Geometria 2/Topologia

Esercizio 1 Sia $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid \; a,b \in \mathbb{R}\}$.

1. Si provi che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$.

   Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ avente per base $\mathcal{B}$.

2. Si provi che $\mathbb{R}$ con la topologia τ è sconnesso e se ne determinino le componenti connesse.

3. Si provi che ogni funzione continua $(\mathbb{R}, \varepsilon) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è costante, dove ε denota la topologia euclidea.

Esercizio 2 Sia X un insieme e sia $p \in X$ un elemento fissato. Si consideri l'insieme

$$\tau = \{A \subseteq X \mid p \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

1. Si provi che τ è una topologia su X.
2. Si provi che lo spazio topologico (X, τ) è connesso. È connesso per archi?
3. Si dica, motivando la risposta se lo spazio topologico è di Hausdorff.
4. Supponendo che X sia infinito si dica se X è compatto oppure no ().

Esercizio 3 Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ avente per base $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid \; a,b \in \mathbb{R}\}$.

1. Si determini una base della topologia prodotto $\tau \times \tau$ su $\mathbb{R}^2$.
2. Si considerino i due sottospazi di $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$ definiti da

   $$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \qquad \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}.$$

   Si caratterizzino tutti gli aperti della topologia di Γ e si dica se Δ e Γ sono omeomorfi oppure no.

Esercizio 4 Sia X un insieme infinito e sia τ la topologia cofinita su X, ossia $\tau = \{X, \emptyset\} \cup \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ è finito }\}$.

1. Si provi che (X, τ) è compatto e connesso.
2. Si provi che un´applicazione $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ è continua se e solo se per ogni $x \in X$, l´insieme $f^{-1}(x)$ è finito oppure $f^{-1}(x) = X$.

Esercizio 5 Sia X un insieme e sia τ la topologia cofinita, ossia $\tau = \{X, \emptyset\} \cup \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ è finito }\}$.

1. Si provi che (X, τ) è di Hausdorff se e solo se X è finito.
2. Si provi che un´applicazione $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ è un omeomorfismo se e solo se f è bigettiva.

Esercizio 6 Sia τ l'insieme definito da $\tau = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

1. Si provi che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.
2. Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto.
3. Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso.

Esercizio 7 Sia τ l'insieme definito da $\tau = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$

1. Si provi che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.

2. Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau)$ è uno spazio di Hausdorff.
3. Si provi che una funzione $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è continua se e solo se è monotona non decrescente.

Esercizio 8 Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+8y^2-4 = 0\} \qquad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2+y = 0\} \qquad Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y^2 = 0\}$$

Esercizio 9 Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no:

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq 1\} \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

Esercizio 10 Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no:

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 = 1\} \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 4\} \end{aligned}$$

Esercizio 11 Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no:

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 = 1\} \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 4\} \end{aligned}$$

Esercizio 12 Si dica, motivando la risposta, quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no:

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^4\} \end{aligned}$$

Esercizio 13 Sul piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la relazione d'equivalenza

$$x \sim y \iff y - x \in \mathbb{Z}^2$$

e si consideri lo spazio topologico quoziente $X = \mathbb{R}^2/\sim$.

1. Si provi che X è compatto.
2. Si provi che X è di Hausdorff
3. Si dimostri che $X \cong S^1 \times S^1$.

Esercizio 14 Sull'insieme di numeri reali $[-2, 2]$ si consideri la relazione d'equivalenza definita da

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } -1 < x, y < 1.$$

e sia $X = [-2, 2]/\sim$

1. Dire, motivando la risposta se X è uno spazio di Hausdorff.
2. Dire, motivando la risposta se X è uno spazio connesso.
3. Dire, motivando la risposta se X è uno spazio compatto.
4. È vero che per ogni x e $y \in X$ esiste un intorno di uno dei due punti che non contiene l'altro?

Esercizio 15 Ricordiamo che $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

1. Si dimostri che $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1 \cong \mathbb{D}^2$.
2. Per ogni n, $m \in \mathbb{N}$ si determini un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $f(\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^m) = \mathbb{D}^{n+m}$.
3. Si deduca che $\mathbb{D}^2 \times S^1 \cup S^1 \times \mathbb{D}^2 \cong S^3$.

Esercizio 16 Sia X uno spazio topologico e sia $I = [0, 1]$. Su $X \times I$ si consideri la relazione d´equivalenza $\sim$ definita da

$$(x, t) \sim (y, s) \iff (x, t) = (y, s) \quad \text{o} \quad t = s = 1.$$

Si denoti con $C_X = X \times I/\sim$.

1. Si provi che $C(X)$ è connesso per archi.
2. si provi che se X è compatto allora anche $C(X)$ lo è;
3. si provi che $CS^1 \cong \mathbb{D}^2$.

Esercizio 17 Sull´insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali si consideri la relazione d´equivalenza, definita da

$$x \sim y \iff x = y \text{ o } x, y \in \mathbb{Z}$$

e sia $X = RR/\sim$.

Dire.motivando le risposte

1. se X è compatto;
2. se X è connesso;
3. se X è di Hausdorff.

Esercizio 18 Sull´insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali si considerino le due relazioni d´equivalenza, definite da

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \qquad x \approx y \iff x = y \text{ o } x, y \in \mathbb{Z}$$

e siano X $\mathbb{R}/\sim$ e $Y = \mathbb{R}/\approx$.

Dire.motivando la risposta, quali dei tre spazi topologici X, Y e S^1 sono tra loro omeomorfi e quali no.

Esercizio 19 Provare che $S^1 \times S^1$ è omeomorfo alla quadrica proiettiva reale di equazione $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$.

Esercizio 20 Sia $A = \{x \in \mathbb{D}^2 \mid \|x\|(\|x\| - 1) = 0\}$ e sia $X = \mathbb{D}^2/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza definita da $x \sim y$ se e solo se $x = y$ o $x, y \in A$.

1. Si provi che $X \cong \widehat{S^1 \times \mathbb{R}}$.

2. Si dica, motivando la risposta, se $X \cong S^1 \times S^1$.

Esercizio 21 Sull'insieme $S^1 \times [0,1]$ si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ definita da

$$(x,t) \sim (y,s) \iff (x,t) = (y,s) \text{ o } x = y \text{ e } |t-s| = 1.$$

1. Provare che $S^1 \times [0,1]/\sim\ \cong S^1 \times S^1$.
2. Dire se lo spazio definito al punto precedente è omeomorfo al sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = z^2+t^2\}$

Esercizio 22 Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2$ si consideri la retta proiettiva H di equazione $x_0 = 0$ e si defenisca la relazione d'equivalenza definita da

$$X \sim Y \iff X = Y \text{ oppure } X, Y \in H.$$

Si provi che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})/\sim \cong S^2$. Cosa si può dire se al posto di $\mathbb{R}$ si usa il campo $\mathbb{C}$?