Boringhieri 1989, contenente argomenti di teoria utili per la risoluzione dell'esercizio stesso:

Esercizio 1 $\longmapsto$ *Sezione 31 (Complementi)*
Esercizio 2 $\longmapsto$ *Sezioni 10 e 19*
Esercizio 3 $\longmapsto$ *Sezione 7*
Esercizio 4 $\longmapsto$ *Sezione 31 (Complementi)*
Esercizio 5 $\longmapsto$ *Sezione 30*
Esercizio 6 $\longmapsto$ *Sezioni 10 e 19*
Esercizio 7 $\longmapsto$ *Sezioni 10 e 19*
Esercizio 8 $\longmapsto$ *Sezione 30*
Esercizio 9 $\longmapsto$ *Sezioni 10, 14 e 19*
Esercizio 10 $\longmapsto$ *Sezione 31*
Esercizio 11 $\longmapsto$ *Sezione 10*
Esercizio 12 $\longmapsto$ *Sezione 30*
Esercizio 13 $\longmapsto$ *Sezioni 24 e 27*
Esercizio 14 $\longmapsto$ *Sezione 24*
Esercizio 15 $\longmapsto$ *Sezione 31*
Esercizio 16 $\longmapsto$ *Sezioni 24 e 27*
Esercizio 17 $\longmapsto$ *Sezioni 10 e 19*
Esercizio 18 $\longmapsto$ *Sezione 24*